Практическое занятие

Вычисление пределов функций

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя (то есть без применения производных). Решение и ответы разместить в личном кабинете студента:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\ln\left(1+tg\,2x\right)}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,7x}{3^{5x}-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\ln\left(1+x\right)}$

4. $\lim\limits_{x\to 17}\dfrac{4-\sqrt{x-1}}{e^{17-x}-1}$

2. Выполнить в соответствии с индивидуальным номером варианта два типовых задания. Решение и ответы разместить в личном кабинете студента.

Типовое задание
«Вычисление пределов функций»

Пояснение к типовому заданию

На фотографиях страниц методички (см. ниже) не все задания видны, поэтому:

Вариант 1. Во 2-м пределе взять знак «минус» в числителе и знаменателе. 3-й предел: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+sinx)}{sin4x}$.

Вариант 2. В числителе 3-го предела $cos10x$.

Вариант 3. 3-й предел: $\lim_{x\to 0}\frac{1-cos2x}{cos7x-cos3x}$

Вариант 5. 3-й предел: $\lim_{x\to 0}\frac{arcsin3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$

Вариант 6. 3-й предел: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\ln(1+sinx)}$

Вариант 7. 4-й предел: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2-n^2}$; 5-й предел: $\lim_{x\to 0\pm}\frac{cosx}{1-3^x}$

Вариант 8. 3-й предел: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-7x)}{sin[\pi(x-7)]}$

Вариант 10. 3-й предел: $\lim_{x\to 0}\frac{arctg3x}{tg[2\pi(x+1)]}$

Вариант 11. В самом конце числителя 3-го предела: $\frac{5\pi}{2}$;

5-й предел: $\lim_{x\to 0\pm}\left(\frac{2x+3}{4x+5}\right)^{\frac{1}{x}}$

4. ВЫЧИСЛИТЬ ПРЕДЕЛЫ, НЕ ПОЛЬЗУЯСЬ ПРАВИЛОМ ЛОПИТАЛЯ

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 + 4x - x^2}{x + 3x^2 + 2x^4}$; $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2 \mp x - 12}{x^2 \mp 2x - 8}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + \sin}{\sin 4x}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2 + 3}{2n^2 + 1}\right)^{n^2}$; $\lim\limits_{x\to 0\pm} (0{,}5 - x)^{1/\sin x}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x + 3}$; $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 - 5x + 6}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 10x}{e^{x^2} - 1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3 + 6}{n^3 - 1}\right)^{n^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x - 6}{4x + 2}\right)^{\ln x}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 + 4x - 5}{6x^3 - 4x + 3}$; $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 5x + 2}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2 + 1}{n^2 - 1}\right)^{-n^2}$; $\lim\limits_{x\to 3\pm} 4^{\frac{x}{3-x}}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^5 - 3x + 8}{2x^5 + 2x - 1}$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 2}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos^3 2x}{4x^2}$;

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n + 1}{3n - 1}\right)^{2n-3}$; $\lim\limits_{x\to 0\pm} \left(\dfrac{2 - 3x}{4 + x}\right)^{\mathrm{ctg}\,x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4 - 7x + 4}{3x^4 + 5x - 2}$; $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 20}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x} - \sqrt{\ }}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n + 3}{n + 5}\right)^{n+4}$; $\lim\limits_{x\to 0\pm} \dfrac{1 + x^2}{\ln(1 + x)}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^3 - 4x + 11}{2x^3 + 2x - 5}$; $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 2x - 15}{2x^2 - 7x - 15}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\ln(1 + \sin}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n + 1}{n - 2}\right)^{3n-1}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{3x^2 + 5}{2x^2 + 1}\right)^{x}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3 + 7x - 2}{x^3 - 2x + 1}$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2 + 5x - 7}{3x^2 - x - 2}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{arctg}\, 2x}{\sin[2\pi(x+5)}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3 + 1}{n^3 - 1}\right)^{2-n^2}$; $\lim\limits_{x\to 0\pm} \dfrac{\cos x}{1 - 3^x}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^4-4x^2+3}{x^4+1}$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-x-2}{3x^2-4x+1}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-7\ldots}{\sin[\pi(x-7\ldots}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n+4}{n+2}\right]^{3-n}$; $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{x+1}{3x+1}\right]^{\ln\ln x}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-5x+1}{6x^2+3x-4}$; $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-6}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{\mathrm{tg}[2\pi(x+1)\ldots}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{2n-1}{2n+1}\right]^{n+1}$; $\lim\limits_{x\to e\pm} \dfrac{x}{1-\ln x}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^6-x^3+2x}{2x^6-1}$; $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-21}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{arctg}\,3x\ldots}{\mathrm{tg}[2\pi(x+1\ldots}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n-3}{n+1}\right]^{6-n}$; $\lim\limits_{x\to 0\pm} \dfrac{\cos(\pi-x)}{1-2^x}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^5-x^2+x}{x^5-2}$; $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-21}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}3x\cos(x+\frac{5\pi}{2}\ldots}{\ln(1-2x^2\ldots}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{3n^2+7}{3n^2}\right]^{n^2+n}$; $\lim\limits_{x\to 0\pm} \left[\dfrac{2x+3}{4x+5}\right]$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^3-2x+7}{3x^2-5x+2}$; $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{4\mathrm{arctg}3x}$;

$\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{10n-3}{10n-1}\right]^{5n}$; $\lim\limits_{x\to 0\pm} \left[\dfrac{2x+4}{3x+5}\right]$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$; $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+x-2}{3x^2+4x+1}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x * \mathrm{si}\ldots}{x^2+3x^3\ldots}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{2n+3}{2n-1}\right]^{n-3}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \left[\dfrac{4x+2}{5x-6}\right]^{\ln(-x)}$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^5+6x-5}{x^5+2x^2-3}$; $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2-5x-7}{3x^2+x-2}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{3x+\ldots}}{\cos[\pi(x+1)\ldots}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n^4+1}{n^4-1}\right]^{n^4-n^2}$; $\lim\limits_{x\to 1\pm} \dfrac{\cos\pi x}{\ln x}$.

