

2. СИСТЕМЫ СВЯЗИ С ОТКАЗАМИ

2.1. Постановка задачи. Математическая модель системы

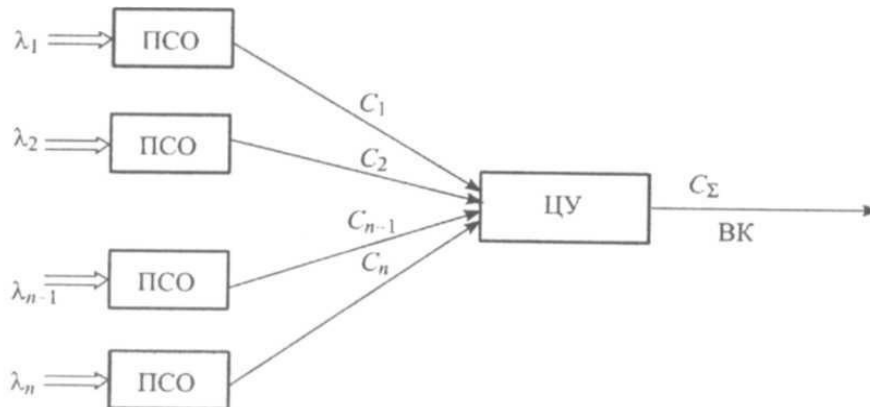


Рис. 2.1 Терминальная сеть с радиальной структурой.

Сформулируем задачу так, как она поставлена в [1-3]. Пусть имеется сеть радиальной структуры (рис. 2.1), в которой к центральному устройству (ЦУ) с конечной пропускной способностью выходного канала (ВК) подключены n периферийных систем обслуживания (ПСО) (терминалы). На входы ПСО поступают потоки сообщений, не допускающих задержки (режим передачи в реальном времени), т. е. каждая ПСО представляет собой систему обслуживания без памяти. Поскольку суммарная пропускная способность В К ограничена, то пропускные способности радиальных линий (трактов) также ограничены. В общей постановке будем считать, что тракт содержит определенное количество k_j - каналов связи. Тогда с учетом статистической природы входящих потоков ПСО может рассматриваться как k_j -канальная система с отказами. Будем считать, что пропускная способность ВК (C_{Σ}) и пропускные способности радиальных каналов (C_j) связаны между собой таким линейным соотношением:

$$C_{\Sigma} = \sum_{j=1}^n k_j C_{jj} \quad (2.1)$$

Может быть сформулирована следующая задача: при заданных структуре сети, характеристиках входящих потоков сообщений и пропускной способности выходного канала определить такие значения пропускных способностей каналов, выходящих из ПСО, при которых обеспечиваются минимальные потери сообщений или максимальное значение вероятности безотказной работы сети. Эквивалентом этой вербальной постановки служит следующая математическая модель.

Структура сети характеризуется прежде всего своей радиальностью, находящей отражение в соотношении (2.1). Параметрами структуры являются значения n - количества трактов и k_j - количества каналов в каждом тракте. В общем случае значения k_j для различных трактов отличаются друг от друга (т. е. задаются вектором $\{k_j\}$, $j = 1, n$).

Будем предполагать все входящие потоки пуассоновскими с интенсивностью поступления сообщений λ_j и средней длиной сообщения l_j , а время обслуживания сообщений - распределенным экспоненциально с параметром

$$\mu_j = \frac{c_j}{l_j} \quad (2.2)$$

Тогда ПСО с трактом из k каналов представляет собой систему массового обслуживания типа $M/M/k$. Вероятность отказа в обслуживании у такой системы определяется классической В-формулой Эрланга

$$P_{отк,j} = \frac{C_j}{C_j} = \frac{\rho_j^k}{k!} \frac{k!}{\rho_j^k} \frac{1}{\sum_{i=0}^k \frac{\rho_j^i}{i!}} \quad (2.3)$$

где

$$\rho_j = \frac{\lambda_j}{\mu_j} = \frac{\lambda_j l_j}{c_j} = \frac{u_j}{c_j}, \quad (2.4)$$

Критерий эффективности сети в целом определяется тем, к какому классу (массового или уникального назначения [4]) она относится. Выбирая в качестве критериев среднесетевые характеристики, приходим к следующим оптимизационным задачам.

Задача 2.1 (оптимизации системы массового назначения)

$$P_{отк} C = \min_{C_j} \sum_{j=1}^n \lambda_j P_{отк,j} C_j, \quad (2.5)$$

$$\sum_{j=1}^{n_j} k_j C_j \leq C_{\Sigma}, \quad (2.6)$$

$$C_j \geq 0, j = \overline{1, n}. \quad (2.7)$$

Задача 2.2 (оптимизации системы уникального назначения)

$$W C = \max_{\{C_j\}} \sum_{j=1}^n \lambda_j \ln[1 - P_{отк,j}(C_j)], \quad (2.8)$$

$$\sum_{j=1}^n k_j C_j \leq C_{\Sigma}. \quad (2.9)$$

Принципиальным является отсутствие в формулировке задачи 2.2 условий $C_j \geq 0$. Как и в задаче, которая рассматривалась Л. Клейнроком для системы связи с ожиданием [5], целевая функция (2.8) в точках $C_j = 0$ разрывна. Действительно, как следует из выражений (2.3) и (2.4), при $C_j \rightarrow 0$ имеет место $P_{отк,j} \rightarrow 1$ и, следовательно, $W C \rightarrow -\infty$. Поэтому целевая функция сама по себе, без дополнительных ограничений или условий не допускает обращения величин C_j в нуль, т. е. условия типа (2.7) являются в данном случае излишними, в оптимальном решении все компоненты C_j строго больше нуля.

Отметим в заключение, что задачи типа 2.1 или 2.2 и им подобные могут возникать и в других ситуациях, например, при проектировании терминальных участков цифровых сетей интегрального обслуживания (ЦСИО), в которых на входы ПСО поступают цифровые потоки, передаваемые в реальном масштабе времени. В качестве центрального устройства в этом случае может быть использован мультиплексор, выходной канал которого подключается к узлу более высокой ступени иерархии сети. Сюда же можно отнести задачи оптимального распределения пропускных способностей каналов в базовых сетях ЦСИО, например, между магистральными каналами, к которым подключены центры коммутации каналов, являющиеся многолинейными системами массового обслуживания.

