Лекция 1

Основы классической механики

Механическое движение простейшая, но, в то же время, наиболее общая форма движения материи, которая как составная часть присутствует в тепловых, электромагнитных, химических и других явлениях.

Предметом изучения классической механики является движение макротел при скоростях движения много меньших скорости света.

1.1. Общие понятия

Механическое движение – это изменение положения тел или их частей относительно друг друга с течением времени.

Относительность механического движения проявляется в том, что при рассмотрении одного и того же движения относительно разных наблюдателей (разных систем отсчета) положение тела, траектория и скорость его движения могут оцениваться по-разному.

Система отсчета – это совокупность тела отсчета, системы координат, связанной с этим телом, и неподвижных относительно них инструментов для измерения расстояния и времени.

Во многих задачах в качестве тела отсчета выбирается Земля, а в качестве системы координат – прямоугольная декартова система.

Инерциальные системы отсчета – это системы, в которых свободное тело (тело, на которое не действуют другие тела или их действие скомпенсировано) движется равномерно и прямолинейно сколь угодно долго.

Все законы классической механики справедливы только в инерциальных системах отсчета.

Основные типы движения:

1) *поступательное движение* – движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается параллельной самой себе или, по-другому, когда все точки тела движутся одинаково. В зависимости от формы траектории поступательное движение может быть как прямолинейным, так и криволинейным.

2) *вращательное движение* вокруг неподвижной оси – движение, при котором все точки движутся по окружностям разных радиусов, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

Более сложные типы движения (например, движение катящегося шара) можно рассматривать как совокупность простых: вращения вокруг центра масс и поступательного движения самого центра масс.

Механические модели тел:

1) *материальная точка* – тело, формой и размерами которого можно пренебречь по сравнению с характерными расстояниями, рассматриваемыми в задаче (используется при описании поступательного движения);

2) *абсолютно твердое тело* – тело, расстояние между любыми двумя точками которого не меняется во время движения, то есть тело, для которого можно пренебречь его деформацией (используется при описании вращательного движения).

1.2. Кинематика поступательного и вращательного движений

Основная задача кинематики – описание движения тел без рассмотрения причин, вызывающих изменение этого движения. Описать движение – это значит, во-первых, установить количественные характеристики, по которым одно движение может отличаться от другого, во-вторых, установить связи между этими характеристиками, то есть законы, позволяющие предсказать положение тела и состояние его движения в произвольный момент времени, если известны начальные условия.

1.2.1. Понятийный аппарат (кинематические характеристики)

Обращаясь к определению механического движения, замечаем, что для его описания необходимо ввести четыре группы величин:

– величины, описывающие положение тела относительно выбранной системы отсчета;

– величины, описывающие изменение положения;

– величины, описывающие быстроту этого изменения с течением времени (состояние движения);

– величины, описывающие изменение состояния движения.

Величины, характеризующие положение тела

1) $\vec{r}$ – **радиус-вектор точки**, численное значение определяется длиной отрезка от начала отсчета до положения точки в данный момент времени, направлен от начала отсчета к точке (рис. 1.1).

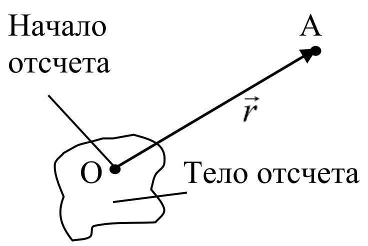

Рис. 1.1

2) (x, y, z) – ***координаты точки***

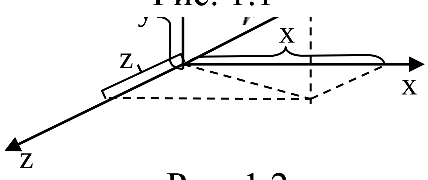

Рис. 1.2

определяются длинами отрезков координатных осей (рис. 1.2).

3) S – ***длина пути*** – скалярная величина, численно равная длине отрезка траектории от начала отсчета до положения точки в данный момент времени (рис. 1.3).

Связь между этими характеристиками:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k};\ |\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

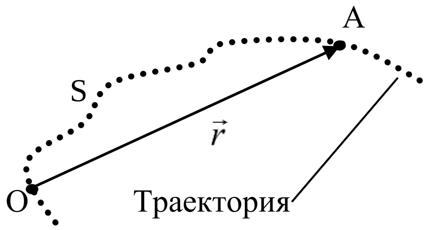

Рис. 1.3

4) φ – ***угол поворота*** – величина, характеризующая положение вращающегося тела в данный момент времени, численно равная углу между радиус-вектором выбранной точки тела и направлением на нулевую отметку на шкале (начало отсчета углов).

