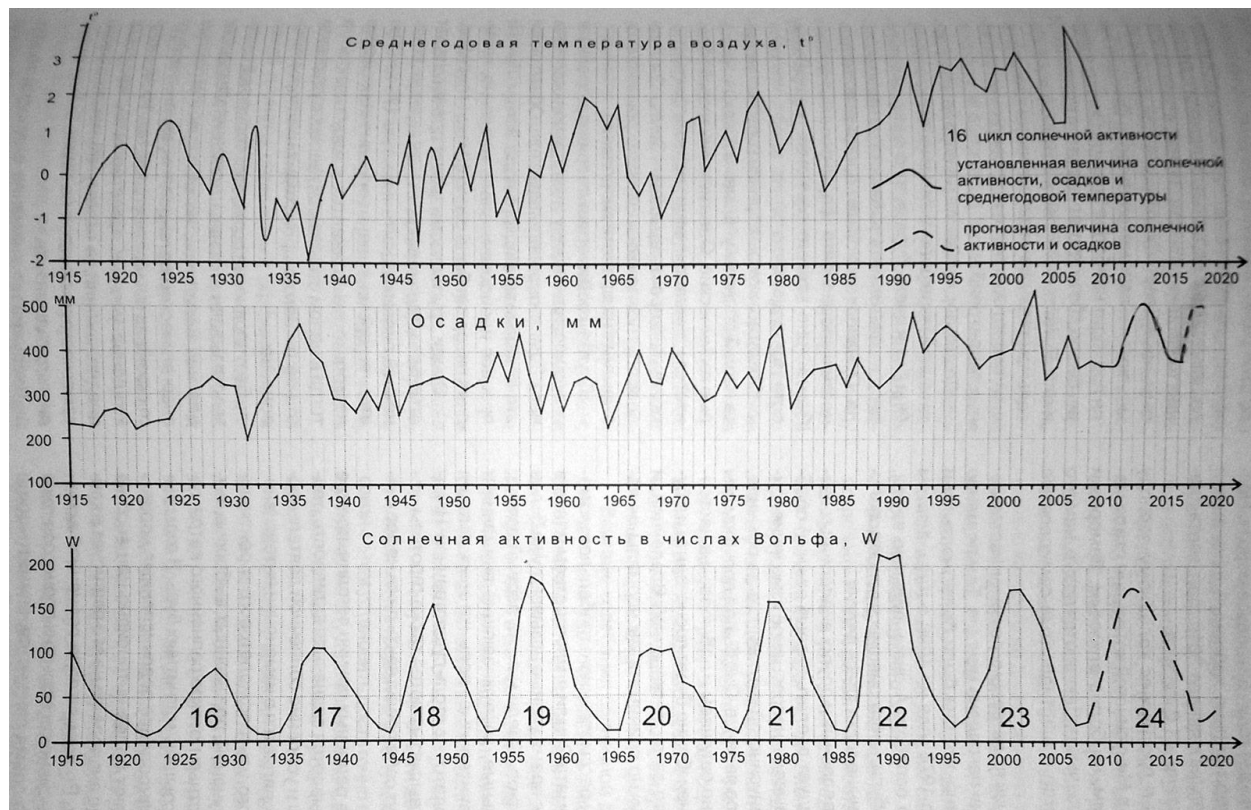


Колебательные процессы

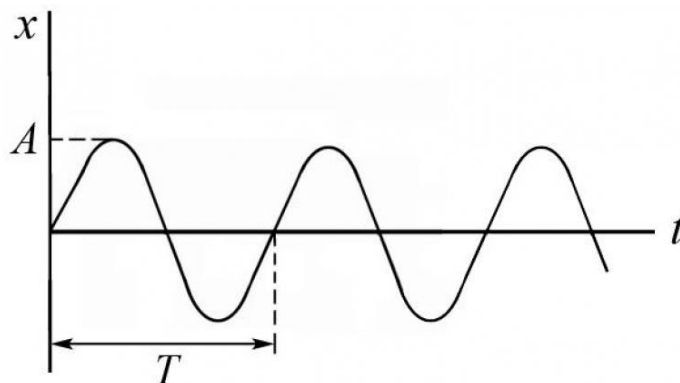
Колебания – это периодические изменения какого-либо параметра, характеризующего состояние системы.



