

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ

1.1. Основные понятия

Статика - раздел механики, в котором рассматривается равновесие тел под действием приложенных сил, а также рассматривается вопрос замены одной системы сил другой ей эквивалентной.

Тело в теоретической механике носит абстрагированное понятие. При этом различают материальную точку, систему материальных точек и абсолютно твердое тело.

Материальная точка - тело, размерами которого можно пренебречь. Материальная точка обладает массой и способно взаимодействовать с другими телами.

Система материальных точек - совокупность материальных точек, расстояние между которыми взаимосвязаны.

Абсолютно твердое тело - совокупность материальных точек, расстояние между которыми не изменяются.

Свободное тело - тело, перемещение которого не ограничено в движении другими телами.

С понятием "тело" тесно связано понятие "сила".

Сила - мера механического взаимодействия между телами. Сила характеризуется точкой приложения, направлением и модулем (рис. 1). В международной системе измерений СИ за единицу измерения силы принят ньютон (Н).

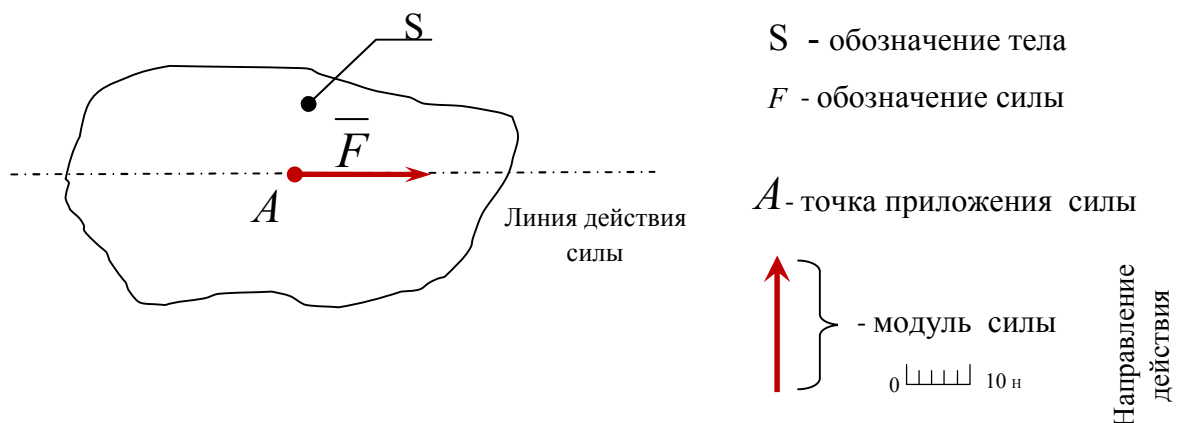


Рис. 1. Схематичное изображение действия силы

Система сил - совокупность сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ действующих на тело (рис. 2).

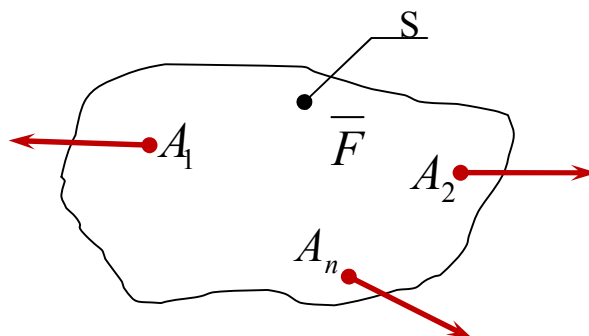


Рис. 2. Схематичное изображение действия системы сил на тело

Эквивалентными системами сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim (\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \dots, \bar{F}'_n)$ называются системы сил, оказывающими одинаковое воздействие на тело.

Равнодействующая сила - сила, эквивалентная некоторой системе сил $(\bar{R}) \sim (\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$.

Уравновешивающая сила - сила, которая, будучи приложенной к телу, приводит это тело к состоянию покоя или равномерного движения. Уравновешивающая сила равна по модулю равнодействующей и направленная по линии действия в противоположную сторону.

Уравновешенная система сил – система сил, равнодействующая которой равна «0».

Силы, действующие на тело, разделяются на внешние и внутренние.

