

Лекция. Статически неопределимые системы. Суть метода сил.

При расчёте статически *неопределимых* систем *рассчитывают не заданную систему, а преобразованную*, которая должна быть эквивалентна ей, то есть все усилия и перемещения в эквивалентной системе (э.с.) должны быть такими же, как и в заданной.

Условия эквивалентности заданной и преобразованной систем выполняются при соблюдении принципа заменяемости связей, то есть:

1. Любая i – я связь может быть удалена, если вместо неё приложена обобщенная сила X_i , и принято, что взаимное перемещение равно нулю $\Delta_i = 0$.
2. Любая i – я связь может быть введена, если при этом введённая связь получит перемещение Z_i , и будет принято, что реакция в этой связи равна нулю $R_i = 0$.

Система, полученная из заданной системы путём удаления или введения связей, называется *основной системой* (о.с.), а соответствующие ей неизвестные X_i и Z_i - основными неизвестными.

Условие кинематической эквивалентности (неизвестные X_i): обобщенное перемещение в удалённой i – ой связи от действия на эквивалентную систему неизвестных X_i и внешней нагрузки равно нулю $\Delta_i(x_1, x_2, \dots, F) = 0$ - *уравнение перемещений*.

Условие статической эквивалентности (неизвестные Z_i): обобщённая реакция во введённой i – ой связи от действия на эквивалентную систему нагрузки и неизвестных Z_i должна быть равна нулю $R_i(z_1, z_2, \dots, F) = 0$ - *уравнение равновесия*.

Из решения системы **канонических** (алгебраических) уравнений перемещений или равновесия определяются соответственно *неизвестные* X_i и Z_i .

Метод сил.

Метод сил рассматривался в работах: Навье (1785-1836г.г.), Максвелла (1864г.), Л.В. Кирпичёва (1900-1903г.г.).

Принципиальные и практические основы метода сил применяются и в других методах расчёта конструкций.

Суть метода сил.

1. Устанавливает общее число неизвестных, в том числе и лишних.
2. Заданная система *заменяется основной* - статически определимой и геометрически неизменяемой системой, полученной удалением лишних связей из заданной системы.

Основных систем метода сил можно выбрать несколько. Наиболее рациональная основная система должна удовлетворять требованиям:

- статической определенности и обязательно геометрической неизменяемости;
 - единичные $\bar{M}_i$ и грузовые M_F эпюры имели как можно меньшее распространение по элементам основной системы и как можно больше побочных коэффициентов (перемещений) равнялось нулю.
3. Основная система загружается заданной внешней нагрузкой и лишними неизвестными X_i по направлению удалённых связей, получается система эквивалентная заданной.
4. Значения лишних неизвестных подбираются так, чтобы перемещения эквивалентной системы были равны перемещениям заданной.

Способы удаления лишних связей: отбрасывание опорных связей; включение шарнира, соответствующее удалению одной связи, а именно момента; проведение разреза по шарниру, эквивалентное удалению двух связей: N, Q; разрез стержня, соответствующий удалению трёх связей: N, Q, M.

В зависимости от характера лишних связей (внешних или внутренних) в статически неопределимых системах различают:

Число лишних связей L определяет степень статической неопределимости системы n .

Степень статической неопределимости n - это разность между числом неизвестных и числом независимых уравнений статики (степень статической неопределимости $n = L - \Pi$).

Порядок расчёта статически неопределимых систем методом сил.

1. Определение степени статической неопределимости

$$n = 3k - u,$$

2. Выбор основной и эквивалентной заданной систем.
3. Запись системы канонических уравнений.
4. Построение единичных эпюр $\bar{M}_i$ от действия $\bar{x}_i = 1$ в основной системе и вычисление всех коэффициентов канонических уравнений;

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \cdot \bar{M}_k}{EI} dx.$$

5. Построение суммарной единичной эпюры $\bar{M}_s$.

