Тема. Логические основы работы ЭВМ.

1

1 Основные понятия математической логики и алгебры логики.

[ ]:

Основоположник математической логики – немецкий математик Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716 гг.).

Лейбниц занимался исследованиями философской концепции единства и борьбы противоположностей.

В данной концепции мироздание представляется в виде непрерывного взаимодействия двух начал:

- „черного" и „белого";
- „мужского" и „женского";
- „добра" и „зла";
- и др.

Увлечение данной концепцией подталкнуло Лейбница к идее представления данных в двоичном виде (т.е. с помощью нулей и единиц). При этом под данными подразумеваются не только числа, но и некоторые умозаключения.

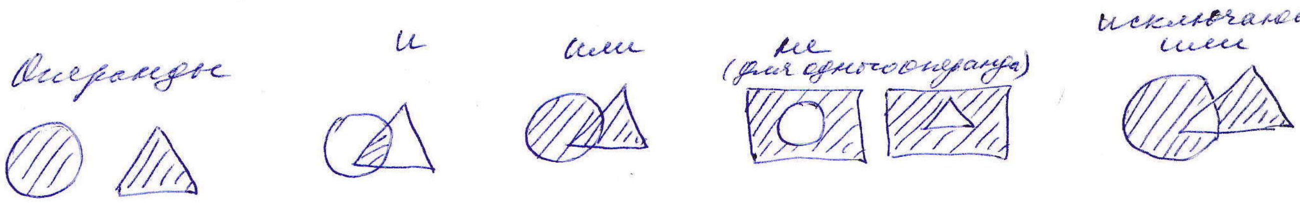
К представленным таким образом данным Лейбниц попытался применить математические методы, и сделал попытку построить универсальный язык, с помощью которого споры между людьми можно было бы разрешать посредством вычислений.

Развил идеи Лейбница английский математик первой половины XIX века Джордж Буль.

Джордж Буль ввел в логике систему формальных обозначений и правил, близкую к математической.

Впоследствии эту систему назвали алгеброй логики (логической алгеброй) или булевой алгеброй (в честь Д. Буля). В отличие от обычной алгебры алгебра логики оперирует не числами, а высказываниями.

Основные операции логической алгебры



Лек 3

Опр. **Высказывание** — это любое утверждение, относительно которого можно сказать истинно оно или ложно, (т.е. соответствует оно действительности или нет.) Таким образом, по своей сути высказывания фактически являются двоичными объектами и поэтому часто истинному значению высказывания ставят в соответствие 1, а ложному — 0. Например, запись А = 1 означает, что высказывание А истинно.

Примеры.

Высказывания могут быть простыми и сложными. Простые соответствуют алгебраическим переменным, а сложные являются аналогом алгебраических функций. Функции могут получаться путем объединения переменных с помощью логических действий (лог. операц.)

Логические операции → унарные (один операнд)
→ бинарные (два операнда)

Самой простой логической операцией является операция НЕ (по-другому ее часто называют отрицанием, дополнением или инверсией и обозначают NOT X) или $\overline{X}$. Результат отрицания всегда противоположен значению аргумента.

Логическая операция НЕ является унарной, т.е. имеет всего один операнд. В отличие от нее, операции И (AND) и ИЛИ (OR) являются бинарными, так как представляют собой результаты действий над двумя логическими величинами.

2) Логическое И еще часто называют конъюнкцией, или логическим умножением (не правда ли, таблица для этой операции похожа как две капли воды на двоичную таблицу умножения?), а ИЛИ — дизъюнкцией, или логическим сложением.

1) Операция И имеет результат «истина» только в том случае, если оба ее операнда истинны. Например, рассмотрим высказывание «Для установки ОС Windows 95 требуется процессор не ниже 80386 и не менее 4 Мбайт оперативной памяти». Из него следует, что установка будет успешной только при одновременном выполнении обоих условий: даже если у вас в машине Pentium, но мало ОЗУ (равно как и при 8 Мбайт ОЗУ процессор 80286), Windows 95 работать откажется.

Обозначения:
$X1 \text{ И } X2 = X1 \wedge X2 =$
$= X1 \text{ and } X2 =$
$= X1 \,\&\, X2$

Операция ИЛИ «менее привередлива» к исходным данным. Она дает «истину», если значение «истина» имеет хотя бы один из операндов. Разумеется, в случае, когда справедливы оба аргумента одновременно, результат по-прежнему истинный. Действительно, когда студентка просит друга подарить ей на день рождения букет цветов или пригласить в кафе, можно без опасений сделать и то, и другое одновременно (впрочем, на практике в таком случае можно ограничиться чем-то одним).

Названия: дизъюнкция; логическое сложение.

Обозначения:
$X1 \text{ ИЛИ } X2 =$
$= X1 \vee X2 =$
$= X1 \text{ OR } X2$

Логические значения операции дизъюнкции описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Пример. Обозначим высказывание «В треугольнике DFE угол D острый» как x, а высказывание «В треугольнике DFE угол E острый» как y. Тогда дизъюнкция $x \vee y$ этих высказываний «В треугольнике DFE угол D или угол E острый» истинна, так как обязательно истинно хотя бы одно из высказываний.