Внешние силы (активные или задаваемые) – силы, действующие на тело со стороны других тел.

Внутренние силы – силы взаимодействия материальных точек, входящих в состав рассматриваемого тела или системы материальных точек.

В основе изучения раздела статики лежат аксиомы, являющиеся результатом накопленного опыта человечеством над явлениями природы.

1.2. Аксиомы статики

1. **Аксиома инерции.** Если на тело не действуют силы или система сил, приложенных к телу уравновешена, то это тело будет находиться в состоянии покоя или равномерного движения.

2. **Аксиома равновесия двух сил.** Под действием двух сил тело будет находиться в равновесии только в том случае если эти силы равны и направлены по одной линии действия в противоположные стороны.

Следствие. Не изменяя направления действия силы, точку приложения силы можно переносить в любое место вдоль линии действия. Состояние тела при этом не нарушится.

3. **Аксиома присоединения.** Состояние тела не изменится, если к нему присоединить или от него убрать уравновешенную систему сил.

4. **Аксиома параллелограмма.** Если линии действия двух сил пересекаются, то равнодействующая этих сил находится по правилу параллелограмма, то есть она является диагональю параллелограмма, стороны которого представляют действующие силы (рис. 3).

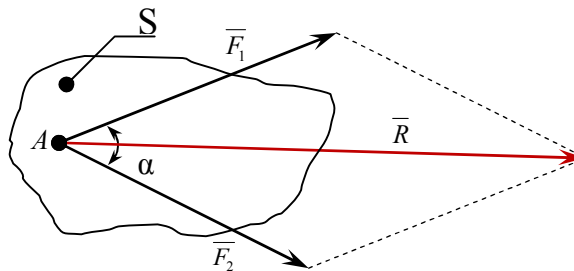


Рис. 3. Схематичное изображение равнодействующей системы двух сил

Модуль равнодействующей определяется по теореме косинусов

$$R = \sqrt{(F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha)}$$

Следствие аксиом 2 и 4. Если тело находится в равновесии под действием трех сил, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

5. **Аксиома равенства действия, противодействия.** Всякому действию на тело со стороны другого, на него действует равное и противоположно направленное противодействие.

6. **Аксиома затвердевания.** Состояние тела не нарушится при затвердевании деформируемого тела.

1.3. Связи и их реакции.

Различают свободные и несвободные тела. Физические условия, ограничивающие свободу движения, называются *связями*. Силы, с которыми связи действуют на систему или твердое тело, называются *реакциями связей*. Реакции связей отличаются от действующих активных сил тем, что их численная величина наперед неизвестна. Она зависит от воздействия внешних сил.

Одним из основных положений механики является *принцип освобождения твердых тел от связей*, согласно которому несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, если связи, действующие на тело, заменить реакциями связей.

Рассмотрим основные виды связей.

1. **Тело подвешено на нити** (рис. 4). Реакция нити направлена по нити к точке ее закрепления. Нить рассматривается как невесомая, гибкая, нерастяжимая.