2.2. Одноканальные тракты. Метод решения оптимизационной задачи

2.2.1. Некорректность известных методов

Рассмотрим метод решения задачи 2.1 для одноканальных трактов ($k_j = 1$). Выражения (2.3) для $P_{0TK,j}$ и (2.5) для общесетевого критерия эффективности в этом случае существенно упрощаются:

$$P_{0TK,j} C_j = \frac{\rho_j}{1 + \rho_j} = \frac{u_j}{C_j + u_j}, \quad (2.10)$$

$$P_{0TK} C = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j u_j}{C_j + u_j}, \quad (2.11)$$

где $u_j = \lambda_j l_j > 0$.

Задача 2.1 трансформируется следующим образом.

Задача 2.1а. Найти совокупность таких значений пропускных способностей каналов $C = \{C_j\}$, при которых целевая функция (2.10) достигает минимума, а компоненты C_j удовлетворяют условиям (2.7) и (2.12):

$$\sum_{j=1}^n C_j \leq C_{\Sigma}. \quad (2.12)$$

Покажем, что целевая функция (2) является выпуклой. Действительно, каждая из функций $P_{отк,j}$ выпукла, поскольку:

$$\frac{d^2 P_{отк,j}(C_j)}{dC_j^2} = \frac{2u_j}{(C_j + u_j)^3} > 0,$$

а $P_{отк}(C)$ выпукла, как сумма выпуклых функций [6]. Поскольку, кроме того ограничения (2.7) и (2.12) задают выпуклую область (симплекс), то по теореме Куна и Таккера [7] оптимальное решение единственно и для оптимальности вектора $\{C_j\}$ необходимо и достаточно существования такого числа ψ , что производные от функции Лагранжа

$$\Phi(C, \Psi) = P_{отк}(C) + \Psi \left(\sum_{j=1}^n C_j - C_{\Sigma} \right) \quad (2.13)$$

удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial C_j} &\geq 0, C_j = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C_j} \leq 0, \quad \sum_{j=1}^n C_j = C_{\Sigma}, \\ \overline{\frac{\partial \Phi}{\partial C_j}} &= 0, C_j > 0, \quad \overline{\frac{\partial \Phi}{\partial C_j}} = 0, \quad \sum_{j=1}^n C_j < C_{\Sigma} \end{aligned} \quad (2.14)$$

т. е. исходная задача минимизации $P_{отк}(C)$ в области (2.7) и (2.12) эквивалентна задаче определения седловой точки функции (2.13) при условиях (2.7), (2.12) и $\psi \geq 0$.

Отметим, что в упоминавшихся выше работах [1-3] вместо условий (2.7) декларируются, но фактически никак математически не учитываются более жесткие условия

$$C_j > 0, j = \overline{1, n}. \quad (2.15)$$

Больше того, при отыскании решения без каких бы то ни было обоснований, априорно допускается, что условия (2.15) всегда выполняются - независимо от параметров трафика и значения выделенного суммарного ресурса C_{Σ} соответствии с этим допущением условия оптимальности (2.14) используются в редуцированном виде, а именно: все производные $\partial \Phi / \partial C_j$ приравниваются нулю. Это дает:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C_j} = \frac{\lambda_j u_j}{(C_j + u_j)^2} - \Psi = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.16)$$

Отсюда

$$C_j = \frac{1}{\Psi} \lambda_j u_j - u_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.17)$$

Значение неопределенного множителя Лагранжа ψ находится из требования удовлетворения ограничения (2.12), что дает

$$\frac{1}{\Psi} = \frac{C_{\Sigma} + U}{E}, \quad (2.18)$$

где

$$U = \sum_{j=1}^n u_j, \quad E = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j. \quad (2.19)$$

Следовательно, решение предлагается вычислять по соотношению

$$C_j = \frac{C_{\Sigma} + U}{\lambda_j u_j} - u_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.20)$$

Подставляя эти значения в выражение для критерия эффективности (2.11) (с восстановлением опущенного ранее множителя $1/\lambda_{\Sigma}$), получаем зависимость между минимально достижимой среднесетевой вероятностью отказа $P_{\text{отк},0}$ и выделенным ресурсом C_{Σ} :

$$P_{\text{отк},0} C_{\Sigma} = \frac{E^2}{\lambda_{\Sigma} (C_{\Sigma} + U)}. \quad (2.21)$$

Зависимости типа (12) в целом характеризуют систему и позволяют непосредственно связать выделяемый ресурс с максимальной эффективностью системы. Как уже отмечалось, эти функции известны как зависимости «ресурс - эффективность» (РЭФ) [4] и очень важны при оптимизации (сбалансировании) состава больших систем, в которые данная система входит в качестве одного из компонентов. В процессе сбалансирования большой системы

ресурс C_Σ , выделяемый на развитие данной подсистемы, может варьироваться в широком диапазоне значений, включая малые или даже нулевые величины. Это означает, что (2.21) должно быть справедливо при любых значениях C_Σ . Только при этом можно рассчитывать на объективное распределение ресурсов между подсистемами. Покажем, что в силу некорректности решения (2.20) соотношение (2.21) в определенной области значений C_Σ завышает возможности системы.

Для оценки значения $P_{отк,0}(C_\Sigma)$, вычисляемого по (2.21), воспользуемся неравенством Коши - Буняковского. Применительно к нашим целям его можно записать в следующем виде:

$$E^2 = \sum_{j=1}^n \overline{\lambda_j u_j}^2 \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j \sum_{j=1}^n u_j = \lambda_\Sigma U. \quad (2.22)$$

Следовательно

$$P_{отк,0} C_\Sigma \leq \frac{U}{C_\Sigma + U}. \quad (2.23)$$

Заметим теперь, что равенство в условии (2.22) реализуется только в случае совпадения или линейной зависимости векторов λ и u . В общем же случае имеет место строгое неравенство, и вместо (2.23) получаем

$$P_{отк,0} C_\Sigma < \frac{U}{C_\Sigma + U}. \quad (2.24)$$

Отсюда следует, что при достаточно малых значениях ресурса C_Σ величина среднесетевой вероятности отказа будет строго меньше единицы, хотя она должна при этом быть практически равной единице:

$$\lim_{C_\Sigma \rightarrow \infty} P_{отк,0} C_\Sigma < \frac{U}{U} = 1.$$

Это означает, что в некоторой области значений C_Σ величина среднесетевой вероятности отказа занижается, т. е. возможности системы завышаются.

