Координата $x_ц$ может быть определена и как центр тяжести распределения, т.е. как математическое ожидание случайной величины.

В практике измерений встречаются различные формы кривой закона распределения, однако чаще всего имеют дело с нормальным и равномерным распределением плотности вероятностей.

1.7.5. Нормальное распределение

Нормальное распределение плотности вероятности характерно тем, что, согласно центральной предельной теореме теории вероятностей, такое распределение имеет сумма бесконечно большого числа бесконечно малых случайных возмущений с любыми распределениями.

Применительно к измерениям это означает, что нормальное распределение случайных погрешностей возникает тогда, когда на результат измерения действует множество случайных возмущений, ни одно из которых не является преобладающим.

Практически, суммарное воздействие даже сравнительно небольшого числа возмущений приводит к закону распределения результатов и погрешностей измерений, близкому к нормальному.

В аналитической форме нормальный закон распределения выражается формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma^2}\right]$$

где x - случайная величина, m_x - математическое ожидание случайной величины, σ - среднее квадратическое отклонение.

Перенеся начало координат в центр распределения m_x и откладывая по оси абсцисс погрешность $\Delta x = x - m_x$, получим кривую нормального распределения погрешностей

$$f(\Delta x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\Delta x^2}{2\sigma^2}\right]$$

Для группы из *n* наблюдений, распределенных по нормальному закону

$$m_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2}{n-1}}.$$

Кривая нормального распределения погрешностей симметрична относительно оси ординат.

Это означает, что погрешности, одинаковые по величине, но противоположные по знаку, имеют одинаковую плотность вероятностей, т.е. при большом числе наблюдений встречаются одинаково часто.

Математическое ожидание случайной погрешности равно нулю.

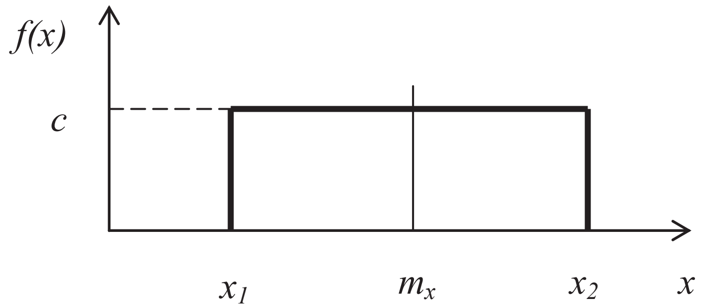
Из характера кривой следует, что при нормальном законе распределения малые погрешности будут встречаться чаще, чем большие.

Сравнивая кривые нормального распределения с различными средними квадратическими отклонениями, можно убедиться, что чем меньше СКО, тем меньше рассеяние результатов наблюдений и тем больше вероятность того, что большинство случайных погрешностей в них будет мало.

Естественно заключить, что качество измерений тем выше, чем меньше СКО случайных погрешностей.

Равномерное распределение. Если случайная величина x принимает значения лишь в пределах некоторого интервала от x_1 до x_2 с постоянной плотностью вероятностей (см. рисунок), то такое распределение называется равномерным и описывается соотношениями

$$f(x) = c, \text{ при } x_1 \le x \le x_2;$$
$$f(x) = 0, \text{ при } x < x_1 \text{ и } x > x_2.$$



Так как площадь, ограниченная кривой распределения, равна единице, то

$$c(x_2 - x_1) = 1$$

и

$$c = 1/(x_2 - x_1). \qquad (1)$$

С учётом (1), плотность распределения

$$f(x) = 1/(x_2 - x_1), \text{ при } x_1 \le x \le x_2;$$
$$f(x) = 0, \text{ при } x < x_1, x > x_2.$$

Математическое ожидание величины x

$$m_x = (x_1 + x_2)/2.$$

В силу симметрии равномерного распределения медиана величины x также равна $(x_1 + x_2)/2$.

Моды закон равномерной плотности не имеет.

Дисперсия величины x определяется по формуле:

$$D_x = (x_2 - x_1)^2/12,$$

откуда СКО

$$\sigma = (x_2 - x_1)/2\sqrt{3}.$$

1.7.5. Варианты оценки случайных погрешностей

Для количественной оценки случайных погрешностей и установления границ случайной погрешности результата измерения могут использоваться:

- предельная погрешность,
- интервальная оценка,
- числовые характеристики закона распределения.

Выбор конкретной оценки определяется

- необходимой полнотой сведений о погрешности,
- назначением измерений и
- характером использования их результатов.

Комплексы оценок показателей точности установлены стандартами.

Предельная погрешность Δ_m - погрешность, больше которой в данном измерительном эксперименте не может появиться.

Теоретически, такая оценка погрешности правомерна только для распределений, границы которых четко выражены и существует такое значение $\pm\Delta_m$, которое ограничивает возможные значения случайных погрешностей с обеих сторон от центра распределения (например, равномерное).

