

**CLEVER
STRONG
CREATIVE**



**МНОГОПРО-
ФИЛЬНЫЙ
ЛИЦЕЙ**

МАГИСТРАТУРА

БАКАЛАВРИАТ

**ПРОФЕС-
СИОНАЛЬНАЯ
ПЕРЕПОДГО-
ТОВКА**

СПЕЦИАЛИТЕТ



www.zabgu.ru

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ: СВЕРТКА КРИТЕРИЕВ

Свертка критериев – операция объединения частных критерии в один глобальный «суперкритерий»

Элементарные способы свертки

Экономический способ свертки (суммирование с весовыми коэффициентами)

Обычно применяется, когда частные критерии количественные

Пусть $u_1, u_2, \dots, u_n$

λ_i – весовые коэффициенты каждого частного критерия (обычно $\lambda_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$)

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$$

Пример. Предприятие выпускает n видов продукции, которые продаются по цене λ_i ($i=1,2,\dots,n$).

Доходы предприятия от реализации продукции

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$$



Разбиение на удовлетворительные и неудовлетворительные

Введем в рассмотрение вектор $P = (p_1; p_2; \dots; p_n)$

компоненты которого определяют необходимые уровни достижения частных критериев $u_1, u_2, \dots, u_n$

$$U = \begin{cases} 1, \text{ если } u_1 \geq p_1, u_2 \geq p_2, \dots, u_n \geq p_n \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Если частный критерий всего один, то также можно данной сверткой описать достижение определенной цели

$$U = \begin{cases} 1, \text{ если } u \geq p; \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пример. Знания студента на экзамене оцениваются значениями от 2 до 5.

Количественный критерий u – оценка на экзамене.

Качественная цель – сдать экзамен:

$$U = \begin{cases} 1, & \text{если } u \geq 3; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

4-й семестр 20 12 / 13 учебного года

ВТОРОЙ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

№ п/п	Наименование дисциплины	Кол. час.	Фамилия преподавателя	Оценка	Дата сдачи экзамена	Подпись преподавателя
1	Анал. зриск		Евдокимов		5.06.13	В.В.
2	Угол. зриск		Соснов		13.06.13	С.С.
3	Угол. зриск		Соснов		28.06.13	С.С.
4	Угол. зриск		Соснов			
5	Угол. зриск		Соснов		27.06.13	С.С.
6	Угол. зриск		Соснов			
7	Угол. зриск		Соснов		01.07.13	С.С.
8						
9						
10						

Приказом № _____ от _____ г.
Студент _____ переведен на 3-й курс

- 8 -

Пример. Деятельность промышленного предприятия оценивается векторным критерием эффективности, компоненты которого определяют следующее:

u_1 – количество выпускаемой продукции

u_2 – уровень реализации продукции

u_3 – уровень производительности труда

По каждому из названных показателей предприятию доводится план, характеризуемый вектором $P = (p_1; p_2; p_3)$. Деятельность предприятия считается успешной, если выполнен план по всем показателям одновременно.

Качественная цель – успешная деятельность предприятия:

$$U = \begin{cases} 1, \text{ если } u_1 \geq p_1, u_2 \geq p_2, u_3 \geq p_3; \\ 0, \text{ если хотя бы одно из неравенств не выполнено} \end{cases}$$

Лексикографическая свертка (лексикографическое упорядочение)

Частные критерии упорядочены по относительной важности. Для сравниваемых объектов сначала измеряются значения наиболее важного критерия  когда значения сравниваемых объектов по наиболее важному критерию совпадают, то переходят к сравнению на основании следующего по важности критерия  и т.д.

Пример. При формировании структуры государственных расходов самыми важными являются расходы на государственных служащих, затем идут затраты на оборону, на содержание силовых структур, и так далее. В конце списка обычно оказываются сельское хозяйство и культура. Примерно так на практике формируется расходная часть государственного бюджета.

Пусть даны критерии $u_1, u_2, \dots, u_n$ ранжированные в порядке возрастания номеров $\longrightarrow$ находятся все точки максимума критерия $u_1 \longrightarrow$ выбираются те, которые доставляют максимум критерию $u_2 \longrightarrow$ и т.д. $\longrightarrow$ выбираются те, которые доставляют максимум критерию u_n (это точки лексикографического максимума)



Пример. В чемпионате по футболу место команды определяется по количеству набранных очков. В случае их равенства последовательно используются дополнительные показатели – количество побед, разность мячей, результаты очных встреч и т. п.

Выделение множества Парето.

Множество Парето - набор таких объектов, что переход от одного к другому обязательно повысит значение хотя бы одного частного критерия и ухудшит значение минимум одного критерия.

Если по критериям один объект будет лучше другого, то говорят, что он *доминирует*.

В множестве Парето ни один объект не доминирует над другим.

Процедура нахождения множества Парето заключается в нахождении доминирующих объектов.

Пример. В таблице приведены значения двух критериев, характеризующих семь инвестиционных проектов: прибыль и сумма капитальных вложений

Показатель	Проект № 1	Проект № 2	Проект № 3	Проект № 4	Проект № 5	Проект № 6	Проект № 7
Прибыль, млн. руб.	26	18	23	27	20	16	30
Капитальные вложения, млн. руб.	10	9	10	12	7	6	25

Считаем, что проект лучше по первому критерию, если он приносит большую прибыль и лучше по второму критерию, если он требует меньше капитального вложения.

Проекты № 1, № 4, № 5, № 6 и № 7 оптимальны по Парето.

Лексимин.

Сначала сравниваются самые маленькие значения критериев

Если они одинаковы, то во внимание принимаются следующие по величине и так далее.

