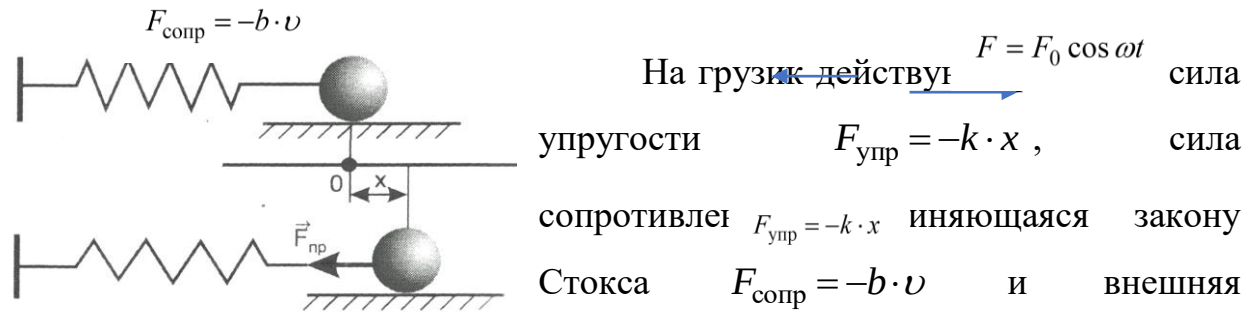


Вынужденные колебания

Вынужденные колебания – незатухающие колебания, происходящие в системе под действием «квазиупругой силы» при наличии сопротивления, когда потери энергии восполняются за счет источника внешней силы, изменяющейся по гармоническому закону.



периодическая сила $F = F_0 \cos \omega t$.

По второму закону Ньютона $-k \cdot x - b \cdot v + F_0 \cos \omega t = ma$.

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad v = \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{b}{m} = 2\beta$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega \cdot t.$$

Решение данного неоднородного дифференциального уравнения для случая установившихся колебаний имеет вид:

$$x = A \cos(\omega \cdot t - \varphi).$$

– Амплитуда вынужденных колебаний (A) в уравнении не зависит от времени – колебания не затухающие.

– В отличие от собственных колебаний частота вынужденных колебаний ω не зависит от параметров системы и совпадает с частотой действующей внешней периодической силы.

– Фаза колебаний смещения не совпадает с фазой изменения внешней периодической силы.

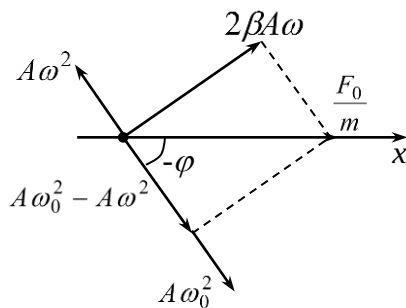
– Амплитуда установившихся колебаний зависит от параметров системы и частоты.

$$x = A \cos(\omega t - \varphi),$$

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t - \varphi) = A\omega \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t - \varphi) = A\omega^2 \cos(\omega t - \varphi + \pi),$$

$$A\omega^2 \cos(\omega \cdot t - \varphi + \pi) + 2\beta A\omega \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + A\omega_0^2 \cos(\omega t - \varphi) = \frac{F_0}{m} \cos \omega \cdot t.$$

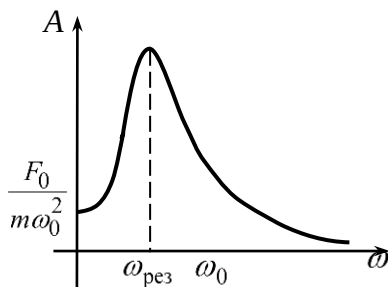


$$\left(\frac{F_0}{m}\right)^2 = (A\omega_0^2 - A\omega^2)^2 + (2\beta A\omega)^2,$$

$$A = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\beta^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}.$$

$$v^{\max} = A\omega,$$

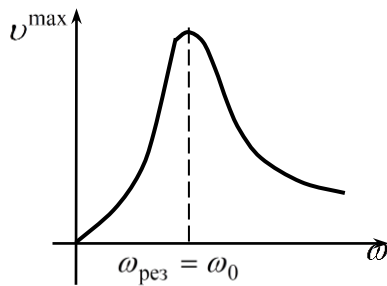
$$v^{\max} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\beta^2 + \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^2}}}.$$