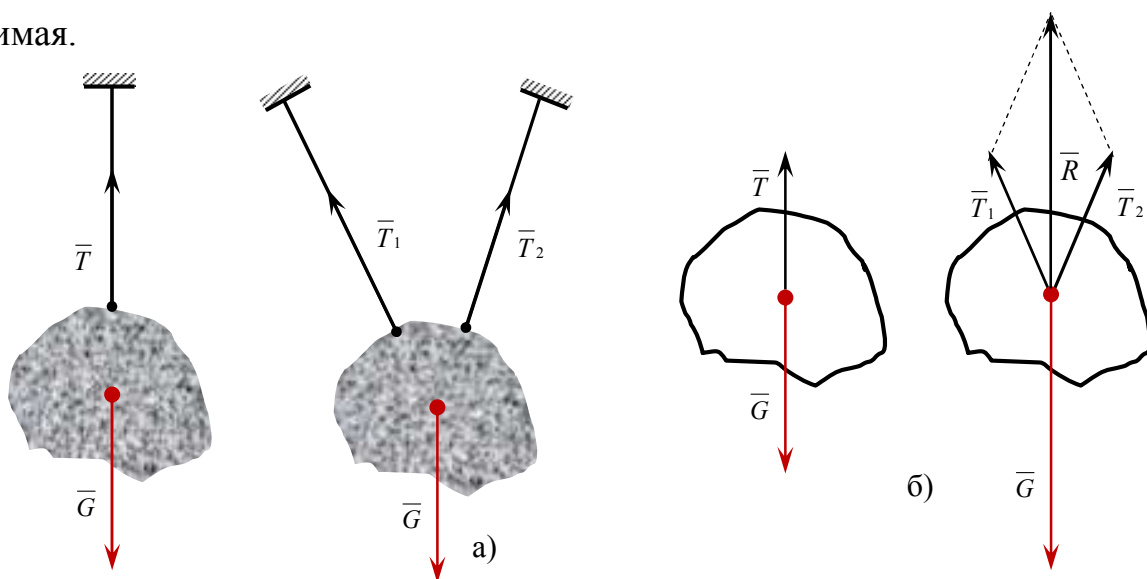


Рис. 4. Тело подвешено на нити: *а* - схематичное изображения связи; *б* - схематичное изображение замены связи ее реакцией

2. **Тело покоится на гладкой поверхности** (рис. 5). Если связь представляет собой гладкую поверхность, то ее реакция направлена по нормали к поверхности

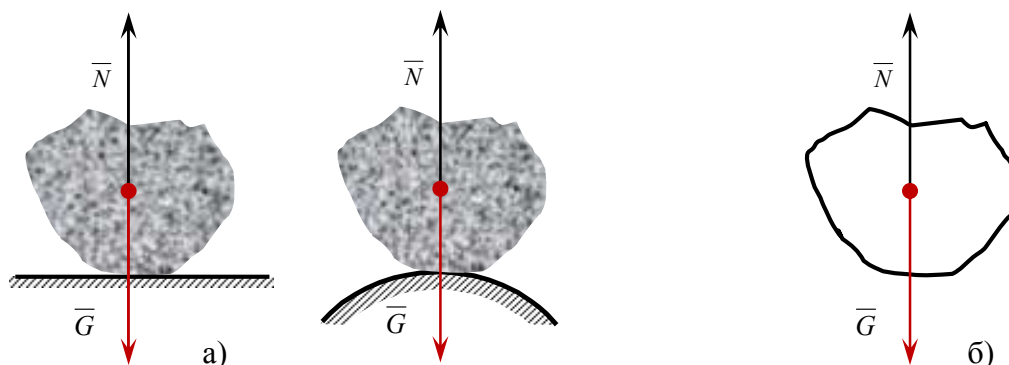


Рис. 5. Тело покоится на гладкой поверхности: *а* - схематичное изображения связи; *б* - схематичное изображение равновесия тела под действием приложенных сил

3. **Тело покоится на шероховатой поверхности** (рис. 6). Если связью является шероховатая поверхность, то ее реакция геометрически складывается из составляющих, определяемых силой давления тела на опорную поверхность и силой трения, возникающей в результате воздействия горизонтальной движущей силы $\bar{G}$. Сила трения $F_{\text{дс}} = F_{\text{мп}}$. $F_{\text{мп}} = fN$, где f – коэффициент трения. Угол трения $\varphi = \arctg \frac{F_{\text{мп}}}{N} = \arctg \frac{fN}{N} = \arctg f$.