Как показывает анализ, причина данного парадокса в том, что существует определенный диапазон значений ресурса C_{Σ} , для которого отдельные значения C_j , вычисляемые по соотношению (2.20), отрицательны вопреки декларированному, но неиспользованному требованию (2.15), а также вопреки всякому физическому смыслу. Принципиальная трудность состоит в том, что при использовании редуцированных условий оптимальности невозможно теоретически, априорно определить указанный диапазон значений C_{Σ} и зависимость его размеров от параметров трафика. Это возможно только при использовании полных условий оптимальности.

Целесообразно подчеркнуть, что игнорирование полной формулировки теоремы Куна и Таккера и использование только ее части (приравнивание нулю всех производных от функции Лагранжа) восходит своими корнями к классической задаче условной оптимизации, которая решается методом неопределенных множителей Лагранжа. Как известно, в этой задаче считается допустимым любое решение, компоненты которого удовлетворяют заданной совокупности функциональных условий. Односторонние или двухсторонние ограничения на компоненты решения, равно как и функциональные ограничения в виде неравенств отсутствуют. Система уравнений, получающихся приравниванием нулю всех производных от функции Лагранжа, дает оптимальное решение классической задачи.

Следует упомянуть также об известной работе Л. Клейнрока [5], исследовавшего задачу выбора пропускных способностей системы связи с ожиданием при использовании в качестве критерия эффективности среднесетевого времени задержки сообщений. Несмотря на то, что эта задача является задачей математического программирования (из-за наличия условий $x_j \geq 0, j = 1, n$), оптимальное решение находится Л. Клейнроком так же, как и в

классике, приравниванием нулю всех производных от функции Лагранжа. Необходимо учитывать, однако, что, как показывает внимательный анализ, для задачи, рассматривавшейся Л. Клейнроком, такой подход не приводит к погрешностям. Дело в том, что на границе допустимых значений пропускных способностей, которая ни в коем случае не должна нарушаться, целевая функция терпит разрыв второго рода. Тем самым целевая функция как бы поглощает односторонние ограничения, поскольку не допускает достижения точек границы. Из структуры решения Л. Клейнрока, которое он называет «правилом квадратного корня», непосредственно вытекают аналитические выражения для граничного значения выделяемого ресурса и границ компонентов оптимального решения. Здесь априорно ясно, какому ограничению должно удовлетворять значение распределяемого ресурса пропускной способности C_{Σ} , чтобы компоненты решения не вышли на границу. Если такое ограничение выполняется, все стационарные точки, в том числе и точки экстремумов, являются внутренними. Во внутренних же стационарных точках производные от функции Лагранжа равняются нулю. Поэтому решение Л. Клейнрока сомнений не вызывает.

Некритическое распространение указанного подхода на общий случай неприемлемо. Для каждой конкретной оптимизационной задачи необходимо предварительное исследование корректности редуцированного подхода.

2.2.2. Метод получения оптимального решения

Для рассматриваемой задачи, как видно из выражения (2.11), формально допустимы граничные значения $C_j = 0$. При этом в соответствии с (2.10) вероятность отказа в j -м тракте стремится к единице, т. е. тракт практически не создается. Формального запрета таких ситуаций при данной постановке нет, поскольку целевая

функция (2.11) ориентирована на минимизацию *среднесетевого* результата. Частные эффекты P_{0TKj} могут быть при этом любыми, поскольку существенным признается только среднее значение вероятности отказа на сети. Это - характерная черта систем массового назначения, когда предполагается, что недостаточный эффект на одном из объектов распределения может быть скомпенсирован избыточным эффектом на другом. Впрочем, придание значения только среднему результату делает неопределенными понятия недостаточности или избыточности результата на отдельном объекте.

В связи с изложенным, представляется естественной следующая схема решения задачи. На первом этапе считаются допустимыми все значения компонентов решения, в том числе и граничные (как это, собственно, и предусмотрено в условиях (2.7), включающих знак равенства величин C_j нулю). Оптимальное решение находится из полных условий Куна и Таккера (2.14). На втором этапе по результатам анализа оптимального решения отыскивается граница области значений распределяемого ресурса, где допустимо считать $C_j > 0, j = 1, n$.

Из условий оптимальности (2.14) получаем

$$\begin{aligned} \lambda_j u_j &\leq \Psi, C_j = 0, \\ (C_j + u_j)^2 &= \Psi, C_j > 0, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Функция $\varphi_j(C_j) = \lambda_j u_j (C_j + u_j)^{-2}$ – убывающая, поскольку

$$\varphi_j'(C_j) = - \frac{2\lambda_j u_j}{(C_j + u_j)^3} < 0.$$

Поэтому

$$\varphi_j(0) = \max_{0 \leq C_j < \infty} \varphi_j(C_j) \quad (2.26)$$

Вследствие (2.25) условия (2.25) преобразуются к следующему виду:

$$\varphi_j(0) = \begin{cases} \leq \Psi, C_j = 0, \\ = \Psi, C_j > 0, \end{cases} \quad (2.27)$$

$$v_j = \begin{cases} \leq \Psi, C_j = 0, \\ = \Psi, C_j > 0, \end{cases} \quad (2.28)$$

где

$$v_j = \frac{1}{l_j} \quad (2.29)$$

Соотношение (2.28) подсказывает стандартный путь решения задачи: построить вариационный ряд по невозрастанию (убыванию) величин v_j перенумеровать каналы в соответствии с расположением v_j в этом ряду

$$v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_n \quad (2.30)$$

(в соотношениях (2.30) используются новые номера каналов) и искать за тем интервал значений v_j , содержащий параметр ψ ,

$$v_r > \psi \geq v_{r+1} \quad (2.31)$$

При этом, как следует из (2.25) и (2.26),

$$C_j = \begin{cases} u_j \frac{\overline{v_j} - 1}{\overline{\Psi}}, j = \overline{1, r}, \\ 0, j = \overline{1+r, n} \end{cases} \quad (2.32)$$

