Косвенные измерения

Косвенные измерения – это измерения, при которых искомое значение Q находят на основании известной зависимости (47)

$$Q = F(Q1,Q2, ..., Q_m), \tag{47}$$

где Q_1, Q_2, ..., Q_m – значения, полученные при прямых измерениях. По виду функциональной зависимости F они делятся на две основные группы – линейные и нелинейные. Для линейных косвенных измерений математический аппарат статистической обработки полученных результатов разработан детально. Обработка результатов косвенных измерений производится, как правило, методами: основанными на раздельной обработке аргументов и их погрешностей; линеаризации; приведения.

Косвенные измерения при, линейной зависимости между аргументами. Линейная функциональная зависимость является простейшей формой связи между измеряемой величиной и находимыми посредством прямых измерений аргументами. Она может быть выражена формулой (48)

$$Q = \sum_{i-1}^{m} b_i Q_i, \tag{48}$$

где b_i – постоянный коэффициент i-го аргумента Q_i; m – число аргументов. Погрешности линейных косвенных измерений оцениваются методом, основанным на раздельной обработке аргументов и их погрешностей.

Если коэффициенты b_i определяют экспериментально, то нахождение результата измерения величины Q производится поэтапно. Сначала оценивают каждое слагаемое b_iQ_i, как косвенно измеряемую величину, полученную в результате произведения двух измеряемых величин, а потом находят оценку измеряемой величины Q. Результат косвенного измерения определяют по формуле (49)

$$\tilde{Q} = \sum_{i-1}^{m} b_i \tilde{Q}_i, \tag{49}$$

где $\tilde{Q}_i$ – оценка результата измерений аргумента Q_i, получаемая, как правило, посредством обработки результатов многократных прямых измерений каждого из аргументов. При несмещённости и состоятельности результатов $\tilde{Q}_i$ полученная оценка результата измерения $\tilde{Q}$ будет также несмещённой и состоятельной. Поскольку дисперсия результата измерения (50)

$$D[Q] = \sum_{i=1}^{m} b_i^2 D[Q_i], \tag{50}$$

то, если результаты $\tilde{Q}_i$ обладают минимальной дисперсией (т. е. являются эффективными), оценка результата измерения $\tilde{Q}_i$ также будет эффективной.

При отсутствии корреляционной связи между аргументами среднего квадратического отклонения результата косвенного измерения $S(\tilde{Q})$, обусловленное случайными погрешностями, вычисляется по формуле (51)

$$S[\tilde{Q}] = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2 S^2(\tilde{Q}_i)}, \tag{51}$$

где $S(\tilde{Q}_i)$ – среднее квадратическое отклонение результата измерения аргумента q_j.

При наличии корреляционной связи между аргументами среднего квадратического отклонения результата косвенного измерения (52)

$$S[\tilde{Q}] = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2 S^2(\tilde{Q}_i) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{k=1\\k=l}}^{m} \overline{P}_{kl} b_k b_l S(\tilde{Q}_k) S(\tilde{Q}_l)}. \qquad (52)$$

Здесь ρ_{k1} – несмещенная оценка коэффициента корреляции между погрешностями аргументов Q_k и Q_i (53)

$$\tilde{P}_{kl} = \frac{1}{n(n-1)S(\tilde{Q}_k)S(\tilde{Q}_l)} \sum_{i=1}^{n} (Q_{ki} - \tilde{Q}_k)(Q_{li} - \tilde{Q}_l), \qquad (53)$$

где Q_{ki}, Q_{1i} – i-е результаты прямых измерений k-го и i-го аргументов; n – число прямых измерений аргументов.

Корреляция между аргументами чаще всего возникает в тех случаях, когда их измерения проводятся одновременно и подвергаются одинаковому влиянию внешних условий (температуры, влажности, напряжения питающей сети, помех и т. п.). Критерием отсутствия связи между двумя аргументами является выполнение неравенства (54)

$$\left|\tilde{p}_{kl}\sqrt{n-2}\Big/\sqrt{1-\tilde{p}_{kl}^2}\right| < t_q\,, \qquad (54)$$

где t_q – коэффициент Стьюдента, соответствующий уровню значимости q и числу степеней свободы n – 2. Необходимо проверить отсутствие корреляционных связей между всеми парными сочетаниями аргументов.

Моделью для распределения результатов измерений отдельных аргументов обычно можно считать случайную величину с нормальным распределением. Для распределений, отличных от нормального, распределение среднего арифметического при этом все же можно считать нормальным. Случайную погрешность результата косвенного измерения, образующуюся путём сложения случайных погрешностей результатов определения многих аргументов, ещё с большим основанием можно считать нормально распределенной случайной величиной. Это даёт возможность найти доверительный интервал для значения измеряемой величины.