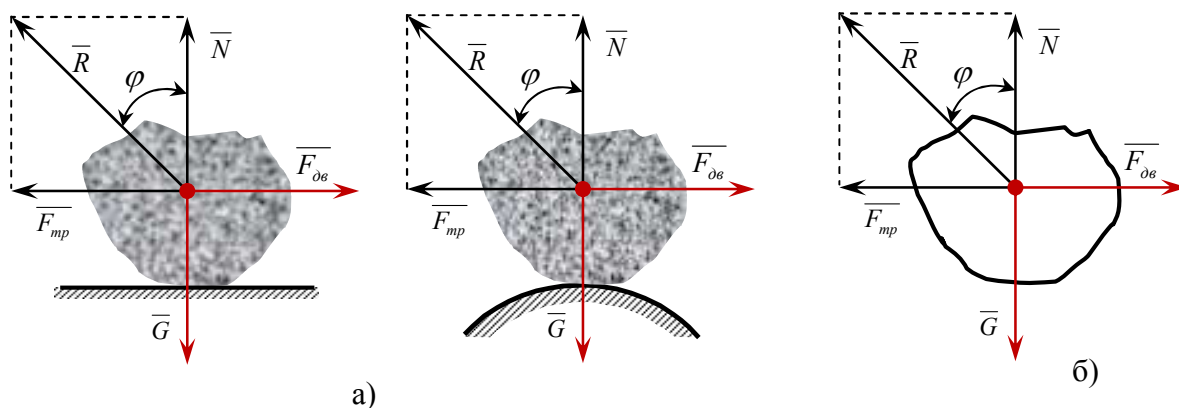


Рис. 6. Тело покоится на шероховатой поверхности: *а* - схематичное изображения связи; *б* - схематичное изображение равновесия тела под действием приложенных сил

4. *Тело опирается своими гранями или ребрами на опорные поверхности* (рис. 7). Если существует два взаимно перпендикулярных направления, в одном из которых связь препятствует перемещению тела, а в другом отсутствует, то реакция связи направлена перпендикулярно свободному перемещению.

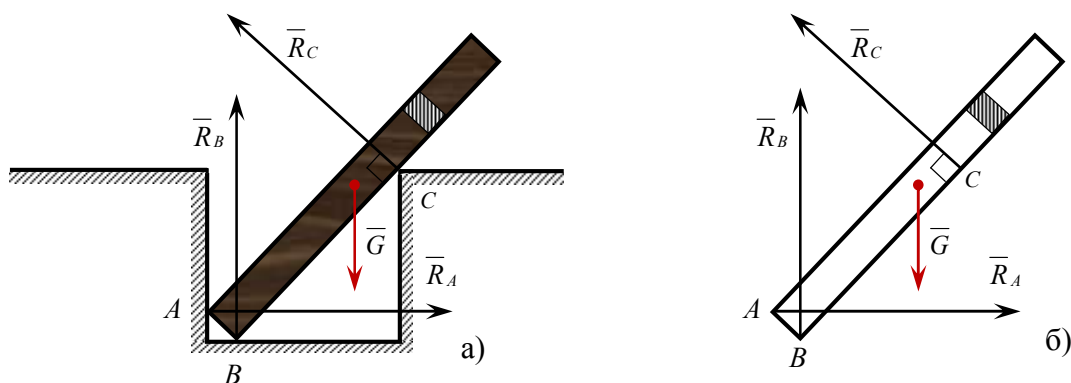


Рис. 7. Тело опирается своими гранями или ребрами на опорные поверхности: *а - схематичное изображение связей; б - схематичное изображение равновесия тела под действием приложенных сил*

При решении задач механики приходится сталкиваться с конструкциями закрепленными на несущие элементы - **опоры**.

Различают следующие виды опор конструкций, расположенных на плоскости (рис. 8):

а) *шарнирно-неподвижная*. Из трех степеней свободы, возможных при движении тела на плоскости, допускается только одна - вращение тела относительно оси. Реакция связи геометрически складывается из двух составляющих (рис. 8, а). Скалярная величина реакции, в случае взаимно перпендикулярного расположения составляющих, равна $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$. В случае пересечения векторов сил, составляющих реакцию, результирующая реакции опоры определяется по теореме косинусов $R = \sqrt{(R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2 \cos \alpha)}$;

б) *шарнирно-подвижная*. Конструкция опоры при движении тела на плоскости допускает только одно ограничение – либо поступательное, либо

вращательное. Реакция опоры, в этом случае, направлена перпендикулярно свободному перемещению опоры;

в) *консольное защемление*. Конструкция опоры ограничивает свободу движения тела на плоскости. Реакция опоры состоит из трех составляющих: проекций сил на оси декартовой системы координат, равнодействующая которых равна $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$, и реактивного момента заделки (момента заделки) M_A .