Гармонические колебания (идеализированная модель) – простейший вид колебаний, при котором переменный параметр x изменяется с течением по закону косинуса или синуса.

Уравнение гармонических колебаний:

$$x = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) \text{ или } x = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0).$$



Условия существования гармонических колебаний:

- а) наличие в системе состояния устойчивого равновесия;
- б) возникновение «квазиупругой силы», прямо пропорциональной отклонению системы от состояния равновесия и возвращающей систему в состояние равновесия;
- в) наличие инертных свойств у системы, благодаря которым колебательный процесс не прекращается в тот момент, когда система проходит через состояние равновесия.

Основные типы колебаний:

- собственные незатухающие колебания;
- свободные затухающие колебания;
- вынужденные незатухающие колебания;
- автоколебания.

Период колебаний T – величина, характеризующая периодическую повторяемость колебательного процесса во времени, численно равная промежутку времени, за который происходит полный цикл колебаний (то есть система возвращается в исходное состояние).

Частота колебаний (линейная) ν – величина, характеризующая периодическую повторяемость колебательного процесса во времени, численно равная количеству полных циклов колебаний, совершаемых в единицу времени.

Циклическая частота колебаний ω – величина, численно равная количеству полных циклов колебаний, совершаемых за 2π единиц времени.

Амплитуда колебаний $A = |x^{\max}|$ – величина, численно равная модулю максимального отклонения от состояния равновесия параметра x (в уравнении колебаний 1.2).

Фаза колебаний $\varphi = (\omega \cdot t + \varphi_0)$ – аргумент косинуса или синуса в уравнении колебаний, содержащий время.

Эту величину иногда называют угловой мерой времени, она характеризует состояние системы в данный момент времени по отношению к состоянию, определяемому амплитудным значением параметра x .

$\varphi_1 = (\omega_0 \cdot t_1 + \varphi_0) = \pi/6,$	$x_1 = A \cdot \sin \pi/6 = 0,5 \text{ A}$
$\varphi_2 = (\omega_0 \cdot t_2 + \varphi_0) = \pi/4$	$x_2 = 0,71 \text{ A}$
$\varphi_3 = (\omega_0 \cdot t_3 + \varphi_0) = \pi/3$	$x_3 = 0,87 \text{ A}$

Начальная фаза колебаний φ_0 – фаза колебаний при $t = 0$.

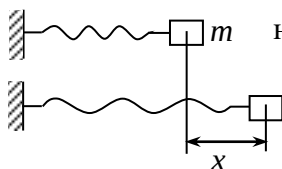
Связи между параметрами колебаний

$$\nu = \frac{1}{T}; \quad \omega = 2\pi\nu; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

1.2. Собственные незатухающие гармонические колебания

Собственные незатухающие колебания – гармонические колебания, происходящие в системе под действием «квазиупругой силы» при отсутствии сопротивления.

Упругий маятник – грузик на пружине, массой которой можно пренебречь, находящийся на гладкой горизонтальной поверхности



Состояние устойчивого равновесия – пружина не деформирована ($\sum F = 0$);

Параметр, характеризующий отклонение системы от состояния равновесия- x – смещение груза, совпадающее с деформацией пружины

«Квазиупругая сила»- сила упругости (при малых деформациях пружины) $F_{\text{упр}} = -k \cdot x$;

Характеристика инертных свойств системы : m – масса груза

по второму закону Ньютона создаёт ускорение: $a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m} \cdot x$.

