Практическое занятие

Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов

1. Решить задачи индивидуального варианта блока № 6. Информация о содержании блока – у старосты группы.

2. Рассмотреть задачи с применением скалярного, векторного или смешанного произведений векторов хотя бы в качестве подсказки, какие именно операции нужно применить, так как в блоке много похожих задач. Желательно и решить задачи, особенно №№ 6, 7, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 17.

1. Найти объем пирамиды $ABCD$ и угол между ребрами AC и AB, зная координаты вершин $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$ $D(4;1;3)$. (Смешанное и скалярное)
2. К точке $A(1;2;-4)$ приложены две силы $\vec{F}_1=(3;-4;1)$, $\vec{F}_2=(-1;0;1)$. Вычислить работу равнодействующей этих сил при перемещении из точки A в точку $B(5;3;2)$. (Скалярное)
3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 120^0. Зная что, $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=3$, найти меньший угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. (Скалярное)
4. Найти проекцию вектора $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$ на вектор $\vec{q}=\vec{a}+3\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=45^0$. (Скалярное)
5. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=(0;2;4)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\cdot\vec{a}=60$. (Скалярное)

6. Найти $\left|\left[(3\vec{a}-3\vec{b})(3\vec{a}+3\vec{b})\right]\right|$, если $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$. (Векторное)
7. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=(1;-2;1)$, $\vec{b}=(3;2;1)$, $\vec{c}=(1;0;-1)$. (Смешанное)
8. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=(2;1;0)$ и $\vec{b}=(0;-1;1)$. (Скалярное)
9. Лежат ли точки $A(1;2;1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$ $D(2;1;3)$ в одной плоскости? (Смешанное)
10. Даны три вектора $\vec{a}=(-2;1;1)$, $\vec{b}=(1;5;0)$, $\vec{c}=(4;4;-2)$. Вычислить $пр_{\vec{c}}(3\vec{a}-2\vec{b})$. (Скалярное)
11. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\frac{\pi}{6}$. Зная, что $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{3}$, $\left|\vec{b}\right|=1$, вычислить угол между векторами $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$. (Скалярное)
12. Зная, что $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=5$ и $\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{2\pi}{3}$, определить при каком значении λ векторы $\vec{p}=\lambda\vec{a}+17\vec{b}$ и $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ окажутся взаимно перпендикулярными. (Скалярное)
13. В параллелограмме векторы двух смежных сторон $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 60^0, причем $\left|\vec{a}\right|=1$, $\left|\vec{b}\right|=2$. Найти длины диагоналей параллелограмма. (Скалярное)
14. Векторы $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$ образуют угол 60^0. Зная, что $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=4$, вычислить угол между медианой OM и стороной OA треугольника OAB. (Скалярное)

15. Чему равен угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right| = 1$, $\left|\vec{b}\right| = 2$ и $\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 + \left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)^2 = 20$? (Скалярное)

16. Компланарны ли векторы $\vec{a} = (2; -1; 2)$, $\vec{b} = (1; 2; -3)$, $\vec{c} = (3; -4; 7)$? (Смешанное)

17. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a} = (1; -2; 3)$, $\vec{b} = (3; 0; -1)$, если $\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 4\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{b} - \vec{a}$? (Векторное)

3. Выполнить и разместить в личном кабинете студента 3 типовых задания.

Типовое задание «Скалярное произведение векторов»

1. Даны вершины треугольника *A(-1; -2; 4), B(-4; -2; 0), C(3; -2; 1).* Найти его внутренний угол при вершине *A* и внешний угол при вершине *B.*
2. Даны точки *A(2; 3; 0), B(-1; 0; 2), C(-3; 1; 2), D(1; 2; 3).* Вычислить $\text{пр}_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
3. Найти длину большей диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, если известно, что
$$|\vec{p}| = 2\sqrt{2}, \qquad |\vec{q}| = 3, \qquad (\widehat{p,q}) = \frac{\pi}{4}$$
4. Даны силы $\overrightarrow{f_1} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$, $\overrightarrow{f_2} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $\overrightarrow{f_3} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$. Найти работу их равнодействующей при перемещении точки из начала координат в точку *A(3; -1; 2).*
5. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (2; 1; 0)$ и $\vec{b} = (0; -1; 1)$.
6. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = (1; 5; -3)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x} \cdot \vec{a} = 70$.