При вынужденных колебаниях существуют особые условия, при которых амплитуда смещения и амплитуда скорости могут принимать максимальные значения – то есть возникают *резонансные явления*

– Условие возникновения резонанса смещения:

$$\omega_{\text{рез}}^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2.$$



– Условие возникновения резонанса скорости:

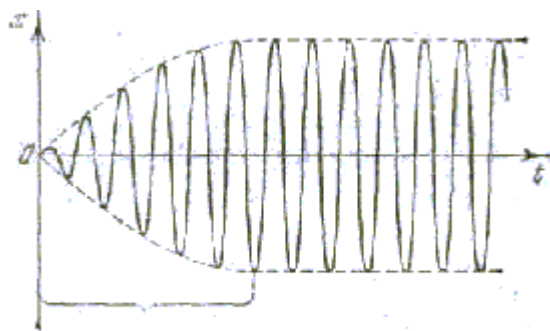
$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0.$$

При $2\beta^2 \geq \omega_0^2$ резонанс не наступает.

– Критические значения сопротивления, при которых резонанс в системе невозможен:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для упругого маятника } b_{\text{кр}} = \sqrt{2km} \\ \text{для колебательного контура } R_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2L}{C}} \end{array} \right\}$$

$$x = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos(\omega \cdot t + \phi)$$



Установление колебаний

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{2\beta A \omega}{A(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$A_{\text{рез}} = \frac{x_0}{2\beta\omega_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} \cdot \frac{x_0}{\omega_0^2} = Q \frac{x_0}{\omega_0^2}$$

Переменный ток, как вынужденные колебания

Идеализированные модели:

а) Идеальный резистор – это проводник, индуктивностью и ёмкостью которого мы пренебрегаем.

б) Идеальная катушка – это проводник, активным сопротивлением и ёмкостью которого мы пренебрегаем

в) Идеальный конденсатор – это система двух проводников, разделенных диэлектриком, индуктивностью и активным сопротивлением которых мы пренебрегаем.

Внешняя периодическая «сила», задающая частоту колебаний в цепи – это напряжение, передаваемое от источника тока в цепь и изменяющееся по гармоническому закону: $U = U_0 \cos \omega t$.

Активное (омическое) сопротивление $R_a = \frac{\rho \cdot l}{S}$,

Индуктивное сопротивление $R_L = \omega L$.

$$L = \mu_0 \mu \cdot n^2 \cdot V$$

Ёмкостное сопротивление $R_C = \frac{1}{\omega C}$.

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$$

Основные законы и соотношения для цепей переменного тока

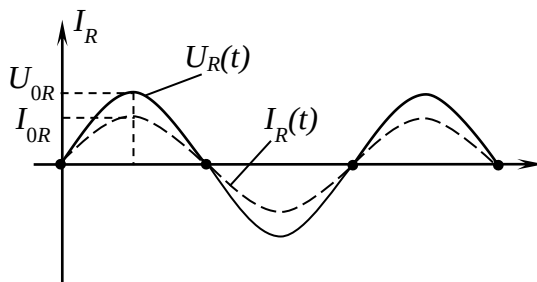
1. Идеальный резистор в цепи переменного тока



$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_{0R}}{R} \cos \omega \cdot t = I_{0R} \cos \omega \cdot t$$

Сила тока и напряжение изменяются в одинаковых фазах.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Закон изменения напряжения: } U_R = U_{0R} \cos \omega \cdot t \\ \text{Закон изменения тока: } I_R = I_{0R} \cos \omega \cdot t \end{array} \right\}$$



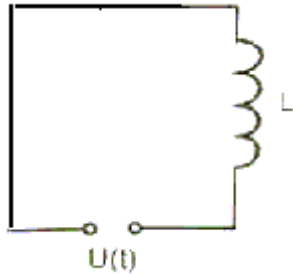
$$\begin{array}{c} I_{0R} \quad U_{0R} \\ \longrightarrow \end{array}$$