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

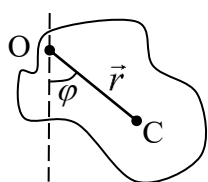
$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 \cdot x \quad \text{или} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0.$$

$$x = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) \text{ или } x = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0).$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ частота свободных колебаний зависит от свойств самой}$$

$$\text{системы – коэффициента жесткости пружины и массы груза} \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Физический маятник – любое тело, имеющее горизонтальную ось вращения, не проходящую через центр масс



Состояние устойчивого равновесия: Ось вращения и центр масс находятся на одной вертикали ($\sum M = 0$);

Параметр, характеризующий отклонение системы от состояния равновесия: φ - угол отклонения

«Квазиупругая сила»- Момент силы тяжести (при малых углах отклонения) $M = -mgr \cdot \varphi$;
Характеристика инертных свойств системы- I – момент инерции тела

$$\varepsilon = \frac{\sum M}{I} = \frac{-mgr\varphi}{I}$$

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \omega_0^2 = \frac{mgr}{I} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \varphi = 0.$$

$$\varphi = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) \text{ или } \varphi = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0).$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgr}{I}} \text{ частота свободных колебаний зависит от свойств самой}$$

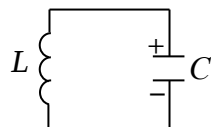
$$\text{системы – массы тела, расстоянием от центра масс до оси вращения тела и}$$

$$\text{момента инерции тела} \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgr}}$$

Математический маятник (частный случай)- осциллятор, представляющий собой механическую систему, состоящую из материальной точки на конце невесомой нерастяжимой нити или лёгкого стержня и находящуюся в однородном поле сил тяготения.

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Колебательный контур - электрическая цепь, содержащая конденсатор и катушку индуктивности



Состояние устойчивого равновесия-Конденсатор разряжен ($U_c = 0$);
 Параметр, характеризующий отклонение системы от состояния равновесия- q – заряд конденсатора;

«Квазиупругая сила»- разность потенциалов на обкладках конденсатора $U_c = \frac{1}{C} \cdot q$;

Характеристика инертных свойств системы- L – индуктивность катушки

Второе правило Кирхгофа

Уравнения вида (1.1) и (1.2) могут быть получены для любых колебательных систем, находящихся под действием квазиупругой силы. При этом переменный параметр x может иметь разный смысл в зависимости от физической природы процессов, происходящих в колебательной системе

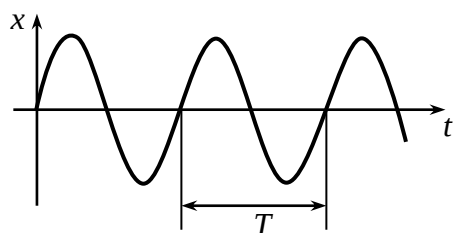


Рис.1.4

(заряд на обкладках конденсатора в колебательном контуре, сила тока, протекающего по катушке индуктивности, угол отклонения физического маятника от положения равновесия и т.д.). Факторы влияющие на частоту колебаний в некоторых простых колебательных системах

отражены в формулах (1.11).

Основным признаком гармонических колебаний, описываемых уравнением (1.2), является повторяемость значений параметра x через равные интервалы времени, что отражено на рисунке 1.4.

1.2.2. Понятийный аппарат (основные характеристики колебаний)

Если взять производную по времени от выражения, определяющего

фазу колебаний, с учетом физического смысла производной, получим, что циклическая частота колебаний численно равна скорости изменения фазы колебаний:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.4)$$

1.2.3. Основные законы и соотношения при описании гармонических колебаний

При существовании колебательного процесса в системе периодически могут изменяться разные параметры, например, для грузика на пружине по гармоническому закону изменяется не только его смещение от положения равновесия, но и его скорость и ускорение. В колебательном контуре изменяется заряд и напряжение на обкладках конденсатора, а также сила тока в катушке. При этом фазы колебаний разных величин могут не совпадать. Проиллюстрируем фазовые и амплитудные соотношения между параметрами системы на примере упругого маятника.

