

ные кривые, соответствующие формуле (3-25) Л. Прандтля и по более точной формуле Кармана — Цзяна:

$$\bar{p} = \frac{\bar{p}_n}{\sqrt{1-M_\infty^2} + \frac{\bar{p}_n M_\infty^2}{2(1+\sqrt{1-M_\infty^2})}} \quad (3-37)$$

Совпадение расчета по формулам (3-27а)—(3-34) и по формуле (3-37) с опытом является вполне удовлетворительным. Значительно худшие результаты получены при использовании формулы (3-25).

### 3-4. ТЕОРЕМА Н. Е. ЖУКОВСКОГО

Теория силового воздействия потока идеальной жидкости на обтекаемые тела основывается на известной теореме Н. Е. Жуковского. Н. Е. Жуковский установил вихревое происхождение силы взаимодействия и нашел простую связь между этой силой и интенсивностью циркуляционного те-

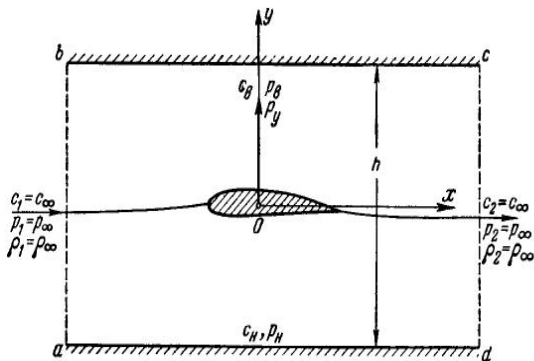


Рис. 3-12. К доказательству теоремы Н. Е. Жуковского.

чения, возникающего при обтекании тела. Эта задача была решена Н. Е. Жуковским в 1906 г.

Для доказательства<sup>1</sup> теоремы Жуковского воспользуемся схемой, показанной на рис. 3-12. Расположим крыловой профиль в плоском потоке между двумя непрони-

<sup>1</sup> Приведенное ниже доказательство теоремы Н. Е. Жуковского предложено Г. Ф. Бурого.

цаемыми плоскими контрольными поверхностями, ориентированными по потоку и удаленными друг от друга на расстоянии  $h$ . Систему координат  $xOy$  разместим так, чтобы направление оси  $x$  совпадало с направлением вектора скорости невозмущенного потока  $c_\infty$ . На бесконечном удалении от профиля проведем сечения  $ab$  и  $cd$ , нормальные к направлению потока.

Предполагая, что профиль обтекается безотрывно, и применяя теорему об изменении количества движения к массе жидкости, заключенной внутри объема  $abcd$ , найдем, что сила, направленная против течения и называемая лобовым сопротивлением профиля, определяется формулой<sup>1</sup>

$$P_x = \int_{(h)} (p_1 - p_2) dy - \int_{(h)} p_1 c_1 (c_1 - c_2) dy.$$

Так как скорости и давления в сечениях  $ab$  и  $cd$  одинаковы, то

$$P_x = 0.$$

Приведенный результат был получен впервые Л. Эйлером в 1745 г. и независимо от него в более общем виде Даламбером. Он может показаться парадоксальным, так как противоречит опыту. Однако следует иметь в виду, что этот результат получен в предположении отсутствия вязкости и отрыва потока от поверхности обтекаемого контура. В действительности всегда в какой-то степени оба эти фактора имеют место.

В практическом отношении можно сделать вывод, что следует стремиться добиваться таких форм контура, при которых обеспечивались бы безотрывное обтекание и наименьшие воздействия сил вязкости; в этом случае, по-видимому, сила сопротивления будет наименьшей.

Найдем теперь величину силы  $P_y$ , нормальной к вектору скорости  $c_\infty$ . Эту силу называют подъемной силой. Обозначив через  $p_n$  давление на нижней контрольной поверхности и через  $p_v$  давление на верхней контрольной поверхности, получим:

$$-P_y + \int_{-\infty}^{\infty} (p_n - p_v) dx = 0,$$

<sup>1</sup> Рассматриваемые силы относим к единице длины крыла.