7. Даны три вектора $\vec{a} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 4\vec{k}$. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условиям
$$\vec{x} \cdot \vec{a} = -5, \qquad \vec{x} \cdot \vec{b} = -11, \qquad \vec{x} \cdot \vec{c} = 20$$
8. Даны три вектора $\vec{a} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$, $\vec{c} = (4; 4; 2)$. Вычислить $\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$.
9. Вычислить угол между векторами $\vec{a} = \vec{p} + 5\vec{q}$ и $\vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы.
10. Зная, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $(\widehat{a, b}) = \frac{2\pi}{3}$, определить, при каком значении α векторы $\vec{p} = \alpha \cdot \vec{a} + 17\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ окажутся взаимно перпендикулярными.
11. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, вычислить угол α между векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

Типовое задание «Векторное произведение векторов»

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1. $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $(\widehat{p, q}) = \frac{\pi}{6}$
2. $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1$, $(\widehat{p, q}) = \frac{\pi}{4}$
3. $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = \frac{1}{5}$, $|\vec{q}| = 1$, $(\widehat{p, q}) = \frac{\pi}{2}$
4. $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = \frac{1}{2}$, $(\widehat{p, q}) = \frac{5\pi}{6}$
5. $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $(\widehat{p, q}) = \frac{3\pi}{4}$
6. $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $(\widehat{p, q}) = \frac{\pi}{3}$
7. $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 2$, $(\widehat{p, q}) = \frac{\pi}{2}$
8. $\vec{a} = 4\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 7$, $|\vec{q}| = 2$, $(\widehat{p, q}) = \frac{\pi}{4}$

9. $\vec{a} = \vec{p} - 4\vec{q},\ \vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q},\ |\vec{p}| = 1,\ |\vec{q}| = 2,\ (\widehat{p,q}) = \frac{\pi}{6}$

10. $\vec{a} = \vec{p} + 4\vec{q},\ \vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q},\ |\vec{p}| = 7,\ |\vec{q}| = 2,\ (\widehat{p,q}) = \frac{\pi}{3}$

11. $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q},\ \vec{b} = \vec{p} - \vec{q},\ |\vec{p}| = 10,\ |\vec{q}| = 1,\ (\widehat{p,q}) = \frac{\pi}{2}$

Типовое задание «Смешанное и векторное произведения векторов»

Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$, если:

1. $A_1 = (1;3;6),\ A_2 = (2;2;1),\ A_3 = (-1;0;1),\ A_4 = (-4;6;\ -3)$
2. $A_1 = (-4;2;6),\ A_2 = (2;-3;0),\ A_3 = (-10;5;8),\ A_4 = (-5;2;\ -4)$
3. $A_1 = (7;2;4),\ A_2 = (7;-1;-2),\ A_3 = (3;3;1),\ A_4 = (-4;2;1)$
4. $A_1 = (2;1;4),\ A_2 = (-1;5;-2),\ A_3 = (-7;-3;2),\ A_4 = (-6;-3;\ -6)$
5. $A_1 = (-1;-5;2),\ A_2 = (-6;0;-3),\ A_3 = (3;6;-3),\ A_4 = (10;6;\ 7)$
6. $A_1 = (0;-1;-1),\ A_2 = (-2;3;5),\ A_3 = (1;-5;-9),\ A_4 = (-1;-6;3)$
7. $A_1 = (5;2;0),\ A_2 = (2;5;0),\ A_3 = (1;2;4),\ A_4 = (-1;1;\ 1)$
8. $A_1 = (2;-1;-2),\ A_2 = (1;2;1),\ A_3 = (5;0;-6),\ A_4 = (-10;9;\ -7)$
9. $A_1 = (-2;0;-4),\ A_2 = (-1;7;1),\ A_3 = (4;-8;-4),\ A_4 = (1;-4;\ 6)$
10. $A_1 = (14;4;5),\ A_2 = (-5;-3;2),\ A_3 = (2;-6;-3),\ A_4 = (-2;2;\ -1)$
11. $A_1 = (1;2;0),\ A_2 = (3;0;-3),\ A_3 = (5;2;6),\ A_4 = (8;4;\ -9)$