Тема 1.7. Принципы описания и оценивания погрешностей

1.7.1. Модели погрешности

В основе современных подходов к оцениванию погрешностей лежат принципы, обеспечивающие выполнение требований единства измерений.

Для целей исследования и оценивания погрешность описывается с помощью определенной **модели** (систематическая, случайная, методическая, инструментальная и др.).

На выбранной модели определяют характеристики, пригодные для количественного выражения тех или иных ее свойств.

Задачей обработки результатов при измерениях и является нахождение оценок этих характеристик.

Погрешности (показатели точности) оценивают сверху; в то же время верхняя оценка погрешности должна быть реалистичной, не слишком завышенной.

Выбор модели погрешности обусловлен сведениями об её источниках как априорными, так и полученными в ходе измерительного эксперимента.

Модели разделяют на
- детерминистские и
- недетерминистские (случайные).

Для **систематических** погрешностей справедливы детерминистские модели, при которых систематическая погрешность по определению может быть представлена:
- либо постоянной величиной,
- либо известной зависимостью (линейная, периодическая и др. функции от времени или номера наблюдения).

Общей моделью **случайной погрешности** служит случайная величина, обладающая функцией распределения вероятностей.

Характеристики случайной погрешности делят на **точечные** и **интервальные**.

Для описания погрешностей результата измерения чаще всего используют интервальные оценки.

Это означает, что границы, в которых может находиться погрешность, находят как отвечающие некоторой вероятности.

В этом случае границы погрешности называют доверительными границами, а вероятность, соответствующую доверительной погрешности, - доверительной вероятностью.

Однако в некоторых случаях, когда нет возможности или необходимости оценить доверительные границы погрешности (например, неизвестна функция распределения вероятностей погрешности), используют точечные характеристики.
Так, точечной характеристикой являются среднее квадратическое отклонение случайной погрешности, дисперсия.

В целях единообразия представления результатов и погрешностей измерений показатели точности и формы представления результатов измерений стандартизованы.

1.7.2. Суммирование систематических погрешностей

Независимо от того, к какому виду относится измерение, является ли оно прямым, косвенным, совместным или совокупным, систематическая погрешность результата измерения оценивается, как правило, по ее известным составляющим.

Поскольку в каждом конкретном случае каждая систематическая составляющая получает конкретную реализацию (она либо постоянная, либо известен закон её изменения), то результирующая суммарная систематическая погрешность представляет собой алгебраическую сумму составляющих:

$$\Delta_{c\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{c_i}$$

1.7.3. Случайные погрешности. Вероятностное описание результатов и погрешностей

Когда при проведении с одинаковой тщательностью и в одинаковых условиях повторных наблюдений одной и той же постоянной величины получаем результаты, отличающиеся друг от друга, это свидетельствует о наличии в них случайных погрешностей.

В этом случае предсказать результат отдельного наблюдения и исправить его введением поправки невозможно.

Можно лишь с определенной долей уверенности утверждать, что истинное значение измеряемой величины находится в пределах разброса результатов наблюдений от x_{min} до x_{max}, где x_{min} и x_{max} - соответственно нижняя и верхняя границы разброса.

Однако остается неясным, какое из множества лежащих в этой области значений величины принять за результат измерения и какими показателями охарактеризовать случайную погрешность результата.

Установить вероятностные (статистические) закономерности появления случайных погрешностей и на основании этих закономерностей дать количественные оценки результата измерения и его случайной погрешности позволяют методы теории вероятностей и математической статистики.

Для характеристики свойств случайной величины в теории вероятностей используют понятие **закона распределения вероятностей случайной величины.**

Различают две формы описания закона распределения: **интегральную** и **дифференциальную**.

В метрологии преимущественно используется дифференциальная форма - закон распределения плотности вероятностей случайно величины.

Если известен дифференциальный закон распределения случайной величины *f(x)*, то вероятность *P* её попадания в интервал от x_1 до x_2

$$P\left\{x_1 \leq x \leq x_2\right\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

Для описания частных свойств случайной величины используют **числовые характеристики распределений**.