Величины, характеризующие изменение положения тела

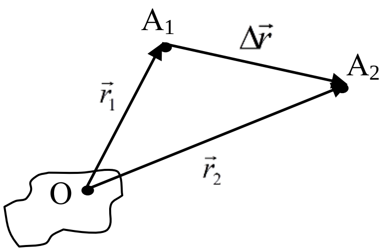

Рис. 1.4

1) $\Delta\vec{r}$ – ***перемещение*** – вектор, проведенный из начального положения точки (A_1) в конечное положение (A_2) и направленный от A_1 к A_2 (рис. 1.4):

$$\overline{\Delta}\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1;$$

$$\Delta r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

2) ΔS – ***приращение (изменение) длины пути*** численно равно длине отрезка траектории от начального положения точки (A_1) до ее конечного положения (A_2) (рис. 1.5):

$$\Delta S = S_2 - S_1.$$

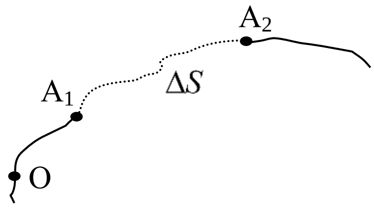

Рис. 1.5

В частном случае (если движение прямолинейное) приращение длины пути может совпадать с модулем перемещения.

3) l – ***расстояние, пройденное телом*** во время движения.

Предположим, точка переместилась сначала из положения A_1 в положение A', а затем из A' в A_2, тогда l численно равно сумме отрезков траектории: $l = A_1A' + A'A_2$ (рис. 1.6).

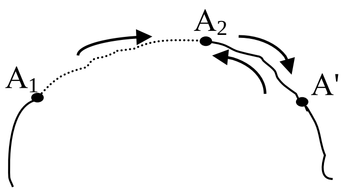

Рис. 1.6

В частном случае (если движение происходит в одну сторону без возвратов) расстояние, пройденное телом, может совпадать с приращением длины пути.

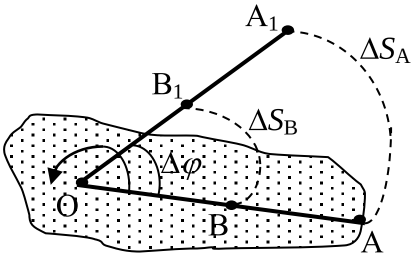

Рис. 1.7

4) $\Delta\varphi$ – ***угловое перемещение*** – физическая величина, характеризующая изменение положения вращающегося тела, численно равная углу поворота радиус – вектора произвольной точки тела (рис. 1.7).

По рисунку видно, что при вращении тела приращение длины пути для разных точек тела различно ($\Delta S_A > \Delta S_B$), но угловое перемещение $\Delta\varphi = \frac{\Delta S_A}{OA} = \frac{\Delta S_b}{OB}$ одинаково для всех точек тела.

Величины, характеризующие состояние движения

1) ***Средняя скорость перемещения*** – векторная физическая величина, численно равная отношению перемещения $\Delta\vec{r}$ к тому промежутку времени, в течение которого это перемещение было совершено, и направленная так же, как и вектор $\Delta\vec{r}$:

$$\langle\vec{\upsilon}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (1.1)$$

При перемещении по замкнутой траектории, очевидно, $\Delta\vec{r} = 0$ и $\langle\vec{\upsilon}\rangle = 0$.

2) ***Средняя путевая скорость*** – скалярная величина, численно равная отношению расстояния, пройденного телом, к тому промежутку времени, за которое это расстояние было пройдено:

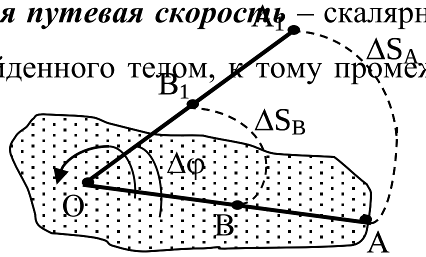

Рис. 8

$$\langle\upsilon\rangle = \frac{l}{\Delta t}. \qquad (1.2)$$

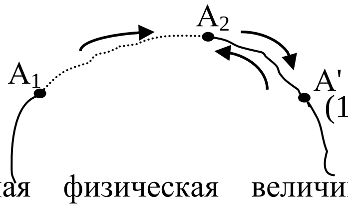

Рис. 7

3) ***Мгновенная скорость (линейная)*** – векторная физическая величина, характеризующая состояние движения в данный момент времени, равная первой производной от радиус-вектора точки по времени и направленная по касательной к траектории движения.