Суммирование (2.32) по всем j с учетом условия (2.12) позволяет определить значение ψ

$$\frac{1}{\psi} = (C_\Sigma + U_{r1})/W_{r1}, \quad (2.33)$$

где

$$U_{r1} = \sum_{j=1}^r u_j, W_{r1} = \sum_{j=1}^r u_j v_j = \sum_{j=1}^r \lambda_j v_j = \sum_{j=1}^r \lambda_j l_j. \quad (2.34)$$

Далее, согласно соотношениям (2.31) v_r и v_{r+1} являются соответственно верхней и нижней оценками параметра ψ . Подставив в выражения (2.32) вместо ψ значения v_r и v_{r+1} , получим

соответственно нижнюю и верхнюю оценки C_j , Суммируя эти оценки, равно как и сами величины C_j по всем j , получаем соотношение для отыскания индекса r .

$$Y_{r1} < C_{\Sigma} \leq Y_{r+1,1}, \quad (2.35)$$

где

$$Y_{r1} = \sum_r W_{r1} - \min_j U_{r1}, \quad r = 1, n, \quad \overline{Y_{11}} = 0. \quad (2.36)$$

Величины Y_{r1} дают параметрический портрет семейства оптимальных решений задачи. Как вытекает из (2.35), при попадании ресурса C_j в диапазон $(Y_{r1} \ Y_{r+1,1}]$ независимо от его конкретного значения ресурс распределяется по первым r трактам, а последующие $n - r$ трактов фактически не создаются (из-за недостатка ресурса). Другими словами, по мере возрастания ресурса последовательно создаются первый, второй и последующие тракты, пока при

$$C_{\Sigma} > Y_{n1} \quad (2.37)$$

не окажется, что $r = n$, т.е. будут выполняться строгие неравенства (2.15).

Значение Y_{n1} , можно вычислить по формуле

$$Y_{n1} = \sum W_{r1} - \min_j U_{n1}$$

не производя предварительного упорядочения трактов в соответствии с рядом (2.30).

При выполнении условия (2.37) все $C_j > 0$ и полное решение (2.32) совпадает с редуцированным (2.17). Если же $C_{\Sigma} < Y_{n1}$, нужно пользоваться полным решением (2.32). Таким образом, параметр Y_{n1} и является искомой границей для значений распределяемого ресурса: в

области $[0, Y_{n1}]$ справедливы только полные решения, в области $[Y_{n1}, \infty)$ - и полные и редуцированные.

Важным является частный случай равенства всех величин ν_j : $\nu_j = \nu, j = \overline{1, n}$. При этом $W_{r1} = \sqrt{\nu} U_{r1}$ и соответственно $Y_{r1} = 0, r = \overline{1, n}$.

Следовательно, условие (2.37) выполняется всегда, при любом значении выделенного ресурса C_Σ . Но это означает, что зона некорректности редуцированного подхода $[0, Y_{n1}]$ стягивается в точку, т.е. практически исчезает. Редуцированный подход здесь справедлив при любом значении ресурса C_Σ .

Существенно упрощается в данном случае и выражение для компонентов оптимального решения:

$$C_j = C_{j01} = \frac{\lambda_j}{\lambda_\Sigma} C_\Sigma, j = \overline{1, n},$$

т.е., в терминологии Л.Клейнрока [5], решение задачи дается «пропорциональным набором пропускных способностей».

Зависимость РЭФ для полного решения выглядит следующим образом:

$$P_{отк,0}(C_\Sigma) = \begin{cases} \left[\frac{(C_\Sigma + U_\Sigma)^2}{W_{r1}^2} + \sum_{j=r+1}^n \lambda_j \right] / \lambda_\Sigma, Y_{r1} < C_\Sigma \leq Y_{r+1,1}, \\ \left[\lambda_\Sigma (C_\Sigma + U_\Sigma)^2 \right], Y_{r1} < C_\Sigma \end{cases} \quad (2.38)$$

Видно, что при $C_\Sigma \rightarrow 0$ имеет место $r = 0$, т.е. первый член в квадратных скобках верхней ветви (2.38) просто отсутствует и $P_{отк,0} \rightarrow 1$, как и должно быть.

Для рассмотренного выше частного случая $\nu_j = \nu, j = \overline{1, n}$ функция РЭФ выглядит, естественно, существенно проще, чем (2.38):

$$P_{отк,0}(C_\Sigma) = \lambda_\Sigma (\lambda_\Sigma + \nu C_\Sigma),$$

поскольку $U_{n1} = \lambda_\Sigma \nu$, а $W_{n1} = \nu U_{n1}$.

2.3.3. Возможные обобщения

Типичной является ситуация, когда в качестве ограничивающего ресурса выступает не суммарная пропускная способность C_Σ , а выделяемая на создание сети сумма ассигнований S_0 . Вместо (2.12) здесь нужно рассматривать ограничение

$$\sum_{j=1}^n s_j C_j \leq S_0 \quad (2.39)$$

где s_j — стоимость (создания и эксплуатации) единицы пропускной способности в j -м тракте (на j -м направлении связи).

Введением новых переменных

$$x_j = s_j C_j, j = \overline{1, n} \quad (2.40)$$

задача легко сводится к предыдущей.