Идея: на каждом этапе отбрасывать самый худший вариант

Пример. В таблице приведены значения двух критериев, характеризующих семь инвестиционных проектов: прибыль и сумма капитальных вложений

Показатель	Проект № 1	Проект № 2	Проект № 3	Проект № 4	Проект № 5	Проект № 6	Проект № 7
Прибыль, млн. руб.	26	18	23	27	20	16	30
Капитальные вложения, млн. руб.	10	9	10	12	7	6	25

Считаем, что проект лучше по первому критерию, если он приносит большую прибыль и лучше по второму критерию, если он требует меньше капитального вложения.

Пусть лицо, принимающее решение по инвестиционным проектам, на первое место ставит показатель «прибыль», а на второе – показатель «капитальные вложения».

Показатель	Проект № 1	Проект № 2	Проект № 3	Проект № 4	Проект № 5	Проект № 6	Проект № 7
Прибыль, млн. руб.	26	18	23	27	20	16	30

Показатель	Проект № 1	Проект № 2	Проект № 3	Проект № 4	Проект № 5	Проект № 6	Проект № 7
Кап. вложения, млн. руб.	10	-	10	12	-	-	25

Показатель	Проект № 1	Проект № 2	Проект № 3	Проект № 4	Проект № 5	Проект № 6	Проект № 7
Прибыль, млн. руб.	26	-	23	-	-	-	-
Кап. вложения, млн. руб.	10	-	10	-	-	-	-

Для критериев качественного типа могут применяться логические способы свертки: отрицание, конъюнкция и дизъюнкция

Отрицание.

Пусть u качественный критерий

Цель, состоящая в *недостижении* исходной

$$(1-u)$$

Пример. Олег хочет к лету подрасти, а Витя, наоборот не хочет подрасти. Выразите цель Вити через цель Олега.



Пусть критерий u – подрасти к лету. Цель Вити

$$U = 1 - u.$$

Конъюнкция (логическое умножение)

$u_1, u_2, \dots, u_n$ - качественные критерии

Цель, состоящая в достижении сразу всех частных целей (частных критериев)

$$U = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n = \prod_{i=1}^n u_i$$

Пример. Во время летней сессии студенту Ивану Иванову предстоит сдать три экзамена. Чтобы успешно закрыть сессию студент должен сдать все три экзамена. Опишите цель Ивана Иванова: сдать успешно сессию.

Рассмотрим частные критерии:

u_1 – успешная сдача первого экзамена

u_2 – успешная сдача второго экзамена

u_3 – успешная сдача третьего экзамена

Цель Ивана Иванова – сдать успешно сессию: $U = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = \prod_{i=1}^3 u_i$.

Дизъюнкция

$u_1, u_2, \dots, u_n$ - качественные критерии

Цель, состоящая в достижении, по крайней мере, одной из частных целей

$$U = 1 - (1 - u_1) \cdot (1 - u_2) \cdot \dots \cdot (1 - u_n) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - u_i)$$

Пример. Мальчик Петя написал письмо Деду Морозу, в котором изложил пять своих заветных желаний. Чтобы Петя почувствовал себя счастливым достаточно исполнения хотя бы одного желания. Опишите цель сделать мальчика Петю счастливым в данном году.

Частные цели (частные критерии)

u_1 – исполнение первого желания;

u_2 – исполнение второго желания;

...

u_5 – исполнение пятого желания.



Исполнение хотя бы одного желания мальчика:

$$U = 1 - (1 - u_1)(1 - u_2)(1 - u_3)(1 - u_4)(1 - u_5) = 1 - \prod_{i=1}^5 (1 - u_i)$$

Для критериев количественного типа могут быть использованы обобщенные логические способы свертки: обобщенная дизъюнкция и обобщенная конъюнкция

Обобщенная дизъюнкция

$u_1, u_2, \dots, u_n$ - количественные критерии

Резльтирующий критерий с целью оценки по **наилучшему** значению частных критериев

$$U = \max\{\lambda_1 u_1; \lambda_2 u_2; \dots; \lambda_n u_n\} = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i u_i,$$

где λ_i - весовые коэффициенты частных критериев

Пример. Пусть в шоссейной велогонке принимают участие три спортсмена из одной команды. Общий результат команды в соревнованиях равен лучшему результату одного из спортсменов. Выразите результат команды велогонщиков через свертку критериев.

Пусть критерии u_1, u_2, u_3 задают количество очков за места, занятые ее членами, соответственно.

Критерий, описывающий результат команды:

$$U = \max\{u_1; u_2; u_3\}.$$



Для критериев количественного типа могут быть использованы обобщенные логические способы свертки: обобщенная дизъюнкция и обобщенная конъюнкция

Обобщенная конъюнкция

$u_1, u_2, \dots, u_n$ - количественные критерии

Резльтирующий критерий с целью оценки по **наихудшему** значению частных критериев

$$U = \min\{\lambda_1 u_1; \lambda_2 u_2; \dots; \lambda_n u_n\} = \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i u_i$$

где λ_i - весовые коэффициенты частных критериев

Пример. В конькобежном спорте есть такое правило: если спортсмен завершил забег, в котором ему помешали, а затем использовал повторный старт, то в качестве финального результата должно быть зарегистрировано лучшее время из двух попыток. Выразите результат спортсмена через свертку критериев при повторном забеге.

Пусть критерий u_1 – результат первой попытки (время), u_2 – результат второй попытки (время).

Финальный результат :

$$U = \min\{u_1; u_2\}.$$



CLEVER
STRONG
CREATIVE



СПАСИБО ЗА
ВНИМАНИЕ!