$$\vec{\upsilon} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (1.3)$$

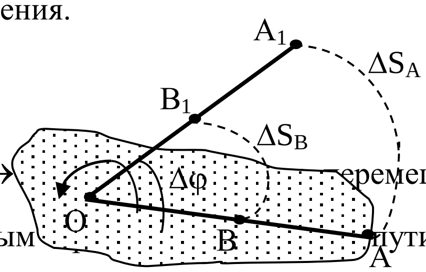

Рис. 8

При $\Delta t \to 0$ перемещение $d\vec{r}$ по модулю будет совпадать с бесконечно малым приращением пути dS, то есть $|d\vec{r}| = dS$, тогда модуль скорости найдется как первая производная от пути по времени:

$$|\vec{\upsilon}| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{dS}{dt} = S'. \qquad (1.4)$$

При координатном способе описания движения проекции скорости на координатные оси: $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}$; $\upsilon_y = \dfrac{dy}{dt}$; $\upsilon_z = \dfrac{dz}{dt}$, а модуль скорости $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$.

4) ***Угловая скорость (мгновенная)*** – векторная физическая величина, характеризующая состояние вращательного движения в данный момент времени, численно равная первой производной от угла поворота по времени и направленная вдоль оси вращения в ту сторону, откуда вращение кажется происходящим против часовой стрелки (то есть по правилу правого винта) (рис. 1.8).

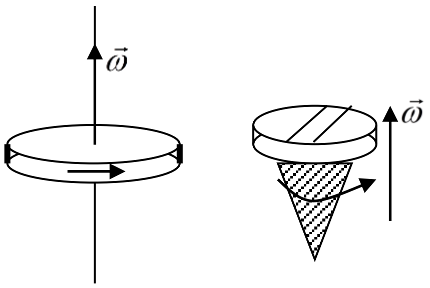

Рис. 1.8

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'. \tag{1.5}$$

Величины, характеризующие изменение состояния движения

1) ***Мгновенное полное ускорение (линейное)*** – векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения вектора линейной скорости, численно равная первой производной от вектора скорости по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}. \tag{1.6}$$

Полное ускорение может быть направлено под любым углом к скорости в зависимости от характера движения.

Так как скорость – векторная величина, то изменения скорости могут происходить по двум признакам: по численному значению (по модулю) и по направлению. Поэтому полное ускорение принято делить на две составляющие: тангенциальное (касательное) ускорение ($\vec{a}_\tau$), которое дает информацию об изменении численного значения скорости, и нормальное (центростремительное) ускорение ($\vec{a}_n$), которое дает информацию об изменении направления скорости.

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \tag{1.7}$$

2) ***Тангенциальное ускорение*** (***касательное***) – векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости тела по абсолютному значению, численно равная первой производной от модуля скорости по времени и направленная по касательной к траектории в ту же сторону, что и скорость, если движение ускоренное, и противоположно скорости, если движение замедленное.

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \upsilon'. \tag{1.8}$$

3) ***Нормальное ускорение (центростремительное)*** – векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения направления скорости, численно равная отношению квадрата скорости к радиусу кривизны траектории, направленная вдоль радиуса кривизны к центру кривизны:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}. \tag{1.9}$$

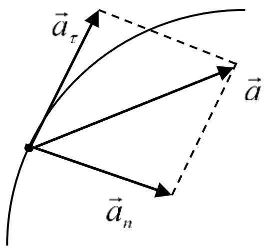

Рис. 1.9

Так как векторы $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$ направлены под прямым углом друг к другу, то *связь между их модулями* найдется по теореме Пифагора (рис. 1.9):

$$a_{\text{полн.}} = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \tag{1.10}$$

При координатном способе описания движения полное ускорение может быть представлено через свои проекции на координатные оси: $a_{\text{полн.}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, где $a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt}$, $a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt}$.

4) ***Угловое ускорение*** – векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости, численно равная первой производной от угловой скорости по времени и направленная вдоль оси вращения в ту же сторону, что и угловая скорость, если скорость возрастает, и противоположно ей, если она убывает.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{1.11}$$

Поскольку мы ограничиваемся рассмотрением вращения вокруг неподвижной оси, угловое ускорение не делится на составляющие подобно линейному.