Задача 2.16.

$$P_{отк}(X) = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j' \Rightarrow \min_{\{x_j\}}, \quad (2.41)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq S_0, \quad (2.42)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}, \quad (2.43)$$

где $u'_j = u_j s_j$

Поскольку задачи 2.1а и 2.1б с точностью до обозначений аналогичны, в качестве решения получаем:

$$C_j = \begin{cases} u_j (\sqrt{v_j/\psi} - 1), & j = \overline{1, r} \\ 0, & j = \overline{1+r, n} \end{cases}, \quad (2.44)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\psi}} = (S_0 + U_{r2})/W_{r2}, \quad (2.45)$$

$$U_{r2} = \sum_{j=1}^r s_j u_j, W_{r2} = \sum_{j=1}^r s_j u_j \sqrt{v_j}, \quad (2.46)$$

$$Y_{r2} < S_0 \leq Y_{r+1,2}, \quad (2.47)$$

$$Y_{r2} = W_{r2} / \sqrt{v_r} - U_{r2}, \quad (2.48)$$

$$v_j = \frac{1}{l_j s_j}, j = \overline{1, n}, \quad (2.49)$$

Другим важным обобщением задачи 2.1а является рассмотрение ситуации, когда накладывается ограничение на качество каналов, т. е. считается, что качество каналов не может быть хуже заданного:

$$P_{\text{отк},j} = \frac{u_j}{C_j + u_j} \leq P_{j0}, j = \overline{1, n}. \quad (2.50)$$

Значения P_{j0} ограничивают (сверху) вероятности отказов в каналах и задаются обычно в пределах 0,7-0,9. Преобразуя (2.50), получаем ограничения, которым должны удовлетворять пропускные способности каналов,

$$C_j \geq C_{0j}, j = \overline{1, n}, \quad (2.51)$$

где

$$C_{0j} = u_j \frac{1}{P_{j0}} - 1. \quad (2.52)$$

Введем новые переменные

$$x_j = s_j(C_j - C_{0j}) \quad (2.53)$$

При этом вместо исходной получаем следующую задачу.

Задача 2.3

$$P_{отк} \quad X = \min_{j=1, \dots, n} \lambda_j u'_j \Rightarrow \min_{\{x_j\}}, \quad (2.54)$$

$$x_j \leq S_{01}, \quad S_{01} = S_0 - \sum_{j=1}^n s_j C_{0j}, \quad (2.55)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.56)$$

где

$$u'_j = u_j s_j, \quad u'_j = f_j = s_j u_j + C_{0j}. \quad (2.57)$$

Проводя стандартные выкладки, вместо (2.44)-(2.49) получаем следующие соотношения для отыскания решения:

$$x_j = \begin{cases} f_j \frac{\bar{v}_{1j} - 1}{\bar{\psi}}, & j = 1, \dots, r, \\ 0, & j = 1 + r, \dots, n \end{cases} \quad (2.58)$$

$$\frac{1}{\bar{\psi}} = \frac{S_{01} + F_{r1}}{F_{r2}} \quad (2.59)$$

$$F_{r1} = \sum_{j=1}^r f_j, \quad F_{r2} = \sum_{j=1}^r f_j v_{1j}, \quad (2.60)$$

$$Z_r < S_{01} \leq Z_{r+1}, \quad (2.61)$$

$$Z = \frac{F_{r2}}{v_{1r}} - F_{r1}, \quad (2.62)$$

$$v_{1j} = \frac{l_j u'_j}{f_j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.63)$$

Учитывая, что переменные x_j связаны с C_j соотношениями (2.53), окончательно получаем

$$C_j = \begin{cases} (u_j + C_j) \frac{v_j - 1}{\bar{\psi}}, & j = 1, \dots, r, \\ C_{0j}, & j = 1 + r, \dots, n \end{cases} \quad (2.64)$$

2.3. Алгоритм

Рассматривается алгоритм решения задачи 2.16, как более общей. Соотношения для задачи 2.1а получаются из (2.44)-(2.49), если положить $s_j = 1, j = 1, \dots, n$ и $S_0 = C_\Sigma$.

Алгоритм может быть следующим.

Алгоритм 2.1

1. Ввести исходные данные: скаляры S_0 и n ; векторы $s_j, l_j, \lambda_j, j = 1, 2, \dots, n$. Значение n – целое, остальные величины – вещественные числа, большие нуля.

2. Вычислить значения

$$v_j = \frac{1}{s_j l_j}, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.65)$$

$$v = \min_j v_j. \quad (2.66)$$

3. Вычислить Y_{n1} по формуле:

$$Y_{n1} = \frac{W_{n1}}{v} - U_{n1}, \quad (2.67)$$

где

$$W_{n1} = \sum_{j=1}^n s_j u_j \overline{v_j}, \quad (2.68)$$

$$U_{n1} = \sum_{j=1}^n s_j u_j, \quad (2.69)$$

$$u_j = \lambda_j v_j. \quad (2.70)$$

4. Сравнить Y_{n1} с величиной S_0 . Если $S_0 \leq Y_{n1}$, перейти к п. 5, в противном случае - к п. 17.

5. Положить $\eta := 1$.

6. Положить $\tau_j := v_j, j = 1, 2, \dots, n$.

7. Найти $\tau_\rho = \min_{\eta \leq j \leq n} \tau_j$ и зафиксировать значение индекса ρ .

8. Положить

$$f_\eta = \rho; \quad (2.71)$$

$$a := \tau_\eta; \tau_\eta := \tau_\rho; \tau_\rho = a; \quad (2.72)$$

$$b_\eta := s_\rho; g_\eta := \lambda_\rho l_\rho; \quad (2.73)$$

В массиве $\{\tau_j\}$ строится вариационный ряд (2.30); в массивах $\{b_j\}$ и $\{g_j\}$ - упорядоченные в соответствии с расположением величин v_j в вариационном ряду (2.30) значения соответственно s_j и $u_j = \lambda_j l_j$. В массиве $\{f_j\}$ содержатся старые номера каналов связи.

9. Положить $\eta := \eta + 1$.

10. Проверить выполнение условия $\eta \leq n$. Если условие выполняется, то перейти к п. 7; если нет - к п. 11.

11. Вычислить и отпечатать величины

$$Y_{j1} = \frac{W_{j1}}{\tau_j} - U_{j1}, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.74)$$

где

$$W_{j1} = \sum_{\varphi=1}^j s_{\varphi} g_{\varphi} \tau_{\varphi}, \quad U_{n1} = \sum_{\varphi=1}^n b_{\varphi} g_{\varphi}, \quad (2.75)$$

12. Положить $r := 1$.

13. Сравнить S_0 с $Y_{r+1,1}$. Если $S_0 \leq Y_{r+1,1}$, то перейти к п. 15, если нет - к п. 14.

14. Положить $r := r + 1$ и перейти к п. 13.