Кинематические законы гармонических колебаний

Предположим, что смещение меняется с течением времени по закону синуса без начальной фазы:

$$x = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t). \quad (1.5)$$

Закон скорости может быть найден как первая производная от закона смещения по времени:

$$v = \frac{dx}{dt} = A \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \text{ или } v = v^{\max} \sin\left(\omega_0 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (1.6)$$

Закон ускорения найдется как первая производная от закона скорости по времени:

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \text{ или } a = a^{\max} \sin(\omega_0 \cdot t + \pi). \quad (1.7)$$

Сравнивая между собой законы (1.5), (1.6), (1.7), приходим к следующим выводам:

– между колебаниями смещения и скорости существует сдвиг по фазе

на $\pi/2$;

– между колебаниями ускорения и скорости существует сдвиг по фазе на $\pi/2$;

– между колебаниями смещения и ускорения существует сдвиг по фазе на π ;

– амплитудное значение скорости и амплитуда смещения связаны соотношением

$$v^{\max} = A\omega_0; \quad (1.8)$$

– амплитудное значение ускорения и амплитуда смещения связаны соотношением

$$a^{\max} = A\omega_0^2; \quad (1.9)$$

– ускорение в любой момент времени пропорционально смещению и противоположно ему направлено

$$a = -\omega_0^2 \cdot x. \quad (1.10)$$

Циклическая частота и период собственных колебаний в простейших колебательных системах

$$\left. \begin{array}{l} \text{Упругий маятник : } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \\ \text{Физический маятник : } \omega_0 = \sqrt{\frac{mgr}{I}}; T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr}} \\ \text{Математический маятник : } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}; T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \\ \text{Колебательный контур : } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}; T = 2\pi\sqrt{LC} \end{array} \right\}. \quad (1.11)$$

Обратим внимание на то, что в случае собственных колебаний частота (и период) зависит от параметров колебательной системы (массы тела, длины нити, электроёмкости конденсатора и т. п.)

Энергия гармонических колебаний

Потенциальная энергия при упругих деформациях вычисляется

$$W_p = \frac{kx^2}{2} \text{ или с учетом (1.5) и введенных ранее обозначений } \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

$$W_p = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 \cdot t). \quad (1.12)$$

Кинетическая энергия вычисляется $W_k = \frac{dv^2}{dt}$ или с учетом (1.6) и (1.8)

$$W_k = \frac{1}{2} = m \omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 \cdot t). \quad (1.13)$$

Полная энергия складывается из кинетической и потенциальной. Учитывая, что в тот момент, когда кинетическая энергия равна нулю, потенциальная энергия принимает максимальное значение и наоборот, можно утверждать, что полная энергия численно равна максимальному значению кинетической энергии либо максимальному значению потенциальной энергии: $W = W_k + W_p = W_k^{\max} = W_p^{\max}$, а с учетом (1.12) и (1.13) получаем

$$W = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2. \quad (1.14)$$

На основании (1.12), (1.13), (1.14) можно сделать следующие выводы:

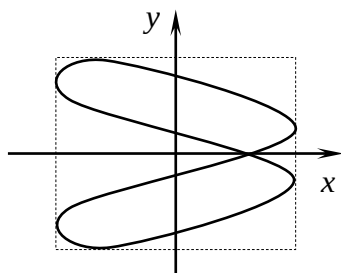
- *потенциальная энергия изменяется с частотой в два раза большей, чем смещение* (т.к. частота изменений функции $\sin^2 \varphi$ в два раза больше, чем частота изменений $\sin \varphi$);
- *кинетическая энергия изменяется с частотой в два раза большей, чем скорость* (т.к. частота изменений функции $\cos^2 \varphi$ в два раза больше, чем частота изменений $\cos \varphi$);
- полная энергия гармонических колебаний прямо пропорциональна квадрату амплитуды смещения;
- полная энергия гармонических колебаний прямо пропорциональна квадрату частоты колебаний;
- полная энергия гармонических колебаний (а значит и амплитуда колебаний) не зависит от времени – колебания не затухающие.

Эти выводы относятся к колебаниям любой физической природы, а не только к поведению упругого маятника.