так как проекция скоростей у непроницаемых контрольных поверхностей на ось  $y$  равняется нулю. Следовательно,

$$P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} (p_n - p_b) dx. \quad (3-38)$$

Увеличивая расстояние между стенками  $h$ , в предельном случае (при  $h \rightarrow \infty$ ) получим обтекание тела безграничным потоком. При этом поток у стенок будет слабо возмущенным. Скорости такого течения, как известно, можно представить в виде [формулы (3-28)]:

$$\left. \begin{aligned} c_n &= c_\infty + c'_n; \\ c_b &= c_\infty + c'_b, \end{aligned} \right\} \quad (3-28б)$$

где  $c'_n, c'_b$  — малые добавочные скорости у стенки, вызванные влиянием обтекаемого тела.

Давление в произвольной точке возмущенного потока связано с давлением на бесконечности уравнением Бернулли:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty} + \frac{k-1}{2k} (c_\infty^2 - c^2),$$

которое при принятом допущении (слабо возмущенный поток) на основании (3-28б) преобразуется к виду:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty} - \frac{k-1}{k} c_\infty c'.$$

Отсюда, имея в виду, что  $\frac{p}{\rho^k} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty^k}$  и  $\frac{\rho_\infty}{p_\infty} = \frac{k}{a_\infty^2}$ , после несложных преобразований находим:

$$\frac{p}{p_\infty} \approx 1 - kM_\infty^2 \frac{c'}{c_\infty}, \quad (3-39)$$

или

$$p = p_\infty - \rho_\infty c_\infty c'. \quad (3-39а)$$

Уравнение (3-39) или (3-39а) справедливо для линеаризованного течения и называется линеаризованным уравнением Бернулли. Уравнение (3-39а) можно

записать для сечений на верхней и нижней контрольных поверхностях:

$$p_n = p_\infty - \rho_\infty c_\infty c'_n$$

и

$$p_b = p_\infty - \rho_\infty c_\infty c'_b.$$

Подставляя  $p_n$  и  $p_b$  в уравнение (3-38), находим:

$$P_y = \rho_\infty c_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} (c'_b - c'_n) dx.$$

Нетрудно видеть, что интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} (c'_b - c'_n) dx$

можно выразить через циркуляцию скорости по замкнутому контуру (рис. 3-12). Действительно,

$$\Gamma_{abcd} = \Gamma_{ab} + \Gamma_{bc} + \Gamma_{cd} + \Gamma_{da};$$

так как

$$\Gamma_{bc} = \int_{-\infty}^{+\infty} (c_\infty + c'_n) dx; \quad \Gamma_{da} = - \int_{-\infty}^{+\infty} (c_\infty + c'_n) dx; \quad \Gamma_{ab} = -\Gamma_{cd},$$

то

$$\Gamma_{abcd} = \int_{-\infty}^{+\infty} (c'_b - c'_n) dx.$$

Следовательно,

$$P_y = \rho_\infty \Gamma c_\infty. \quad (3-40)$$

Формула (3-40) выражает теорему Н. Е. Жуковского, являющуюся основной теоремой аэродинамики. Теорему Жуковского можно сформулировать так: **при обтекании тела плоскопараллельным безграничным потоком идеальной сжимаемой жидкости на тело единичного размаха действует сила, равная произведению циркуляции скорости  $\Gamma$  на скорость  $c_\infty$  и на плотность  $\rho_\infty$  невозмущенного потока.** Направление этой силы нормально к направлению скорости невозмущенного потока  $c_\infty$ . При этом, как следует из вывода, если циркуляция скорости, вычисленная при обходе по часовой стрелке, окажется положительной, то и  $P_y$  будет положительной. Подъемную силу  $P_y$  часто называют силой Жуков-

ского. Для определения  $P_y$  необходимо знать величину циркуляции скорости, которая вычисляется на основании постулата Жуковского—Чаплыгина (§ 1-2).

### 3-5. ПЛОСКОЕ ДОЗВУКОВОЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ ГАЗА В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КАНАЛАХ

Рассматривая плоское или осесимметричное потенциальное движение газа по криволинейным траекториям, выберем в качестве независимых переменных расстояние вдоль линий тока ( $S$ ) и вдоль эквипотенциальных линий ( $n$ ) (рис. 3-13).