15. Вычислить значения компонентов оптимального решения по формулам

$$Y_j = \begin{cases} g_j \frac{\tau/\Psi - 1}{0}, & j = 1, 2, \dots, r, \\ 0, & j = r + 1, r + 2, \dots, n, \end{cases} \quad (2.76)$$

где

$$\frac{1}{\Psi} = \frac{S_0 + U_{r1}}{W_{r1}}, \quad U_{r1} = \sum_{\varphi=1}^r b_{\varphi} g_{\varphi},$$

$$W_{r1} = \sum_{\varphi=1}^r b_{\varphi} g_{\varphi} \tau_{\varphi},$$

16. Положить

$$C_{f_j} = y_j, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.77)$$

(переход к исходной нумерации каналов).

Перейти к п.18.

17. Вычислить значения компонентов оптимального решения по формулам

$$C_j = u_j \left(\frac{\bar{v}_j}{\bar{\psi}} - 1 \right), j = 1, 2, \dots, n \quad (2.78)$$

где

$$\frac{1}{\bar{\psi}} = \frac{S_0 + U_{n1}}{W_{n1}}, U_{n1} = \sum_{\varphi=1}^r s_{\varphi} u_{\varphi},$$

$$W_{r1} = \sum_{\varphi=1}^n b_{\varphi} g_{\varphi} \bar{\tau}_{\varphi},$$

18. Отпечатать значения компонентов оптимального решения $C_j, j = 1, 2, \dots, n$ и среднесетевой вероятности отказа $P_{\text{отк},0}$, зависящей от величин C_j и вычисляемой по формуле (2.11) с добавлением сомножителя $1/\lambda_{\Sigma}$.

19. Закончить вычисления.

2.4. Многоканальные тракты

Дальнейшие обобщения связаны с рассмотрением многоканальных трактов. При этом, во-первых, кардинально усложняется выражение для функции эффективности, поскольку вероятность отказа в j -м тракте должна вычисляться по формуле (2.3). Во-вторых, более сложным становится соотношение для стоимости создания и эксплуатации тракта. Будем предполагать, что справедливо следующее выражение:

$$S_j k_j, C_j = k_j s_j C_j^\alpha, \quad j \quad (2.79)$$

где α может отличаться от единицы как в меньшую, так и в большую сторону.

Тогда, выбирая в качестве критерия эффективности, как и ранее, среднесетевое значение вероятности отказа, а в качестве параметров управления составляющие векторов пропускных способностей $C = \{C_j\}$ и числа каналов в трактах $k = \{k_j\}$, приходим к следующей оптимизационной задаче.

Задача 2.4

$$P_{\text{отк}} k, C = \sum_{j=1}^n \lambda_j \prod_{i=0}^{k_j} \frac{p_j^i}{i!} \Rightarrow \min_{\{k, C\}}, \quad (2.80)$$

$$S k, C = \sum_{j=1}^n S_j k_j, C_j = \sum_{j=1}^n k_j s_j C_j^\alpha \leq S_0, \quad (2.81)$$

$$k_j = 1, 2, \dots, C_j \geq 0, j = 1, n. \quad (2.82)$$

Эффективные алгоритмы решения задачи 2.4 неизвестны. Трудности, подстерегающие здесь исследователя, очевидны. Прежде всего, это строгая целочисленность параметров k_j , определяющих количества членов рядов по j в выражении (2.80). Требование целочисленности значений k_j придает задаче комбинаторный

характер, что в общем случае ведет к резкому увеличению объема вычислений при отыскании решения.

В отличие от этого параметры C_j могут быть нецелочисленными и по отношению к ним можно было бы попытаться воспользоваться аппаратом основной теоремы математического программирования. Однако выражения для производных от целевой функции, да и от функции ограничения настолько сложны, что условия оптимальности оказываются практически неразрешимыми относительно C_j .

С такими трудностями обычно «справляется» метод динамического программирования [8, 9]. Сложность выражений для компонентов целевой функции $f_j(C_j)$ не является препятствием для его использования. Достаточно дискретизировать параметр C_j и вычислить таблицу значений $f_j(r\Delta C)$, $r = \overline{0, R}$, $j = \overline{1, n}$, $R = \frac{C_{\max}}{\Delta C}$. На последующих этапах сложность вычислений значений $f_j(r\Delta C)$ никак не скажется.

Однако здесь нас подстерегает другая существенная трудность, имеющая отношение непосредственно к методу динамического программирования. Это - наличие двух групп неизвестных $\{k_j\}$ и $\{C_j\}$, причем в неравенство (2.81) они входят в виде попарных произведений $k_j C_j$. Это эквивалентно повышению размерности задачи на порядок, в связи с чем попытки применения метода динамического программирования пока оказались безуспешными.

Реальным в настоящее время являются введение различного рода упрощающих предположений, рассмотрение частных случаев задачи 2.4. Важнейшим из подобных упрощений является отказ от одновременной оптимизации по двум группам параметров. Необходимо зафиксировать значения k_j , $j = \overline{1, n}$ и проводить оптимизацию только по величинам пропускных способностей C_j . Здесь метод динамического программирования оказывается

эффективным. Предварительно необходимо ввести новые переменные

$$y_j = k_j s_j c^{\alpha}, j = 1, n, \quad (2.83)$$

благодаря чему ограничение (2.81) примет обычный (и необходимый) для применения метода вид

$$\sum_{j=1}^n y_j \leq S_0, \quad (2.84)$$

и искать целочисленное по величинам j - решение. При этом выбор необходимой точности достигается исчислением ресурса S_0 в соответствующих единицах (например, в десятках, сотнях, тысячах или миллионах рублей). Заметим еще, что в новых переменных параметры и компоненты целевой функции выглядят так:

$$\rho_j = \lambda_j = \frac{u_j}{c_j} = \frac{\delta_j}{k_j}, \delta_j = u_j (k_j s_j)^{1/a}, \quad z_j = y_j^{1/a}, \quad (2.85)$$

$$f_j y_j = \lambda_j \rho_j^{k_j} \frac{c_j^{z_j}}{k_j^{z_j}} \rho_j^i = \lambda_j \delta_j^{k_j} \frac{k_j^{z_j}}{k_j^{z_j}} (i + s)^{k_j - i} z_j^{k_j - i} \delta_j^i. \quad (2.86)$$

Алгоритм решения задачи методом динамического программирования может быть следующим.