Типовое задание

«Кривые второго порядка. Полярная система координат»

Линия задана уравнением $r=r(\varphi)$ в полярной системе координат. Требуется:

1) найти уравнение данной линии в декартовой прямоугольной системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью;

2) привести к каноническому виду уравнение линии в декартовой прямоугольной системе координат и определить, какая это линия.

1. $r=\dfrac{5}{1-\frac{1}{2}\cos\varphi}$.

2. $r=\dfrac{6}{1-\cos\varphi}$.

3. $r=\dfrac{10}{1-\frac{3}{2}\cos\varphi}$.

4. $r=\dfrac{12}{2-\cos\varphi}$.

5. $r=\dfrac{5}{3-4\cos\varphi}$.

6. $r=\dfrac{1}{3-3\cos\varphi}$.

7. $r=\dfrac{144}{13-5\cos\varphi}$.

8. $r=\dfrac{18}{4-5\cos\varphi}$.

9. $r=\dfrac{16}{3-5\cos\varphi}$.

10. $r=\dfrac{21}{5-2\cos\varphi}$.

11. $r=\dfrac{15}{2-3cos\varphi}$

Пример решения типового задания

Для решения нам понадобятся уравнения связи (1) между прямоугольными координатами точки $M(x;y)$ и полярными координатами этой же точки $M(r;\varphi)$:

$$(1)\ \ x=r\cdot\cos\varphi;\quad y=r\cdot\sin\varphi;\quad x^2+y^2=r^2$$

Так же нам понадобится процедура выделения полного квадрата в квадратном трехчлене $t^2 \pm pt + q$, где t – переменная, p и q – числа. Эту процедуру можно записать в виде формулы (2):

$$(2) \quad t^2 \pm pt + q = \left(t \pm \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$

Пусть линия задана полярным уравнением $r = \dfrac{1}{2 + 3\cos\varphi}$. Найдем уравнение линии в декартовой прямоугольной системе координат, согласованной с полярной системой координат, приведем найденное уравнение к каноническому виду и определим тип линии. Выполним следующие преобразования:

$$r = \frac{1}{2 + 3\cos\varphi}$$

$$r \cdot (2 + 3\cos\varphi) = 1$$

$$2r + 3r\cos\varphi = 1$$

По уравнениям связи (1), $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r\cos\varphi = x$, поэтому:

$$2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + 3x = 1$$

$$2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = 1 - 3x$$

$$\left(2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = (1 - 3x)^2$$

$$4 \cdot (x^2 + y^2) = 1 - 6x + 9x^2$$

$$4x^2 + 4y^2 = 1 - 6x + 9x^2$$

Перенесем все слагаемые в правую часть равенства:

$$1 - 6x + 9x^2 - 4x^2 - 4y^2 = 0$$

$$1 - 6x + 5x^2 - 4y^2 = 0$$

Сгруппируем слагаемые, содержащие одну и ту же переменную:

$$(5x^2 - 6x) - 4y^2 + 1 = 0$$

Коэффициент при переменной в квадрате выносим за скобки суммы (разности) сгруппированных слагаемых:

$$5\cdot\left(x^2-\frac{6}{5}x\right)-4y^2+1=0$$

В скобках выделим полный квадрат по формуле (2), полагая $t=x$; $p=\frac{6}{5}$, значит, $\frac{p}{2}=\frac{3}{5}$; $q=0$; перед $\frac{p}{2}$ в скобках ставим знак «минус»:

$$5\cdot\left[\left(x-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{9}{25}\right]-4y^2+1=0$$

Раскроем внешние (квадратные) скобки:

$$5\cdot\left(x-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{9}{5}-4y^2+1=0$$

$$5\cdot\left(x-\frac{3}{5}\right)^2-4y^2-\frac{4}{5}=0$$

$$5\cdot\left(x-\frac{3}{5}\right)^2-4y^2=\frac{4}{5}$$

Умножим уравнение на $\frac{5}{4}$ для того, чтобы его правая часть была равна единице:

$$\frac{25}{4}\cdot\left(x-\frac{3}{5}\right)^2-5y^2=1$$

Так как умножение на $\frac{25}{4}$ равносильно делению на $\frac{4}{25}$, а умножение на 5 равносильно делению на $\frac{1}{5}$, то перепишем уравнение в виде:

$$\frac{\left(x-\frac{3}{5}\right)^2}{4/25}-\frac{y^2}{1/5}=1$$

Пусть $\tilde{x}=x-\frac{3}{5}$, $\tilde{y}=y$. Тогда:

$$\frac{(\tilde{x})^2}{4/25} - \frac{(\tilde{y})^2}{1/5} = 1$$

Получили каноническое уравнение гиперболы.

Центром гиперболы является точка с координатами $\left(\frac{3}{5};0\right)$.

Внимание! У каждого из вас в ответе может быть получено каноническое уравнение другой кривой 2-го порядка, не обязательно гиперболы.