При большом числе измерений (более 25–30), выполненных при нахождении каждого из аргументов, доверительную границу случайной погрешности результата косвенного измерения можно определить по формуле (55)

$$\varepsilon(P) = Z_p S(\tilde{Q}), \tag{55}$$

где z_p – квантиль нормального распределения, соответствующий выбранной доверительной вероятности P.

При меньшем числе измерений для определения доверительного интервала используется распределение Стьюдента, число степеней свободы которого рассчитывается по приближенной формуле (56)

$$f = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{b_i^4 S^4(\tilde{Q}_i)}{n_i + 1}\right)^{-1} \left[\left(\sum_{i=1}^{m} b_i^2 S^2(\tilde{Q}_i)\right)^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{b_i^4 S^4(\tilde{Q}_i)}{n_i + 1}\right)\right], \tag{56}$$

где n_i – число измерений при определении аргумента Q_i. В этом случае при условии, что распределение погрешностей результатов измерения аргументов не противоречит нормальному распределению, доверительная граница случайной погрешности результата косвенного измерения (57)

$$\varepsilon(P) = t_q S(\tilde{Q}), \tag{57}$$

где t_q – коэффициент Стьюдента, соответствующий доверительной вероятности и числу степеней свободы f.

Систематическая погрешность результата косвенного измерения определяется систематическими погрешностями результатов измерений аргументов. При измерениях последние стремятся исключить. Однако полностью это сделать не удаётся, всегда остаются неисключенные систематические погрешности, которые рассматриваются как реализации случайной величины, имеющей равномерное распределение. Такое предположение приводит обычно к достаточно осторожным заключениям о погрешности результатов косвенных измерений.

Доверительные границы неисключенной систематической погрешности результата линейного косвенного измерения в случае, если неисключенные систематические погрешности аргументов заданы границами, вычисляют по формуле (58)

$$\theta(P) = k\sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2\theta_i^2}, \tag{58}$$

где k – поправочный коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью P и числом m составляющих θ_i. Его значения приведены в табл. 15. Погрешность от применения этих усредненных коэффициентов не превышает 10 % .

Таблица 15

Значения коэффициента k при m>4

P	0,90	0,95	0,98	0,99
k	0,95	1,1	1,3	1,4

Если число суммируемых слагаемых $m \leq 4$ и они значительно различаются между собой, то значение коэффициента k определяется по табл. 16. Под L здесь понимают отношение наибольшей длины интервала $(b_i0_i)_{max}$ одного из слагаемых к длине $b_i\theta_i$ остальных слагаемых.

Если границы неисключенных систематических погрешностей результатов измерений аргументов заданы их доверительными границами $\theta_i(P_i)$, соответствующими вероятностям P_i, то границу $\theta(P)$ определяют по формуле (59)

$$\theta(P) = k\sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2\theta_i^2(P_i)/k_i^2}. \qquad (59)$$

Таблица 16

Значения коэффициента k при m = 2, 3, 4

L	*P=0,98*			*P = 0,99*		
	m=2	*m = 3*	*m = 4*	*m = 2*	*m = 3*	*m = 4*
1	1,22	1,28	1,30	1,28	1,38	1,41
2	1,16	1,23	1,26	1,22	1,31	1,36
3	1,11	1,1	1,20	1,16	1,24	1,28
4	1,07	1,12	1,15	1,12	1,18	1,22
5	1,05	1,09	1,12	1,09	1,14	1,18

Коэффициенты k_i определяются так же, как поправочный коэффициент k.

Суммарная погрешность результата косвенного измерения оценивается на основе композиции распределений случайных и неисключенных систематических погрешностей. Формулы для её расчёта (в зависимости от соотношения границ неисключенной систематической составляющей и среднего квадратического отклонения случайной составляющей погрешности) приведены в табл. 17.

Таблица 17

Погрешность результата косвенных измерений Δ(P)

Значение $\theta(P)/S(\tilde{Q})$	*Погрешность результата измерения Д(P)*
$\theta(P)/S(\tilde{Q}) < 0.8$	$\varepsilon(P)$
$0,8 < \theta(P)/S(\tilde{Q}) < 8$	$k_p[\varepsilon(P) + \theta(P)]$
$\theta(P)/S(\tilde{Q}) > 0,8$	$\varepsilon(P)$

Коэффициент k_p определяется по табл. 18.

Таблица 18

Зависимость k_p от отношения $q(P)/S(\tilde{Q})$ при различной доверительной вероятности

$q(P)/S(\tilde{Q})$	0,5	0.75	1	2	3	4	5	6	7	8
$k_{0,95}$	0,81	0,77	0,74	0,71	0,73	0,76	0,78	0,79	0,80	0,81
$k_{0,99}$	0,87	0.85	0,82	0,80	0,81	0,82	0,83	0,83	0,84	0,85

Результат косвенных измерений должен записываться в виде $x \pm \Delta(P)$ при доверительной вероятности P.