Связь между амплитудными значениями тока и напряжения имеет

вид:

$$I_{0R} = \frac{U_{0R}}{R_a}.$$

2. Идеальная катушка в цепи переменного тока



$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}$$

$$U_{0L} \cos \omega t - L \frac{dI}{dt} = 0$$

$$L \frac{dI}{dt} = U_{0L} \cos \omega t$$

$$U_L = L \frac{dI}{dt}$$

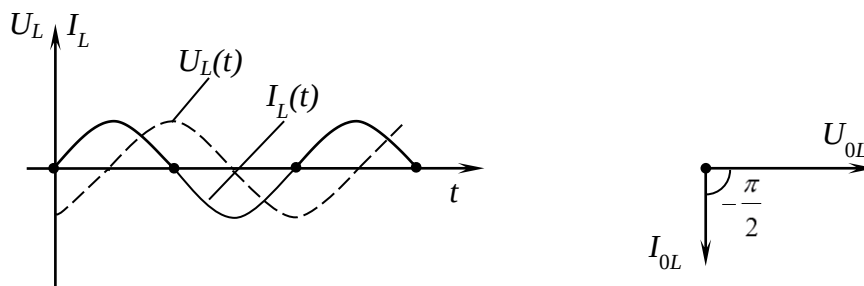
$$dI = \frac{U_{0L}}{L} \cos \omega \cdot t \cdot dt \quad I = \frac{U_{0L}}{\omega L} \sin \omega \cdot t = I_{0L} \cos(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2})$$

$$U_L = \omega L I_{0L} \cos \omega \cdot t$$

Колебания тока отстают от колебаний напряжения по фазе на $\frac{\pi}{2}$

вследствие действия ЭДС самоиндукции.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Закон изменения напряжения: } U_L = U_{0L} \cos \omega t \\ \text{Закон изменения тока } I_L = I_{0L} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \end{array} \right\}.$$

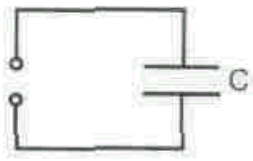


Связь между амплитудными значениями тока и напряжения имеет вид:

$$I_{0L} = \frac{U_{0L}}{R_L} = \frac{U_{0L}}{\omega L}.$$

3. Идеальный конденсатор в цепи переменного тока

$$\frac{q}{C} = U_{0C} \cos \omega t$$



$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{dU_{0C}}{dt} \cos \omega \cdot t = -\omega C U_{0C} \sin \omega t$$

$$U = IR = \omega C U_{0C} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

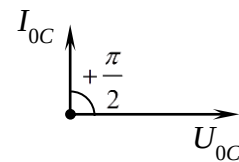
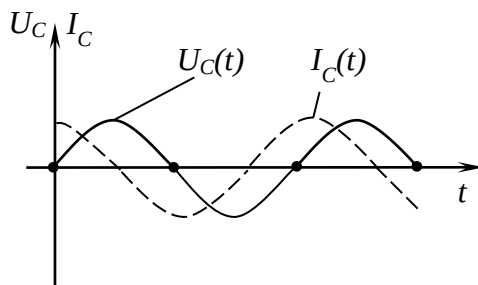
$$U_C = \frac{1}{\omega C} I_{0C} \cos \omega t$$

Колебания тока опережают колебания напряжения по фазе на $\pi/2$.

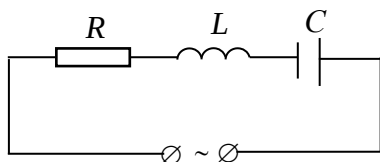
$$\left. \begin{array}{l} \text{Закон изменения напряжения: } U_{0C} = U_{0C} \cos \omega \cdot t \\ \text{Закон изменения силы тока: } I_C = I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right\}$$

Связь между амплитудными значениями тока и напряжения имеет вид:

$$I_{0C} = \frac{U_{0C}}{R_C} = U_{0C} \omega C.$$



4. Цепь переменного тока с последовательным соединением резистора, катушки и конденсатора