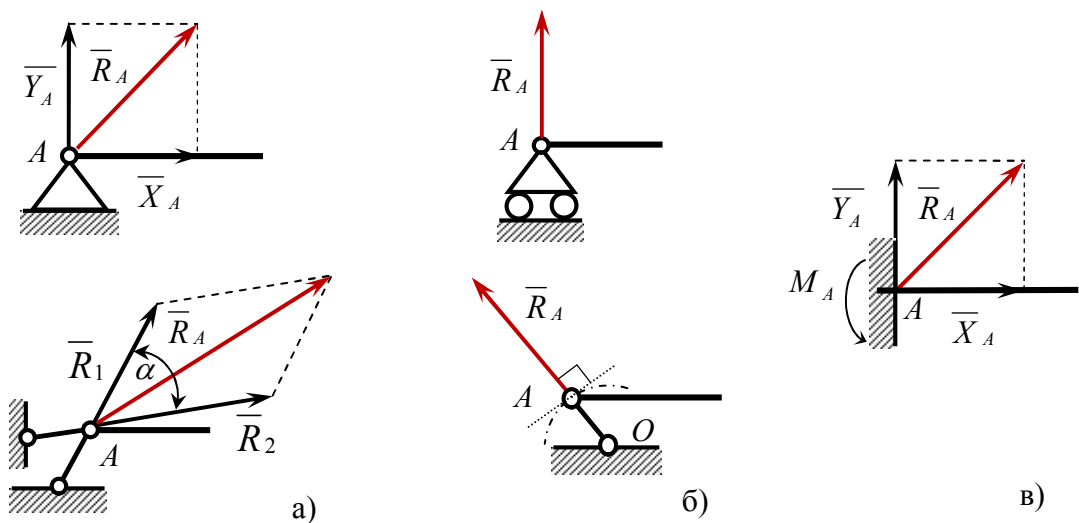


Рис. 8. Конструкции опор: а - шарнирно-неподвижная опора; б - шарнирно-подвижная опора; в - консольное защемление

Конструкции опор, воспринимающих пространственную внешнюю нагрузку (рис. 9), имеют следующий вид:

а) *цилиндрический подпятник*. Из шести возможных перемещений тела в пространстве, рассматриваемая конструкция опоры допускает только одно – вращение относительно оси Z . Полная реакция опоры A равна: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$. Реакция опоры B – $R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$;

б) *сферическая опора*. Рассматриваемая конструкция опоры допускает вращение тела относительно осей координат. Реакция опоры при воздействии внешних нагрузок равна $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$;

в) *жесткая пространственная заделка*. При жесткой заделке тела ограничивается его движение в пространстве, не допускается поворот тела от-

носительно координатных осей. Реакция опоры при воздействии внешних нагрузок равна $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$. Момент заделки определяется как геометрическая сумма его проекций на оси координат, скалярная величина равна:

$$M_A = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

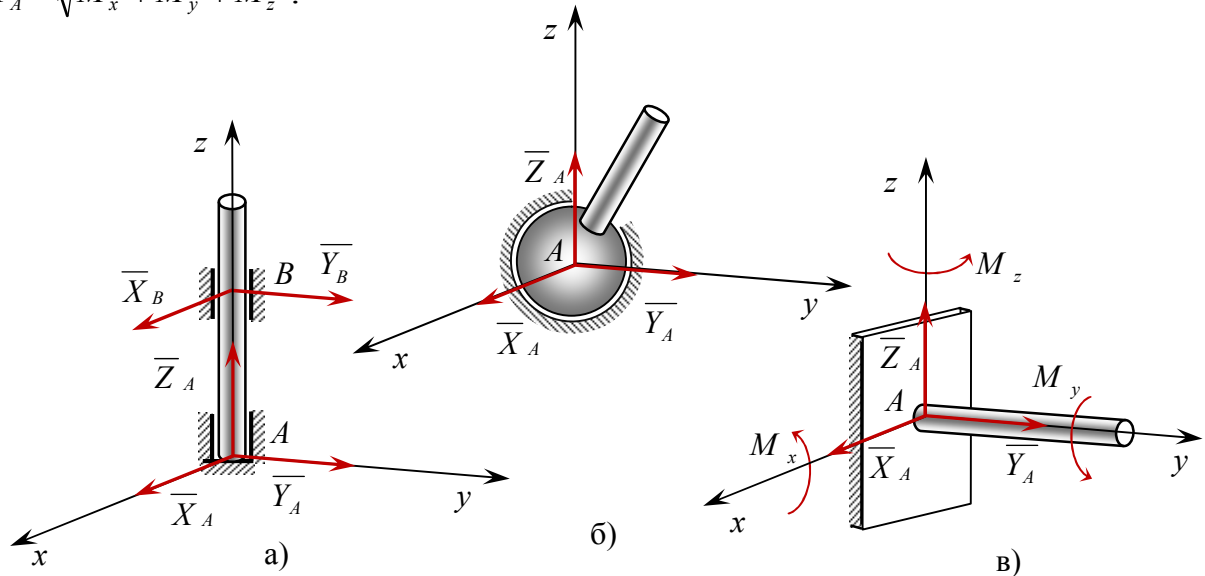


Рис. 9. Конструкции пространственных опор: а - цилиндрический подпятник; б - сферическая опора; в - жесткая пространственная заделка

2. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

2.1 Способы определения равнодействующей системы сходящихся сил

Системой сходящихся сил называют систему сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.

При определении равнодействующую $\bar{R}$ системы сил пользуются *графическим, аналитическим и графоаналитическим* способами.

При *графическом* способе (рис. 10) равнодействующая определяется как замыкающий вектор многоугольника сил, построенного путем последовательного или произвольного переноса векторов в выбранном масштабе.

При *аналитическом* способе равнодействующая определяется по ее проекциям на оси декартовой системы координат:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{xi} = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i = \sum_{i=1}^n X_i; R_y = \sum_{i=1}^n F_{yi} = \sum_{i=1}^n F_i \cos \beta_i = \sum_{i=1}^n Y_i;$$

$$R_z = \sum_{i=1}^n F_{zi} = \sum_{i=1}^n F_i \cos \gamma_i = \sum_{i=1}^n Z_i,$$

где $F_{x_i} = X_i$, $F_{y_i} = Y_i$, $F_{z_i} = Z_i$ - проекции соответствующих сил на оси координат.

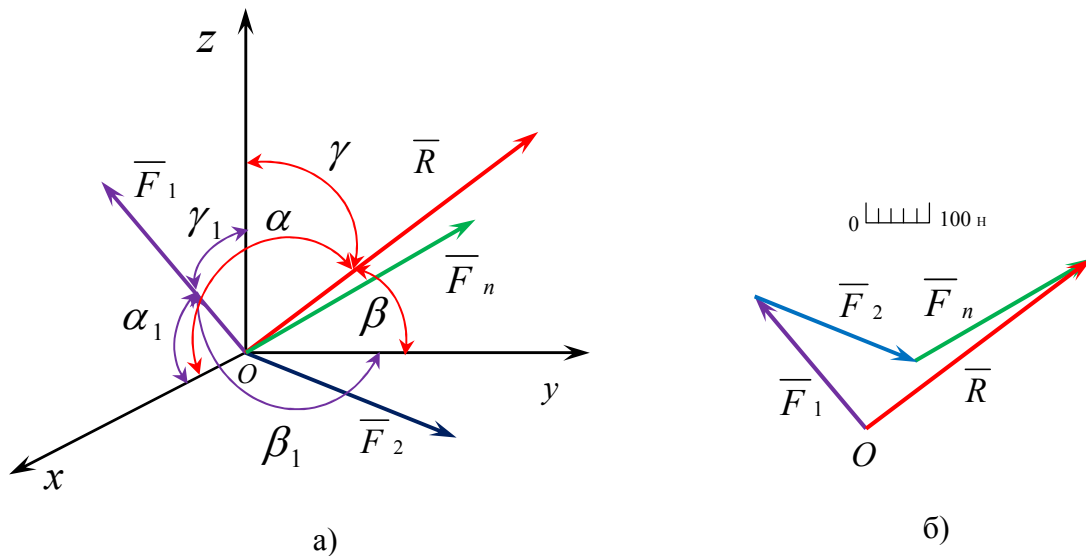


Рис. 10. Система сходящихся сил: а - пространственная система сил; б - силовой многоугольник

Модуль равнодействующей силы

$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n Z_i\right)^2}.$$

Направление вектора $\bar{R}$ определяется по направляющим косинусам:

$$\cos(R, oX) = \cos \alpha = R_x / R; \cos(R, oY) = \cos \beta = R_y / R; \cos(R, oZ) = \cos \gamma = R_z / R.$$

Графоаналитический способ сочетает в себе первых два способа. При этом, многоугольник сил строится в произвольном масштабе.