АЛГОРИТМ 2.2

1. Ввести исходные данные: скаляры n , S_0 и α , векторы λ_j , s_j и l_j , $k_j = 1, 2, \dots, n$. Значения, n , s_0 и, $k_j = 1, 2, \dots, n$ - целые, остальные величины - вещественные положительные числа.

2. Вычислить величины $\delta_j = \lambda_j l_j (k_j s_j)^{1/a}, j = 1, 2, \dots, n$.

3. Положить $u := 0$.

4. Положить $j := 1$. Вычислить величину $z = y^{1-\alpha}$.

5. Выполнить присвоения $a := \delta_j^{k_j}, S := a; B := \lambda_j a; i := 0$.

6. Выполнить присвоения $a := k_j - i \frac{z_j}{\delta_j} a; S := S + a; i := i + 1;$

7. Проверить выполнение условия $i \leq k_j - 1$. Если условие выполняется, то перейти к п. 6; если нет - к п. 8.

8. Вычислить $f(y) = B/S$.

9. Положить $j := j + 1$.

10. Проверить выполнение условия $j \leq n$. Если условие выполняется, то перейти к п. 5; если нет - к п. 11.

11. Положить $y := y + 1$.

12. Проверить выполнение условия $y \leq S_0$. Если условие выполняется, то перейти к п. 4; если нет - к п. 13.

В пп. 2-12 осуществляется вычисление таблицы $f_j y, y = \overline{0, S_0}, j = \overline{1, n}$, компонентов целевой функции.

13. Вычислить значение суммарного трафика

$$\lambda_{\Sigma} = \sum_{j=1}^n \lambda_j. \quad (2.87)$$

14. Выполнить присвоения

$$\begin{aligned} h \lambda &:= f_1 y, \quad j := 1, \\ g_1 y &:= y, \quad y = 0, 1, 2, \dots, S_0. \end{aligned} \quad (2.88)$$

В (10) осуществляется групповое присвоение, т. е. необходим цикл по y , изменяющемуся от 0 до S_0 с шагом единица.

15. Положить $y := 0$.

16. Положить $x := 0, a := \lambda_{\Sigma} + 1$.

17. Найти

$$b = h y - x + f_{j+1} x. \quad (2.89)$$

18. Сравнить a и b . Если $a > b$, то перейти к п. 19, в противном случае - к п. 20.

19. Положить $a := b, c := x$.

20. Положить $x := x + 1$.

21. Проверить выполнение условия $x \leq y$. Если условие выполняется, то перейти к п. 17; если нет - к п. 22.

22. Положить

$$h \ y := a, \quad (2.90)$$

$$g_{j+1} \ y := c. \quad (2.91)$$

В пп. 17-22 реализуются операции:

$$\boxed{?} \ y = \min_{0 \leq x \leq y} f_{j+1} \ x + \boxed{?} (y - x), \quad (2.92)$$

$$g_{j+1} \ y = x_{j+1} \ y, \quad (2.93)$$

где $x_{j+1} \ y$ - значение x (из совокупности перебираемых при реализации (14) значений $0, 1, 2, \dots, y$), при котором достигается минимум в выражении (14).

23. Положить $y := y + 1$.

24. Проверить выполнение условия $y \leq S_0$. Если условие выполняется, то перейти к п. 16; если нет - к п. 25.

25. Положить $j := j + 1$.

26. Проверить выполнение условия $j \leq n - 1$. Если условие выполняется, то перейти к п. 15; если нет - к п. 27.

27. По таблице $g_j \ y, y = 0, S_0, \overline{j = 1, n}$. расшифровать оптимальное решение. Расшифровочное правило следующее:

$$\begin{aligned} y_n &= g_n(S_0) \\ y_{n-1} &= g_{n-1}(S_0 - y_n) \\ y_{n-2} &= g_{n-2}(S_0 - y_n - y_{n-1}) \\ y_j &= g_j(S_0 - y_n - y_{n-1} - \dots - y_{j+1}) \\ y_2 &= g_2(S_0 - y_n - y_{n-1} - \dots - y_3) \\ y_3 &= S_0 - \sum_{j=2}^n y_j \end{aligned} \quad (2.94)$$

28. Вычислить значения компонентов оптимального решения C_j по формуле

$$C_j = \frac{1}{k_j S_j} y_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.95)$$

29. Отпечатать значения $C_j, j = \overline{1, n}$, расшифровочную таблицу $g_j \ y, y = 0, S_0, j = \overline{1, n}$ И вектор $h \ y, y = \overline{0, S_0}$.

30. Закончить вычисления.

Как видно, процесс вычислений состоит в построении таблиц двух функций $f_j(y)$ и $g_j(y)$, $y = \overline{0, S_0}$, $j = \overline{1, n}$ и вектора оптимальных (минимальных) значений целевой функции $h(y)$, $y = \overline{0, S_0}$, причем наиболее трудоемким является вычисление для каждой из величин y значений функции $h(y)$ (пп. 17-22 алгоритма). Собственно, именно здесь и используется принцип оптимальности Беллмана, позволяющий избежать перебора всех вариантов распределения, но тем не менее требующий на каждом элементарном шаге (для каждого y) отыскания минимума функции одной переменной

$$w x = f_{j+1} x + h(y - x) \quad (2.96)$$

перебором $y + 1$ вариантов распределения, отвечающих $y + 1$ возможным значениям x : $x = 0, 1, 2, \dots, y$. Для каждого из $(n - 1)$ больших шагов ($j = 2, 3, \dots, n$) необходимо, таким образом, просмотреть

$$\sum_{y=0}^{S_0} y + 1 = C_{S_0+2}^2$$

вариантов, а общее число вариантов равно

$$N_{\text{дп}} = n - 1 \sum_{S_0+2}^2 C^2 = n - 1 \frac{(S_0 + 1)(S_0 + 2)}{2} \quad (2.97)$$

Для сравнения укажем, что метод полного (тотального) перебора требует просмотра

$$N_{\text{пп}} = C_{S_0+n-1}^{n-1} \quad (2.98)$$

вариантов [6]. Как видно из данных табл. 2.1, в большинстве ситуации $N_{\text{дп}}$ несопоставимо меньше $N_{\text{пп}}$.