В качестве числовых характеристик выступают моменты случайных величин: начальные и центральные.

Все они представляют собой некоторые средние значения; причём если усредняются величины, отсчитываемые от начала координат, моменты называются начальными, а если от центра закона распределения - то центральными.

Начальный момент k-го порядка определяется формулой

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx$$

Для начальных моментов наибольший интерес представляет математическое ожидание случайной величины (k = 1):

$$m_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

Центральные моменты k-го порядка рассчитываются по формулам:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - m_1 \right)^k f\left(x \right) dx$$

Из центральных моментов особенно важную роль играет второй момент (k = 2) - дисперсия случайной величины *D:*

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - m_1 \right)^2 f\left(x \right) dx$$

Дисперсия случайной величины характеризует рассеяние отдельных её значений. Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины и выражает как бы мощность рассеяния относительно постоянной составляющей.

Однако чаще пользуются положительным корнем квадратным из дисперсии - средним квадратическим отклонением (СКО), которое имеет размерность самой случайной величины.

1.7.4. Оценка результата измерения

Задача состоит в том, чтобы по полученным экспериментально результатам наблюдений, содержащим случайные погрешности, найти оценку истинного значения измеряемой величины - результат измерения.

Будем полагать, что систематические погрешности в результатах наблюдений отсутствуют или исключены.

К оценкам, получаемым по статистическим данным, предъявляются требования:
- состоятельности,
- несмещённости,
- эффективности.

Оценка называется **состоятельной**, если при увеличении числа наблюдений она стремится к истинному значению оцениваемой величины.

Оценка называется **несмещённой**, если ее математическое ожидание равно истинному значению оцениваемой величины.

Чем меньше дисперсия оценки, тем более **эффективной** считают эту оценку.

Способы нахождения оценок результата зависят от вида функции распределения и от имеющихся соглашений по этому вопросу, регламентируемых в рамках законодательной метрологии.

Общие соображения по выбору оценок заключаются в следующем.

Распределения погрешностей результатов наблюдений, как правило, являются симметричными относительно центра распределения, поэтому истинное значение измеряемой величины может быть определено как координата центра рассеивания $x_ц$, т.е. центра симметрии распределения случайной погрешности (при условии, что систематическая погрешность исключена).

Отсюда следует принятое в метрологии правило оценивания случайной погрешности в виде интервала, симметричного относительно результата измерения ($x_ц \pm \Delta x$).

Координата $x_ц$ может быть найдена несколькими способами.

Наиболее общим является определение центра симметрии из принципа симметрии вероятностей, т.е. нахождение такой точки на оси *x*, слева и справа от которой вероятности появления различных значений случайных погрешностей равны между собой и составляют $P_1 = P_2 = 0,5$.

Такое значение $x_ц$ называется медианой.

Координата $x_ц$ может быть определена и как центр тяжести распределения, т.е. как математическое ожидание случайной величины.

В практике измерений встречаются различные формы кривой закона распределения, однако чаще всего имеют дело с нормальным и равномерным распределением плотности вероятностей.

1.7.5. Нормальное распределение

Нормальное распределение плотности вероятности характерно тем, что, согласно центральной предельной теореме теории вероятностей, такое распределение имеет сумма бесконечно большого числа бесконечно малых случайных возмущений с любыми распределениями.

Применительно к измерениям это означает, что нормальное распределение случайных погрешностей возникает тогда, когда на результат измерения действует множество случайных возмущений, ни одно из которых не является преобладающим.

Практически, суммарное воздействие даже сравнительно небольшого числа возмущений приводит к закону распределения результатов и погрешностей измерений, близкому к нормальному.

В аналитической форме нормальный закон распределения выражается формулой

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}\right]$$

где x - случайная величина, m_x - математическое ожидание случайной величины, σ - среднее квадратическое отклонение.

Перенеся начало координат в центр распределения m_x и откладывая по оси абсцисс погрешность $\Delta x = x - m_x$, получим кривую нормального распределения погрешностей