Проверка правильности вычисления коэффициентов δ_{ik} канонических уравнений: $\sum \delta_{ik} = \delta_{ss}$,

где $\sum \delta_{ik} = \delta_{11} + \delta_{12} + \dots + \delta_{21} + \delta_{22} + \dots + \delta_{n1} + \dots + \delta_{nn}$ - сумма всех найденных главных и побочных коэффициентов канонических уравнений;

δ_{ss} - величина, полученная в результате умножения эпюры $\bar{M}_s$ самой на себя; $\delta_{ss} = \sum \int \frac{\bar{M}_s^2}{EI} dx$.

6. Построение грузовой эпюры M_F от действия заданной нагрузки в основной системе и вычисление свободных членов Δ_{iF} канонических уравнений;

$$\Delta_{iF} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \cdot M_F}{EI} dx.$$

7. Проверка правильности вычисления свободных членов Δ_{iF} канонических уравнений: $\sum \Delta_{iF} = \Delta_{SF}$,

где $\sum \Delta_{iF} = \Delta_{1F} + \Delta_{2F} + \dots + \Delta_{nF}$ - сумма всех найденных грузовых коэффициентов; Δ_{SF} - величина, полученная в результате умножения эпюры $\bar{M}_S$ на грузовую

эпюру M_F ; $\Delta_{SF} = \sum \int \frac{\bar{M}_S \cdot M_F}{EI} dx.$

8. Решение системы канонических уравнений и проверка правильности её решения.

9. Построение окончательной эпюры моментов M_{OK} .

$$M_{OK} = \bar{M}_1 x_1 + \bar{M}_2 x_2 + \dots + \bar{M}_n x_n + M_F,$$

где $\bar{M}_1 x_1, \dots, \bar{M}_n x_n$ - исправленные эпюры моментов, полученные в результате умножения единичных эпюр $\bar{M}_i$ на соответствующее значение x_i .

10. Выполнение деформационной проверки. Расхождение между суммой положительных и отрицательных чисел 1-3%.

$$\Delta = \sum \int \frac{\bar{M}_S \cdot M_{OK}}{EI} dx = 0, \text{ или } \Delta = \sum \int \frac{\bar{M}_i \cdot M_{OK}}{EI} dx = 0.$$

11. Построение эпюр Q_{OK} , N_{OK} .

Ординаты эпюры Q для каждого участка системы определяют по эпюре M_{OK} , используя формулу

$$Q = Q_q + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} \text{ или } Q = Q_q + \frac{M_{np.} - M_{лев.}}{l_n},$$

где $Q_q = \pm \frac{ql_n}{2}$ - поперечная сила в сечениях по длине участка, имеющего

расчётную схему в виде простой балки на двух опорах, нагруженной равномерно распределённой нагрузкой;

M_n ($M_{np.}$), M_{n-1} ($M_{лев.}$) – изгибающие моменты соответственно на правом и левом концах участка.

Ординаты эпюры продольных сил N_{OK} определяют из условий равновесия $\sum X = 0$ и $\sum Y = 0$ узлов рамы, вырезаемых из эпюры Q_{OK} .

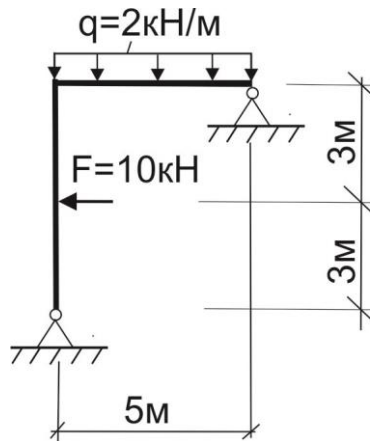
12. Статическая проверка равновесия всей рамы в целом.

$$\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum M = 0.$$

Практика. Расчет статически неопределимых систем методом сил

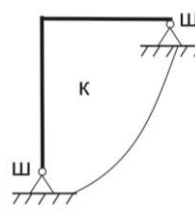
Пример.