Значения количеств анализируемых вариантов распределения для
методов динамического программирования ($N_{\text{дп}}$) и полного перебора
($N_{\text{пп}}$)

Количество единиц ресурса S_0	Количество трактов n					
	5		10		20	
	$N_{\text{дп}}$	$N_{\text{пп}}$	$N_{\text{дп}}$	$N_{\text{пп}}$	$N_{\text{дп}}$	$N_{\text{пп}}$
50	$5,3 \cdot 10^3$	$3,2 \cdot 10^5$	$1,2 \cdot 10^4$	$1,3 \cdot 10^{10}$	$2,5 \cdot 10^4$	$4,6 \cdot 10^{16}$
100	$2,1 \cdot 10^4$	$4,6 \cdot 10^6$	$4,6 \cdot 10^4$	$4,3 \cdot 10^{12}$	$9,8 \cdot 10^4$	$4,9 \cdot 10^{21}$
200	$8,1 \cdot 10^4$	$7,0 \cdot 10^8$	$7,0 \cdot 10^8$	$1,8 \cdot 10^{15}$	$3,9 \cdot 10^5$	$1,1 \cdot 10^{27}$

Замечательным свойством метода динамического программирования является то, что он дает решение целого семейства задач, отличающихся значениями выделенного ресурса средств S . Для любого значения S из диапазона значений $(0, S_0]$ можно по расшифровочному правилу (2.94) получить оптимальные значения y_j (а следовательно, и C_j , подставив в (2.94) S вместо S_0 . Значение целевой функции $h(S)$ при этом задается соответствующим компонентом вектора $h(y)$. Ясно, что вектор $h(y)$ представляет собой в данном случае функцию РЭФ для диапазона значений ресурса $(0, S_0]$ и заданных значений других параметров задачи.

Отсюда вытекает и ограниченность метода динамического программирования. Любое, даже минимальное, изменение значений параметров задачи требует нового обращения к алгоритму 2.2 и выполнения расчетов по нему в полном объеме.

Приведенный алгоритм дает оптимальные значения пропускных способностей C_j при известных (фиксированных) величинах k_j . Варьируя тем или иным образом значения k_j , находя для каждого вектора $k = \{k_j\}$ по алгоритму 2.2 оптимальное решение $\{C_j\}$ и соответствующее значение целевой функции $h(S_0, k)$, сравнивая затем между собой значения $h(S_0, k)$, для различных векторов $k = \{k_j\}$ и выбирая тот из них (k_0), который обеспечивает минимальное значение $h(S_0, k)$, можно найти целесообразный набор

значений количества каналов в трактах $k_0 = \{k_{0j}\}$. Под целесообразным в данном случае, как и обычно, подразумевается наилучший вариант из числа рассмотренных. Об оптимальности здесь, естественно, речи нет.

Выводы

1. Исторически сложилось так, что системы связи с отказами исследовались, как правило, при большом количестве упрощающих предположений, чем системы связи с ожиданием. В частности, в большинстве опубликованных работ не учитываются факторы неабсолютной надежности оборудования и старения информации. Попытка учета этих факторов в [13] не может быть признана удачной, поскольку для многоканальных трактов нельзя независимо рассматривать процессы обслуживания, отказов и старения. Но даже и для простых моделей и самых простых (одноканальных) систем оптимизационные задачи решаются, как показано в разделе, некорректно. Предложенные точные алгоритмы определения оптимальных решений, полученных с помощью основной теоремы математического программирования, должны представлять для пользователей большой практический интерес. В последующем, однако, модельные соотношения для вероятностей отказа должны быть откорректированы, чтобы учесть и надежность звеньев сети, и эффект старения информации. Соответственно, необходимо будет вернуться к обоснованию методов и алгоритмов решения оптимизационных задач.

2. В рамках принятых допущений наиболее полной является формулировка оптимизационной задачи, в которой неизвестными полагаются как интенсивности обслуживания сообщений μ_j , так и количества каналов в трактах сети k_j , а стоимость создания и эксплуатации трактов предполагается нелинейно зависящей от

параметров μ_j и k_j . Практически приемлемые методы решения такой задачи неизвестны. Эффективные алгоритмы удается построить только для частных случаев, вводя различного рода упрощающие предположения.

3. Важнейшим из подобных упрощений является отказ от одновременной оптимизации по обеим группам параметров. В частности, поддается решению задача, в которой значения k_j считаются произвольными, но фиксированными, а неизвестными полагаются только величины μ_j . Такая задача эффективно решается методом динамического программирования, несмотря на существенную сложность выражений для целевой функции (из-за сложной зависимости вероятностей отказа от количества каналов и нагрузки) и функции ограничения (из-за нелинейности зависимости стоимости от μ_j и, возможно, k_j).

4. Предложенный алгоритм, реализующий метод динамического программирования, обладает широкой сферой применения и может использоваться для оптимизации не только сетей связи с отказами, но и в других случаях. При этом может меняться только первый этап алгоритма, на котором вычисляются исходные функции эффективности по отдельным трактам или направлениям связи. Специфика системы отражается именно в этих функциях. Последующие же этапы, характерные именно для метода динамического программирования, не зависят от конкретного вида сети связи и описываются общей схемой использования метода.

Вопросы ко второму разделу.

1. Опишите математическую модель системы связи с отказами.
2. Опишите задачу оптимизации системы массового назначения с отказами.
3. Опишите задачу оптимизации системы уникального назначения с отказами.
4. Опишите задачу поиска пропускных способностей каналов системы связи с отказами, не превышающих заданного значения суммарной пропускной способности, критерием эффективности является среднесетевое значение вероятности отказа в обслуживании.
5. Опишите задачу поиска пропускных способностей каналов системы связи с отказами, стоимость создания которых не превышает заданного значения суммы ассигнований, критерием эффективности является среднесетевое значение вероятности отказа в обслуживании.