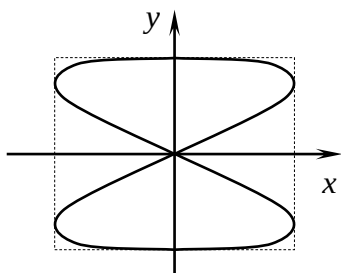
1.3. Сложение гармонических колебаний

Гармонические колебания – это не только простейший вид колебаний, но и основа любого сложного периодически повторяющегося процесса. Согласно теореме Фурье любое сложное колебание (и более широко – любую периодическую функцию) можно представить как сумму нескольких гармонических колебаний, подбирая особым образом амплитуды, частоты и фазы складываемых колебаний (методика гармонического анализа сложного колебания рассматривается в курсе математики). Может возникать и обратная задача: определение закона результирующего колебания в ситуации, когда система участвует одновременно в двух или нескольких гармонических колебаниях (задача о сложении колебаний). Например, в цепях переменного тока при наличии нескольких потребителей колебания

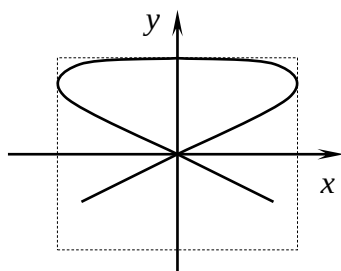
Фигуры Лиссажу



$$\omega_x : \omega_y = 2 : 1; \Delta\varphi = \frac{\pi}{4}$$



$$\omega_x : \omega_y = 2 : 1; \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$$



$$\omega_x : \omega_y = 3 : 2; \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$$

токов и напряжений на разных участках цепи могут не совпадать по фазе и по амплитуде, при этом важно заранее предвидеть параметры установившихся результирующих колебаний. Существует несколько методов сложения колебаний: графический, аналитический, метод векторных диаграмм.

Графический метод (сложение по точкам с заданным шагом) наиболее универсальный, наиболее наглядный, но и наиболее трудоемкий, обычно этот метод применяется при компьютерном моделировании сложных процессов в колебательных системах.

Аналитический метод (сложение уравнений) дает легко интерпретируемый результат при сложении двух колебаний, различающихся не более чем по двум

Рис. 1.5

параметрам. Например, пусть требуется определить траекторию движения материальной точки, участвующей одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях с амплитудами A_1 и A_2 , с одинаковыми частотами и со сдвигом по фазе на $\frac{\pi}{2}$:

$$x = A_1 \sin(\omega \cdot t); \quad y = A_2 \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = A_2 \cos(\omega \cdot t).$$

Для получения уравнения траектории $y = f(x)$ исключим параметр t из данной системы уравнений. Разделим первое уравнение на A_1 , второе – на A_2 , возведем полученные уравнения в квадрат и сложим их: $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$ – получаем уравнение эллипса, полуоси которого совпадают с осями координат. Движение по такой траектории называют эллиптически поляризованными колебаниями.

Результатом сложения взаимно перпендикулярных колебаний с разными частотами ($x = A_1 \cos(k\omega \cdot t + \varphi_{01})$; $y = A_2 \cos(n\omega \cdot t + \varphi_{02})$, где k и n – целые числа) являются замкнутые фигуры Лиссажу (см. рис 1.5).

При этом число точек пересечения фигуры Лиссажу с осями координат (N_x и N_y) обратно пропорционально соответствующим частотам (ω_x и ω_y),

$$\text{то есть } \frac{N_x}{N_y} = \frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{n}{k}.$$

Метод векторных диаграмм для сложения колебаний в курсе физики имеет наибольшее применение. Этот метод позволяет заменить процедуру сложения уравнений сложением векторов, что в случае сложения колебаний одного направления с одинаковыми частотами существенно ускоряет решение и делает результат более наглядным. Рассмотрим сущность метода.

