

Практическое занятие

Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов

1. Решить задачи, используя скалярное, векторное или смешанное произведения векторов (в скобках – подсказка, какие операции нужно применить):

1. Найти объем пирамиды $ABCD$ и угол между ребрами AC и AB , зная координаты вершин $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$, $D(4; 1; 3)$. (Смешанное и скалярное)
2. К точке $A(1; 2; -4)$ приложены две силы $\vec{F}_1 = (3; -4; 1)$, $\vec{F}_2 = (-1; 0; 1)$. Вычислить работу равнодействующей этих сил при перемещении из точки A в точку $B(5; 3; 2)$. (Скалярное)
3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 120° . Зная что, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, найти меньший угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. (Скалярное)
4. Найти проекцию вектора $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b}$ на вектор $\vec{q} = \vec{a} + 3\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$. (Скалярное)
5. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = (0; 2; 4)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x} \cdot \vec{a} = 60$. (Скалярное)
6. Найти $\left[(3\vec{a} - 3\vec{b})(3\vec{a} + 3\vec{b}) \right]$, если $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$. (Векторное)
7. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (1; -2; 1)$, $\vec{b} = (3; 2; 1)$, $\vec{c} = (1; 0; -1)$. (Смешанное)

8. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (2; 1; 0)$ и $\vec{b} = (0; -1; 1)$. (Скалярное)
9. Лежат ли точки $A(1; 2; 1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$ $D(2; 1; 3)$ в одной плоскости? (Смешанное)
10. Даны три вектора $\vec{a} = (-2; 1; 1)$, $\vec{b} = (1; 5; 0)$, $\vec{c} = (4; 4; -2)$. Вычислить $pr_{\vec{c}}(\vec{3a} - 2\vec{b})$. (Скалярное)
11. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, вычислить угол между векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$. (Скалярное)
12. Зная, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$ и $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$, определить при каком значении λ векторы $\vec{p} = \lambda \vec{a} + 17\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ окажутся взаимно перпендикулярными. (Скалярное)
13. В параллелограмме векторы двух смежных сторон $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 60° , причем $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$. Найти длины диагоналей параллелограмма. (Скалярное)
14. Векторы $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ образуют угол 60° . Зная, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить угол между медианой OM и стороной OA треугольника OAB . (Скалярное)
15. Чему равен угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ и $(\vec{a} - \vec{b})^2 + (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = 20$? (Скалярное)
16. Коллинеарны ли векторы $\vec{a} = (2; -1; 2)$, $\vec{b} = (1; 2; -3)$, $\vec{c} = (3; -4; 7)$? (Смешанное)

17. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a} = (1; -2; 3)$, $\vec{b} = (3; 0; -1)$, если $\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 4\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{b} - \vec{a}$? (Векторное)

2. Выполнить и разместить в личном кабинете студента 3 типовых задания.

Типовое задание «Скалярное произведение векторов»

1. Даны вершины треугольника $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$, $C(3; -2; 1)$. Найти его внутренний угол при вершине A и внешний угол при вершине B .
2. Даны точки $A(2; 3; 0)$, $B(-1; 0; 2)$, $C(-3; 1; 2)$, $D(1; 2; 3)$. Вычислить $\text{пр}_{\overline{CD}} \overline{AB}$.
3. Найти длину большей диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, если известно, что

$$|\vec{p}| = 2\sqrt{2}, \quad |\vec{q}| = 3, \quad (\widehat{p, q}) = \frac{\pi}{4}$$

4. Даны силы $\vec{f}_1 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{f}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{f}_3 = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. Найти работу их равнодействующей при перемещении точки из начала координат в точку $A(3; -1; 2)$.
5. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (2; 1; 0)$ и $\vec{b} = (0; -1; 1)$.
6. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = (1; 5; -3)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x} \cdot \vec{a} = 70$.
7. Даны три вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условиям

$$\vec{x} \cdot \vec{a} = -5, \quad \vec{x} \cdot \vec{b} = -11, \quad \vec{x} \cdot \vec{c} = 20$$

8. Даны три вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = (4; 4; 2)$. Вычислить $\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$.
9. Вычислить угол между векторами $\vec{a} = \vec{p} + 5\vec{q}$ и $\vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$,

где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы.

10. Зная, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $(\widehat{a, b}) = \frac{2\pi}{3}$, определить, при каком значении

α векторы $\vec{p} = \alpha \cdot \vec{a} + 17\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ окажутся взаимно перпендикулярными.

11. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$,

вычислить угол α между векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

Типовое задание «Векторное произведение векторов»

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1. $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $(\widehat{p, q}) = \frac{\pi}{6}$
2. $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1$, $(\widehat{p, q}) = \frac{\pi}{4}$
3. $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = \frac{1}{5}$, $|\vec{q}| = 1$, $(\widehat{p, q}) = \frac{\pi}{2}$
4. $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = \frac{1}{2}$, $(\widehat{p, q}) = \frac{5\pi}{6}$
5. $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $(\widehat{p, q}) = \frac{3\pi}{4}$
6. $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $(\widehat{p, q}) = \frac{\pi}{3}$
7. $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 2$, $(\widehat{p, q}) = \frac{\pi}{2}$
8. $\vec{a} = 4\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 7$, $|\vec{q}| = 2$, $(\widehat{p, q}) = \frac{\pi}{4}$
9. $\vec{a} = \vec{p} - 4\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $(\widehat{p, q}) = \frac{\pi}{6}$
10. $\vec{a} = \vec{p} + 4\vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 7$, $|\vec{q}| = 2$, $(\widehat{p, q}) = \frac{\pi}{3}$
11. $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 10$, $|\vec{q}| = 1$, $(\widehat{p, q}) = \frac{\pi}{2}$

Типовое задание «Смешанное и векторное произведения векторов»

Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$, если:

1. $A_1 = (1; 3; 6), A_2 = (2; 2; 1), A_3 = (-1; 0; 1), A_4 = (-4; 6; -3)$
2. $A_1 = (-4; 2; 6), A_2 = (2; -3; 0), A_3 = (-10; 5; 8), A_4 = (-5; 2; -4)$
3. $A_1 = (7; 2; 4), A_2 = (7; -1; -2), A_3 = (3; 3; 1), A_4 = (-4; 2; 1)$
4. $A_1 = (2; 1; 4), A_2 = (-1; 5; -2), A_3 = (-7; -3; 2), A_4 = (-6; -3; -6)$
5. $A_1 = (-1; -5; 2), A_2 = (-6; 0; -3), A_3 = (3; 6; -3), A_4 = (10; 6; 7)$
6. $A_1 = (0; -1; -1), A_2 = (-2; 3; 5), A_3 = (1; -5; -9), A_4 = (-1; -6; 3)$
7. $A_1 = (5; 2; 0), A_2 = (2; 5; 0), A_3 = (1; 2; 4), A_4 = (-1; 1; 1)$
8. $A_1 = (2; -1; -2), A_2 = (1; 2; 1), A_3 = (5; 0; -6), A_4 = (-10; 9; -7)$
9. $A_1 = (-2; 0; -4), A_2 = (-1; 7; 1), A_3 = (4; -8; -4), A_4 = (1; -4; 6)$
10. $A_1 = (14; 4; 5), A_2 = (-5; -3; 2), A_3 = (2; -6; -3), A_4 = (-2; 2; -1)$
11. $A_1 = (1; 2; 0), A_2 = (3; 0; -3), A_3 = (5; 2; 6), A_4 = (8; 4; -9)$