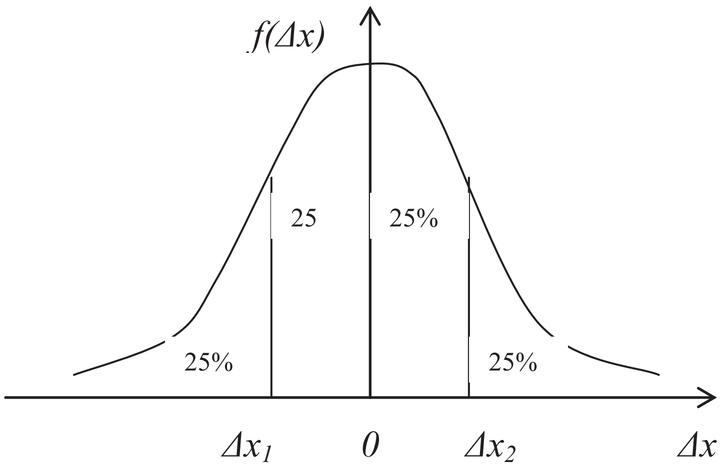
На практике такая оценка есть указание наибольшей погрешности, которая может встретиться при многократных измерениях одной и той же величины.

Недостатком такой оценки является то, что она не содержит информации о характере закона распределения случайных погрешностей.

При арифметическом суммировании предельных погрешностей получаемая сумма может значительно превышать действительные погрешности.

Более универсальными и информативными являются квантильные оценки.

Абсциссы вертикальных линий, делящих площадь под всей кривой плотности распределения погрешностей на части, называются квантилями.



Квантильная оценка погрешности представляется интервалом от $-\Delta x(P)$ до $+\Delta x(P)$, на котором с заданной вероятностью P встречаются $P \cdot 100\%$ всех возможных значений случайной погрешности.

Интервал с границами $\pm\Delta x(P)$ называется доверительным интервалом случайной погрешности, а соответствующая ему вероятность - доверительной вероятностью.

Так как квантили, ограничивающие доверительный интервал погрешности, могут быть выбраны различными, то при оценивании случайной погрешности доверительными границами необходимо одновременно указывать значение принятой доверительной вероятности (например, ±0,3 В при Р = 0,98).

Доверительные границы случайной погрешности $\Delta x(P)$, соответствующие доверительной вероятности Р, находят по формуле

$$\Delta x(P) = t\sigma,$$

где t - коэффициент, зависящий от P и формы закона распределения.

Например, для нормального распределения погрешностей оценка случайной погрешности группы наблюдений интервалом $\pm 1\sigma$ соответствует доверительной вероятности 0,68.

Такая оценка не даёт уверенности в высоком качестве измерений, поскольку 32% от всего числа наблюдений может выйти за пределы указанного интервала, что совершенно неприемлемо при однократных измерениях и дезинформирует потребителя измерительной информации.

Доверительному интервалу $\pm 3\sigma$ соответствует P = 0,997. Это означает, что практически, с вероятностью очень близкой к единице, ни одно из возможных значений погрешности при нормальном законе её распределения не выйдет за границы интервала.

Поэтому при нормальном распределении погрешностей принято считать случайную погрешность с границами $\pm 3\sigma$ предельной (максимально возможной) погрешностью. Погрешности, выходящие за эти границы, классифицируют как грубые или промахи.

В целях единообразия в оценивании случайных погрешностей интервальными оценками при технических измерениях доверительная вероятность принимается равной 0,95.

Недостатком оценивания случайной погрешности доверительным интервалом при произвольно выбираемых доверительных вероятностях является невозможность суммирования нескольких погрешностей, так как доверительный интервал суммы не равен сумме доверительных интервалов.

Однако существует необходимость в суммировании случайных погрешностей, когда нужно оценить результирующую погрешность суммированием её составляющих, подчиняющихся к тому же разным законам распределения.

В теории вероятностей показано, что суммирование статистически независимых случайных величин осуществляется суммированием их дисперсий

$$D_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} D_i$$

или

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}.$$

То есть, для того, чтобы отдельные составляющие случайной погрешности можно было суммировать расчётным путём, они должны быть представлены своими СКО, а не предельными или доверительными границами.

Последняя формула правомерна только для некоррелированных случайных величин. В том случае, когда суммируемые составляющие погрешности коррелированы, расчётные соотношения усложняются, так как требуется учёт корреляционных связей.

Методы выявления корреляционных связей и их учёт являются предметом изучения теории вероятностей.

Рассмотренные свойства распределений следует понимать как "идеальные", полученные на основе бесконечно большого числа опытов.

В реальных условиях результат измерения получают либо обработкой ограниченной группы наблюдений, либо на основе однократного измерения.

Правила обработки данных для получения оценок результата и погрешности статистических измерений определены стандартами Государственной системы обеспечения единства измерений.