Пусть есть вектор $\vec{A}$, вращающийся вокруг оси, проходящей через точку O , с постоянной угловой скоростью ω (см. рис 1.6). Проекция этого вектора на ось x может

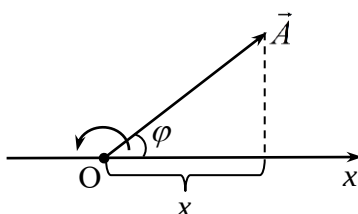


Рис.1.6

быть найдена, как $x = A \cos \varphi$, причем при равномерном вращении согласно кинематическим законам $\varphi = \omega \cdot t + \varphi_0$, тогда $x = A \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$ – что совпадает с уравнением гармонических колебаний. Таким образом, между параметрами вращающегося вектора и параметрами гармонических колебаний существует взаимно однозначное соответствие:

- амплитуда колебаний соответствует длине вектора;
- циклическая частота соответствует угловой скорости вращения вектора;
- фаза колебаний соответствует углу φ определяющему положение вектора в пространстве в данный момент времени.

Примечание: при сложении колебаний с одинаковыми частотами по методу векторных диаграмм взаимное расположение векторов не меняется при их вращении, поэтому положение вектора по отношению к выбранной оси обычно определяется *начальной* фазой колебаний φ_0 . При сложении колебаний амплитуда и фаза результирующего колебания находятся по тем же правилам соответствия на основании геометрической теоремы: проекция суммы векторов равна сумме проекций этих векторов.

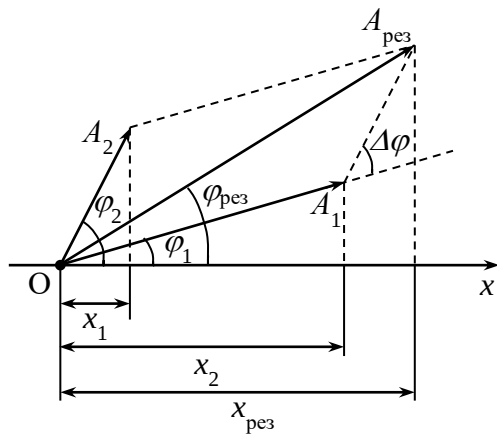


Рис.1.7

диаграммы:

На рисунке 1.7 представлено сложение колебаний, описываемых уравнениями $x_1 = A_1 \cos(\omega \cdot t + \varphi_1)$ и $x_2 = A_2 \cos(\omega \cdot t + \varphi_2)$.

Уравнение результирующего колебания имеет вид

$$x_{\text{рез}} = x_1 + x_2 = A_{\text{рез}} \cos(\omega \cdot t + \varphi_{\text{рез}}),$$

где $A_{\text{рез}}$ и $\varphi_{\text{рез}}$ находятся из векторной

$$A_{\text{рез}}^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi, \quad (1.15)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{рез}} = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}, \quad (1.16)$$

где $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ – разность фаз складываемых колебаний.

1.4. Свободные затухающие колебания

Свободные затухающие колебания – колебания, происходящие в системе под действием «квазиупругой силы» при наличии сопротивления, пропорционального скорости.

1.4.1. Дифференциальное уравнение и его решение

Рассмотрим дифференциальное уравнение колебаний на примере упругого горизонтального маятника. На грузик в направлении оси x действуют две силы: сила упругости $F_{\text{упр}} = -k \cdot x$ и сила сопротивления, подчиняющаяся закону Стокса $F_{\text{сопр}} = -b \cdot v$. По второму закону Ньютона $-k \cdot x - b \cdot v = ma$.