Связь между угловыми характеристиками вращающегося тела и линейными характеристиками движения его отдельных точек

$$\Delta S = \Delta\varphi \cdot R;\ \upsilon = \omega \cdot R;\ a_\tau = \varepsilon \cdot R;\ a_n = \omega^2 \cdot R, \tag{1.12}$$

где R – радиус окружности, по которой движется рассматриваемая точка вращающегося тела.

Классификация движений

Наиболее информативной характеристикой движения является ускорение, поэтому оно используется в качестве основания для классификации движений.

Нормальное ускорение несет информацию об изменении направления скорости, то есть об особенностях траектории движения:

$a_n = 0$ – *прямолинейное движение* (направление скорости не меняется);

$a_n \neq 0$ – *криволинейное движение*.

Тангенциальное ускорение определяет характер изменения модуля скорости с течением времени. По этому признаку принято выделять следующие виды движения:

$a_\tau = 0$ – *равномерное движение* (абсолютное значение скорости не меняется);

$a_\tau \neq 0$ – *неравномерное движение* (*ускоренное,* если ускорение сонаправлено со скоростью или *замедленное*, если это ускорение направлено противоположно скорости).

Аналогично для вращательного движения:

$\varepsilon = 0$ – *равномерное вращение*;

$\varepsilon \neq 0$ – *неравномерное вращение* (*ускоренное или замедленное*).

Наиболее простыми частными случаями *неравномерного* движения являются

– *равнопеременное движение* (*равноускоренное или равнозамедленное*), при котором $a_\tau = const \neq f(t)$ – тангенциальное ускорение не зависит от времени, остается постоянным во время движения;

– *гармоническое колебательное движение (*например, движение грузика на пружине*),* при котором тангенциальное ускорение меняется с течением времени по закону синуса или косинуса: $a_\tau = a_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$ или $a_\tau = a_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$. Аналогично для вращательного движения:

– *равноускоренное или равнозамедленное вращение,* при котором $\varepsilon = const.$

– *крутильные колебания*, если угловое ускорение меняется с течением времени по закону синуса или косинуса.

1.2.2. Кинематические законы

Кинематическими законами будем называть законы, выражающие изменение кинематических характеристик движения с течением времени:

– закон пути $S = S(t)$ или $\varphi = \varphi(t)$;

– закон скорости $\upsilon = \upsilon(t)$ или $\omega = \omega(t)$;

– закон ускорения $a = a(t)$ или $\varepsilon = \varepsilon(t)$.

Кинематические законы скорости и пути для поступательного и вращательного движений в общем виде

Если ускорение рассчитывается как производная от скорости по времени (см. определение), то скорость по отношению к ускорению является первообразной, а изменение скорости рассчитывается как интеграл. Аналогично далее: если модуль скорости рассчитывается как производная от пути по времени (см. определение), то путь по отношению к скорости является первообразной, а изменение длины пути рассчитывается как интеграл:

$$\left.\begin{array}{l} \upsilon = \upsilon_0 + \int\limits_0^t a_\tau(t)dt; \;\; \omega = \omega_0 + \int\limits_0^t \varepsilon(t)dt \\ S = S_0 + \int\limits_0^t \upsilon(t)dt; \;\; \varphi = \varphi_0 + \int\limits_0^t \omega(t)dt \end{array}\right\}. \qquad (1.13)$$

Как видно, для решения задач на основе кинематических законов необходимо знать закон изменения ускорения с течением времени, а также начальные условия – S_0 (или φ_0), υ_0 (или ω_0), то есть положение и скорость тела в начальный момент t_0.

Таблица 1.1

Кинематические законы для простейших видов движения

Движение	Закон ускорения	Закон скорости	Закон пути
Равномерное движение	$a_\tau(t) = 0$; $\varepsilon(t) = 0$	$\upsilon(t) = \upsilon_0 = const$; $\omega(t) = \omega_0 = const$	$S(t) = \upsilon t$; $\varphi(t) = \omega t$
Равнопеременное движение	$a_\tau(t) = const$; $\varepsilon(t) = const$	$\upsilon(t) = \upsilon_0 + a_\tau t$; $\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t$	$s(t) = \upsilon_0 t + \frac{1}{2} a_\tau t^2$; $\varphi(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$
Гармоническое колебательное движение	$a_\tau(t) = a^{\max}\sin(\omega t)$; $\varepsilon(t) = \varepsilon^{\max}\sin(\omega t)$	$\upsilon(t) = \upsilon^{\max}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$; $\omega(t) = \omega^{\max}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$	$s(t) = s^{\max}\sin(\omega t - \pi)$; $\varphi(t) = \varphi^{\max}\sin(\omega t - \pi)$