В повседневной речи союз «или» употребляется в различном смысле: исключающем и не исключающем. В алгебре логики союз «или» всегда употребляется в не исключающем смысле.

Из определения операции дизъюнкции и отрицания ясно, что высказывание $x \vee \bar{x}$ всегда истинно.

Операция *импликации* высказываний x и y обозначается символом $\supset$, а выражение $x \supset y$ читается как «если x, то y». Высказывание x называют условием, или посылкой, высказывание y — следствием, или заключением, а высказывание $x \supset y$ — следованием, или импликацией.

Импликация двух высказываний, x и y, — это новое высказывание, которое считается ложным, если x истинно, а y ложно, и истинным во всех остальных случаях.

Логические значения операции импликации описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \supset y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Пример. Обозначив высказывание «Число 12 делится на 6» как x, а высказывание «Число 12 делится на 3» как y, мы получим импликацию $x \supset y$, которая отражает высказывание «Если число 12 делится на 6, то оно делится на 3» и является истинным.

Употребление слов «если..., то...» в алгебре логики отличается от употребления их в обыденной речи, где мы, как правило, считаем, что если высказывание x ложно, то высказывание «Если x, то y» не имеет смысла. Кроме того, строя предложение

ния x. Употребление слов «если..., то...» в математической логике не требует этого, поскольку в ней смысл высказываний не рассматривается.

Операция *эквивалентности* высказываний x и y обозначается символом $\leftrightarrow$, а выражение $x \leftrightarrow y$ читается «для того чтобы x, необходимо и достаточно, чтобы y» или «x тогда и только тогда, когда y». Высказывания x и y называются членами эквивалентности.

Эквивалентность двух высказываний, x и y, — это новое высказывание, которое считается истинным, когда оба высказывания (x и y) либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложным во всех остальных случаях.

Логические значения операции эквивалентности описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \leftrightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Пример. Обозначив высказывание «Треугольник SPQ с вершиной S и основанием PQ равнобедренный» как x, а высказывание «В треугольнике SPQ с вершиной S и основанием PQ $\angle P = \angle Q$» как y, мы можем записать высказывание «Треугольник SPQ с вершиной S и основанием PQ равнобедренный тогда и только тогда, когда $\angle P = \angle Q$» в форме эквивалентности $x \leftrightarrow y$. Эквивалентность является истинной, так как высказывания либо одновременно истинны, либо одновременно ложны.

Эквивалентность играет важную роль в математических доказательствах. Известно, что значительное количество теорем формулируется в форме необходимых и достаточных условий, то есть в форме эквивалентности. В этом случае, зная об истинности или ложности одного из двух членов эквивалентности и доказав истинность самой эквивалентности, мы приходим к заключению об истинности или ложности второго члена эквивалентности.

4.2. Алгебра логики

4.2.1. Понятие формулы алгебры логики

С помощью логических операций над высказываниями можно строить сложные высказывания. При этом порядок выполнения операций определяется скобками. Например, из трех высказываний, x, y, z, можно построить два высказывания:

$$(x \wedge y) \vee \bar{z} \quad \text{и} \quad x \supset \overline{(y \vee (x \wedge z))}.$$

Лек (4)

Операции „И", „Или", „Не" образуют полную систему логических операций, с помощью которой можно построить ~~сколь угодно~~ любые сложные логические выражения.

Однако в вычислительной технике часто используют дополнительные логические операции

Операция „исключающее или" XOR

операция XOR фактически срабатывает на совпадение два двоичных (разряда) числа. Если числа совпадают, то результатом операции XOR является 0, если нет, то 1.

Операция „И-не" изменяет значения операции „И" на противоположные.

Операция „Или-не" изменяет значения операции „или" на противоположные.

Приоритет операций при вычислении значения логического выражения следующий (в порядке понижения):

1) отрицание (NOT, НЕ);
2) конъюнкция (AND, И);
3) дизъюнкция и исключающее ИЛИ (OR, ИЛИ; XOR, ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ);
4) операции отношения (равно, не равно, больше, меньше, больше или равно, меньше или равно), импликации

Если существует необходимость изменения порядка вычисления значения выражения, надо использовать круглые скобки. Чаще всего это применяется к операциям отношения, поскольку они имеют самый низкий приоритет, а их чаще всего необходимо вычислить в первую очередь.

Например, вычислим значение выражения $(a \leq b)$ OR $(c \neq b)$ при $a=2$, $b=3$, $c=3$:

1) $2 \leq 3 \rightarrow$ TRUE;
2) $3 \neq 3 \rightarrow$ FALSE;
3) TRUE OR FALSE $\rightarrow$ TRUE.

Опр.

Лек 5

Результаты логических операций представляют обычно в таблицах истинности.

В таблицах истинности ~~указывают~~ приводятся все возможные комбинации значений логических переменных (обычно двух X и Y) и соответствующие им результаты логических операций.

Таблица

~~Основные логические операции~~

X	NOT X
0	1
1	0

Таблица истинности основных логических операций

$X1$	$X2$	$X1 \wedge X2$ (И)	$X1 \vee X2$ (ИЛИ)	$\overline{X1 \wedge X2}$ (И-НЕ)	$\overline{X1 \vee X2}$ (ИЛИ-НЕ)	X1 XOR X2
0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0

+ импликация

+ эквивалентность