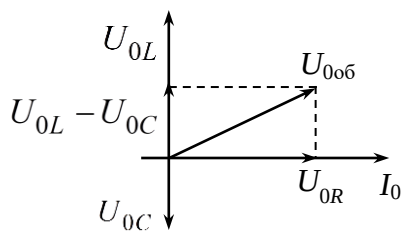
$$I = I_0 \sin \omega \cdot t.$$

$$U_R = U_{0R} \sin \omega \cdot t \quad (').$$

$$U_L = U_{0L} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (').$$

$$U_C = U_{0C} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (').$$

$$U_{0\phi} = U_{0\phi} \sin(\omega t + \varphi).$$



$$U_{0o6} = U_R + U_L + U_C.$$

$$U_{0o6} = \sqrt{U_{0R}^2 + (U_{0L} - U_{0C})^2};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{0L} - U_{0C}}{U_{0R}}.$$

$$U_{0o6} = I_0 Z,$$

– закон для нахождения полного сопротивления цепи при последовательном соединении R , L и C :

$$Z_{0o6} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}.$$

– закон Ома для цепи переменного тока при последовательном соединении R , L и C :

$$I_0 = \frac{U_{0o6}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}};$$

– закон для нахождения сдвига фаз между током и напряжением в цепи с последовательным соединением R , L и C :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R_L - R_C}{R_a} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R_a}.$$

5. Резонанс в цепи переменного тока.

$$\omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C},$$

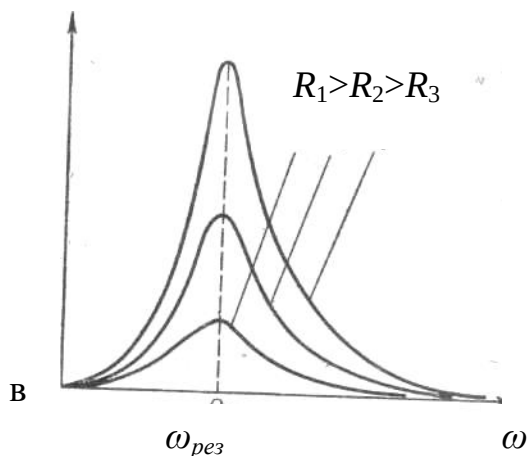
$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}};$$

– амплитудное значение тока в момент резонанса:

$$I_{0\text{рез}} = \frac{U_{0o6}}{R_a};$$

– напряжение на конденсаторе в момент резонанса:

$$U_{0C} = I_{0\text{рез}} R_C = \frac{I_{0\text{рез}}}{\omega_{\text{рез}} C} = \frac{U_{0o6}}{R_a} \sqrt{\frac{L}{C}},$$

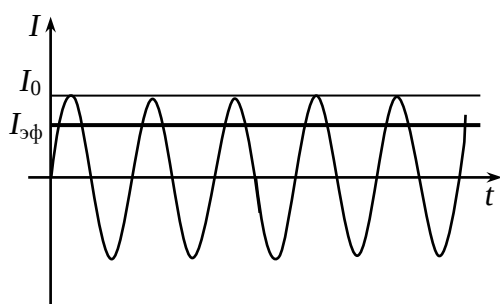


где $\frac{1}{R_a} \sqrt{\frac{L}{C}} = \theta$ – добротность контура.

При $\theta > 1$, $U_{0C} = \theta \cdot U_{0об} > U_{0об}(!)$, то есть при добротности контура больше единицы в момент резонанса напряжение на конденсаторе превышает общее напряжение цепи.

6. Мощность в цепи переменного тока

Квазистационарный ток – это переменный ток, существующий при условии, что время распространения электромагнитного возмущения по цепи длиной l при скорости c (скорости света) значительно меньше периода колебаний тока.



Эффективные (действующие) значения переменного тока и напряжения определяются как их среднеквадратичные значения за период колебаний

$$I_{эф} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$I_{эф} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}; U_{эф} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

– для мгновенного значения мощности:

$$p = IU = I_0 U_0 \sin \omega t \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} I_0 U_0 [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)].$$

$$\langle \cos(2\omega t + \varphi) \rangle = 0, \quad I_{эф} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad U_{эф} = \frac{U_0}{\sqrt{2}},$$

для среднего значения мощности:

$$\langle p \rangle = I_{эф} \cdot U_{эф} \cdot \cos \varphi,$$

где $\cos \varphi$ – коэффициент мощности.

При чисто активном сопротивлении цепи, когда сдвиг фаз между током

и напряжением $\varphi = 0$, средняя потребляемая мощность максимальна:
 $\langle p \rangle = I_{\text{эф}} \cdot U_{\text{эф}}$. При реактивной нагрузке (индуктивное и/или ёмкостное сопротивление), когда сдвиг фаз между током и напряжением $\varphi = \frac{\pi}{2}$, средняя потребляемая мощность $\langle p \rangle = 0$.