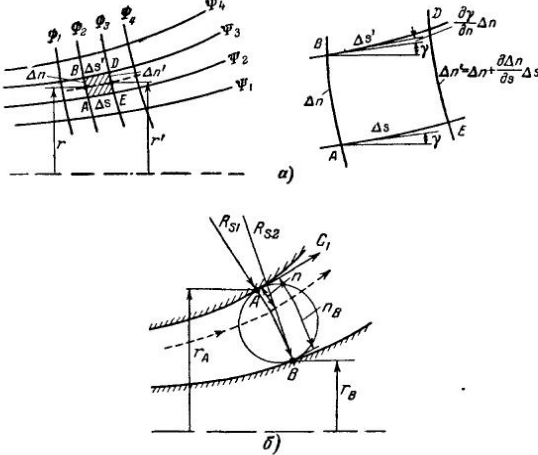


Рис. 3-13 К выводу уравнений движения в криволинейном канале.

Преобразуем уравнения неразрывности (1-14) и отсутствия вихрей [третье уравнение системы (3-1)] в новых координатах. Для элементарного объема, ограниченного в плоскости чертежа отрезками линий тока  $\Delta S$  и  $\Delta S'$ , и эквипотенциальных линий  $\Delta n$  и  $\Delta n'$  условие неразрывности запишется в такой форме:

$$\frac{\partial}{\partial S} (\rho c r \Delta n) = 0,$$

или

$$\frac{\partial \ln(\rho c r)}{\partial S} + \frac{1}{\Delta n} \cdot \frac{\partial \Delta n}{\partial S} = 0,$$

где  $r$  — радиус центра тяжести сечения  $\Delta n$  (рис. 3-13,а). Далее, так как

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial S} = \frac{\partial \gamma}{\partial n} \Delta n,$$

( $\gamma$  — угол наклона линии тока), представим уравнение неразрывности в такой форме:

$$\frac{\partial \ln(\rho c r)}{\partial S} + \frac{\partial \gamma}{\partial n} = 0. \quad (3-41)$$

Условие отсутствия вихрей будет (рис. 3-13):

$$\frac{\partial}{\partial n} (c \Delta S) = 0.$$

После дифференцирования получим:

$$\frac{\partial \ln c}{\partial n} + \frac{1}{\Delta S} \frac{\partial \Delta S}{\partial n} = 0.$$

Так как (рис. 3-13,а)

$$\frac{\partial \Delta S}{\partial n} = -\frac{\partial \gamma}{\partial S} \Delta S,$$

то окончательно находим:

$$\frac{\partial \ln c}{\partial n} - \frac{\partial \gamma}{\partial S} = 0. \quad (3-42)$$

Уравнения (3-41) и (3-42) справедливы для осесимметричных течений сжимаемой жидкости. Для плоских задач эти уравнения упрощаются и приводятся к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \ln(\rho c)}{\partial S} + \frac{\partial \gamma}{\partial n} &= 0; \\ \frac{\partial \ln c}{\partial n} - \frac{\partial \gamma}{\partial S} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3-41a)$$

Полученные уравнения позволяют наиболее простыми способами рассчитать течение газа в плоских или осесимметричных криволинейных каналах<sup>1</sup>. С этой целью необходимо найти распределение скоростей вдоль эквипотенциальных линий в канале.

<sup>1</sup> Излагаемая методика расчета потока в каналах разработана Г. С. Самойловичем и А. Н. Шерстюком.

Для приближенного определения длины эквипотенциальных линий в канал вписываются окружности (рис. 3-13,б), касающиеся стенок в точках  $A$  и  $B$ . Через точки касания проводится дуга окружности, нормальная к стенкам канала, которая приближенно дает длину эквипотенциальной линии.

Такой способ определения линий  $\Phi = \text{const}$  справедлив только при малой их кривизне.

Уравнения неразрывности (3-41) и (3-41а) показывают характер изменения угла наклона вектора скорости в поперечном сечении канала, а уравнение отсутствия вихрей позволяет сформулировать условие, которому должна удовлетворять энтальпия скоростей на любой линии тока, в том числе и на стенках канала:

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial c}{\partial n} = \frac{\partial \gamma}{\partial S} = K.$$

Для нахождения распределения скоростей вдоль линий  $\Phi = \text{const}$  воспользуемся уравнением (3-42), заменив

$$\frac{\partial \gamma}{\partial S} = -\frac{1}{R_S},$$

где  $\frac{1}{R_S}$  — кривизна линий тока.