2.2. Условие равновесия системы сходящихся сил

В случае равновесия системы сходящихся сил, равнодействующая этих сил равна нулю:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = 0.$$

Следовательно, равны нулю и проекции равнодействующей на оси координат:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{xi} = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i = \sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{yi} = \sum_{i=1}^n F_i \cos \beta_i = \sum_{i=1}^n Y_i = 0;$$

$$R_z = \sum_{i=1}^n F_{zi} = \sum_{i=1}^n F_i \cos \gamma_i = \sum_{i=1}^n Z_i = 0.$$

Пример:

Балка удерживается в горизонтальном положении тросом CD (Рис. 11). В балке к точке В приложена сила $F=20$ кН под углом 60° к горизонту. Определить реакцию стержня в точке С.

Балка находится в равновесии под действием трех сил F , T_C , R_A . В соответствие со следствием к аксиоме параллелограмма, линии действия сил пересекаются в одной точке в случае равновесия сил, приложенных к телу. Точка пересечения находится на продолжении линий действия сил F и T_C .

Используя графоаналитический способ, из треугольника ABC теореме синусов находим: $T_C = F \sin 120^\circ / \sin 30^\circ = 34,64 \text{ кН}$.

Для нахождения реакции T_C аналитическим способом, составим уравнения равновесия на оси декартовой системы координат:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0: -R_A \sin 30^\circ + F \sin 30^\circ = 0; \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 0: T_C - R_A \cos 30^\circ - F \cos 30^\circ = 0.$$

Решая систему уравнений, получим: $T_C = 34,64 \text{ кН}$.

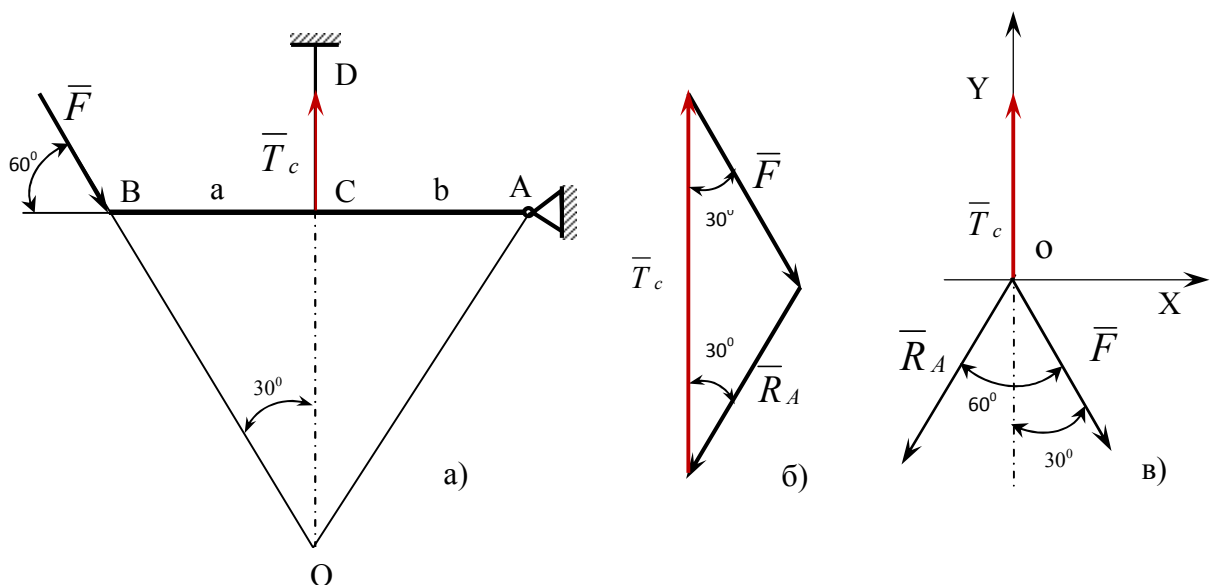


Рис. 11. Способы определения сил: а - расчетная схема сил, приложенных к балке; б - графоаналитический способ; в - аналитический способ