Учитывая, что ускорение численно равно второй производной от смещения по времени $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, а скорость – это первая производная $v = \frac{dx}{dt}$, и

вводя обозначения $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ и $\frac{b}{m} = 2\beta$, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - 2\beta \frac{dx}{dt} \text{ или } \frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.17)$$

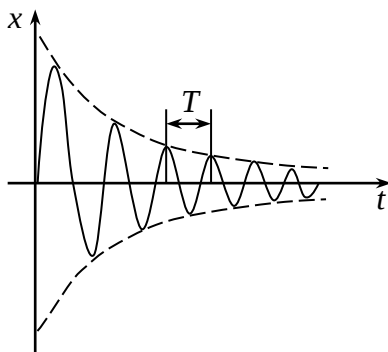


Рис.1.8

Из математики известно, что решением данного дифференциального уравнения при $\beta \ll \omega_0$, является функция вида:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega \cdot t + \varphi_0), \quad (1.18)$$

где

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2. \quad (1.19)$$

Графически закон изменения $x(t)$, соответствующий этому уравнению, представлен на рисунке 1.8.

1.4.2. Понятийный аппарат и основные соотношения

Амплитуда затухающих колебаний $A = A_0 e^{-\beta t}$ (коэффициент перед гармоническим членом в уравнении (1.18)), которая в отличие от случая собственных колебаний не остается постоянной, а убывает с течением времени по экспоненциальному закону (см рис. 1.9).

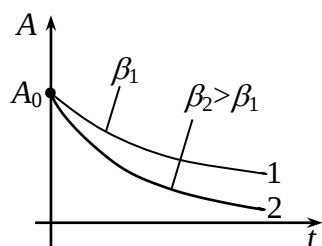


Рис.1.9

Период затухающих колебаний T . Затухание нарушает периодичность колебаний, но если затухание мало, то можно использовать понятие

период колебаний как промежуток времени между двумя последовательными максимумами (или минимумами) колеблющейся величины (см. рис. 1.8).

Частота затухающих колебаний ω меньше частоты собственных колебаний, которые могли бы существовать в системе при отсутствии сопротивления: $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$.

Время релаксации ϕ – промежуток времени, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз $\left(\frac{A_0}{A} = e \right)$.

Коэффициент затухания ν – величина, определяющая скорость затухания. Так на рисунке 1.9 второй график относится к ситуации с большим коэффициентом затухания. Коэффициент затухания зависит от коэффициента сопротивления и инертных свойств системы:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для упругого маятника } \beta = \frac{b}{2m} \\ \text{для колебательного контура } \beta = \frac{R}{2L} \end{array} \right\}. \quad (1.20)$$

Логарифмический декремент затухания $\delta = \ln \left(\frac{A(t)}{A(t+T)} \right)$ – величина,

используемая для характеристики скорости затухания, численно равная логарифму отношения двух соседних амплитуд колебаний (разделенных по времени периодом колебаний).

Связи между параметрами затухающих колебаний:

$$\tau = \frac{1}{\beta}; \quad \delta = \beta \cdot T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}, \quad (1.21)$$

где N – число колебаний, совершаемых за время, в течение которого амплитуда уменьшается в e раз.

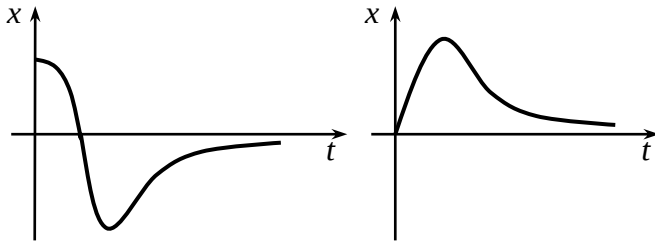


Рис.1.10

Апериодическое затухание – процесс, при котором система, выведенная из состояния равновесия, возвращается в это состояние

без возникновения колебаний (см. рис. 1.10). Это возможно, когда сопротивление в системе превышает некоторое критическое значение.

Критическое значение коэффициента затухания легко устанавливается из уравнения 1.19: при $\beta_{кр} = \omega_0$ частота колебаний $\omega = 0$, то есть колебания в системе становятся невозможными. Используя (1.11) и (1.20), можно определить **критические значения коэффициентов сопротивления**:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для упругого маятника } b_{кр} = 2\sqrt{km} \\ \text{для колебательного контура } R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \end{array} \right\}$$