Тогда

$$\frac{\partial c}{\partial n} = -\frac{c}{R_S}.$$

Умножим обе части этого выражения на трехчлен  $R_{S1} + n + Kn^2$  и прибавим к ним величину  $c \frac{\partial}{\partial n} (R_{S1} + n + Kn^2)$ .

После несложных преобразований найдем:

$$\frac{\partial}{\partial n} [c(R_{S1} + n + Kn^2)] = -c \left( \frac{R_{S1} + n + Kn^2}{R_S} - 1 - 2Kn \right).$$

Левая часть этого выражения обращается в нуль при  $n = 0$ ; постоянную  $K$  можно выбрать таким образом, чтобы производная

$$\frac{\partial}{\partial n} [c(R_{S1} + n + Kn^2)]$$

была равна нулю и при  $R_{S1} = R_{S2}$  (рис. 3-13,б). В этом случае она мало отличается от нуля и во всех точках линий  $\Phi = \text{const}$ . Это условие означает, что закон изменения скоростей вдоль линии  $\Phi = \text{const}$  будет:

$$c(R_{S1} + n + Kn^2) = \text{const},$$

или

$$\frac{c}{c_1} = \frac{1}{1 + \bar{n} - K_1 \bar{n}^2}, \quad (3-43)$$

где

$$K_1 = \frac{\alpha - 1}{2\bar{R}_{S2} - \bar{n}_B}; \quad \bar{n} = \frac{n}{R_{S1}}; \quad \bar{R}_{S2} = \frac{R_{S2}}{R_{S1}}; \quad \alpha = \frac{\bar{R}_{S2} - 1}{\bar{n}_B}.$$

Изменение скоростей вдоль границ канала устанавливается с помощью формулы (3-43), справедливой и для сжимаемой жидкости. Исходным служит условие постоянства расхода через канал.

При малых числах  $M < 0,4$ , когда влиянием сжимаемости можно пренебречь, объемный расход жидкости через плоский канал будет:

$$Q = \int_0^{n_B} c dn.$$

С помощью формулы (3-43) после интегрирования получим:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{Q}{c_1 n_B} = \frac{c_m}{c_1} = \\ &= \frac{1}{n_B} \frac{1}{\sqrt{1 + 4K_1}} \ln \frac{1 - 2K_1 \bar{n}_B / (1 - \sqrt{1 + 4K_1})}{1 - 2K_1 \bar{n}_B / (1 + \sqrt{1 + 4K_1})}. \end{aligned} \quad (3-44)$$

Здесь  $c_m$  — средняя скорость в сечении канала;  $c_1$  — скорость в точке на выпуклой стенке.

Для удобства расчетов на рис. 3-14 представлен график зависимости  $\delta = f(\bar{n}_B, \alpha)$ , выражаемой формулой (3-44).

В случае осесимметричного канала объемный расход жидкости определяется по формуле

$$Q = 2\pi \int_0^{n_B} R_S c dn.$$

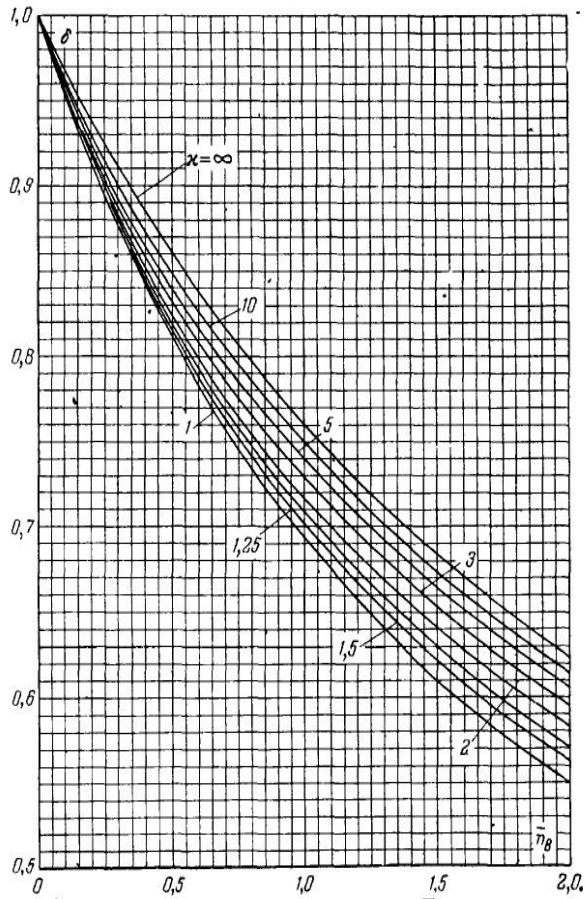


Рис. 3-14. График зависимости  $\delta$  от  $\bar{n}_B$  и  $\kappa$ .

Упрощая решение задачи, можно принять линейную связь между  $R_S$  и  $n$ :

$$R_S \approx R_{S1} + \frac{n}{n_B} (R_{S2} - R_{S1}).$$

По аналогии с формулой (3-44) можно получить<sup>1</sup>:

$$\delta_0 = \frac{Q}{2\pi R_{S1} c n_B} = \delta - K_2 Z. \quad (3-45)$$

<sup>1</sup> Формулы (3-44) и (3-45) справедливы в том случае, когда внутренняя и наружная стенки канала имеют кривизну одного знака,

$$K_2 = 1 - \frac{R_{S2}}{R_{S1}}; \quad Z = \frac{1}{2K_1 \bar{n}_B} \left( \delta - \frac{1}{n_B} \ln \frac{c_1}{c_2} \right).$$

Расчет осесимметричных каналов существенно упрощается применением графиков, представленных на рис. 3-15.

Приведенные выше формулы (3-44) и (3-45) справедливы для малых чисел  $M$  (несжимаемой жидкости). Однако закон распределения скоростей, выражаемый формулой (3-43), может быть принят и для сжимаемой жидкости в такой же форме:

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{1}{1 + \bar{n} - K_1 \bar{n}^2}. \quad (3-43a)$$

Слабое влияние сжимаемости на эпюру скоростей в поперечном сечении объясняется тем, что условие безвихревого движения, использованное для получения (3-43), не содержит плотности.

Заметное изменение кривизны линий тока и закона распределения скоростей в поперечном сечении отмечается только при больших безразмерных скоростях и значитель-

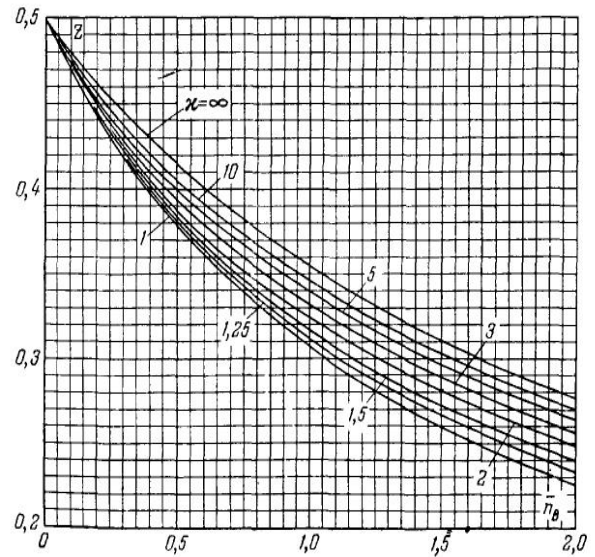


Рис. 3-15. График зависимости  $z$  от  $\bar{n}_B$  и  $\kappa$ .

ных градиентах скоростей вдоль канала. В широком диапазоне дозвуковых скоростей ( $M \leq M_*$ ) расчет канала с учетом сжимаемости может быть произведен путем введения средней плотности в данном сечении. На основании метода малых возмущений А. Н. Шерстюком было показано, что средний приведенный расход в сечении, равный:

$$q_m = \frac{G}{G_*},$$

где  $G$  — весовой и  $G_*$  — критический расходы газа через данное сечение, связан со средними скоростью и плотностью соотношением

$$q_m = \frac{\rho_m}{\rho_*} \lambda_m$$

( $\rho_m$ ,  $\lambda_m$  — средние для сечения плотность и безразмерная скорость). Средняя плотность  $\rho_m = q_m \rho_* \frac{1}{\lambda_m}$  легко может быть определена по  $q_m$  с помощью таблиц газодинамических функций. Скорости с учетом сжимаемости могут определяться по простой формуле:  $\frac{\lambda}{\lambda_m} = \frac{c}{c_m}$  ( $c$  и  $c_m$  — скорости, определенные без учета сжимаемости).

Метод, изложенный выше, пригоден для расчета различных каналов, например, каналов решеток<sup>1</sup> турбомашин.