Дано: $q=2\text{ кН/м}$; $F=10\text{ кН}$, $I_p = 2 I_c$

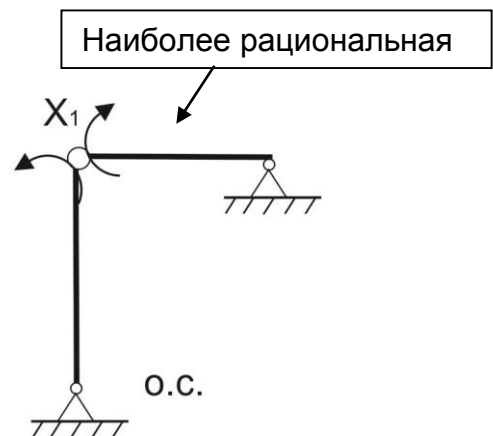
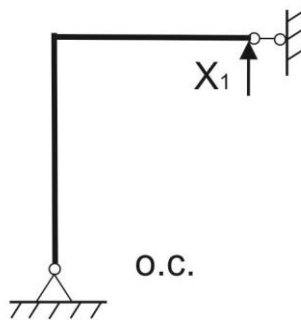
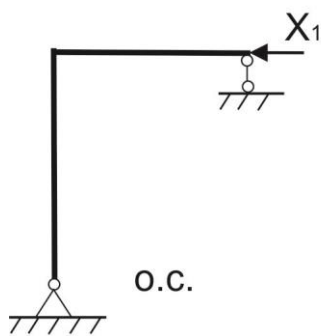


1. Степень статической неопределимости

$$n = 3k - \omega = 3 \cdot 1 - 2 = 1$$



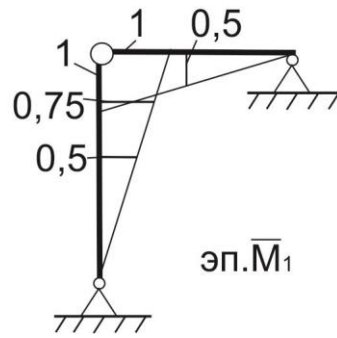
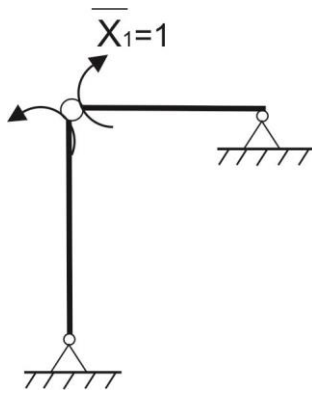
2. Выбор основной системы (о.с.)



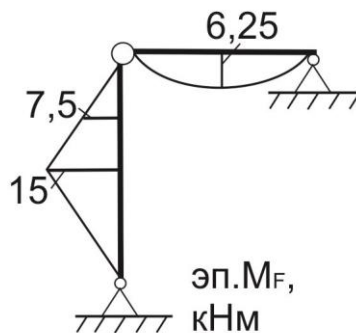
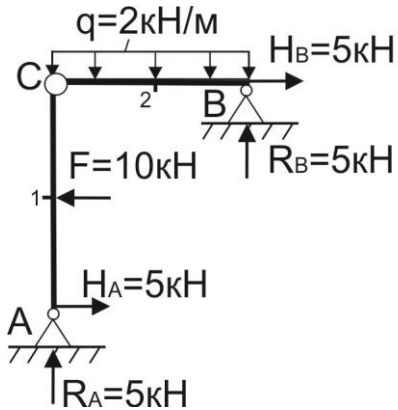
3. Каноническое уравнение метода сил

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

4. Построение эпюры $\bar{M}_1$



5. Построение эпюры M_F ,



Определение опорных реакций

$$\sum M_C^{п.ч.} = 0 \quad H_A \cdot 6 - F \cdot 3 = 0 \quad H_A = \frac{F \cdot 3}{6} = \frac{10 \cdot 3}{6} = 5 \text{ кН.}$$

$$\sum X = 0 \quad H_A - F + H_B = 0 \quad H_B = -H_A + F = -5 + 10 = 5 \text{ кН}$$

$$\sum M_C^{п.ч.} = 0 \quad R_B \cdot 5 - q \cdot 5 \cdot 2,5 = 0 \quad R_B = \frac{q \cdot 5 \cdot 2,5}{5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2,5}{5} = 5 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0 \quad R_A \cdot 5 - q \cdot 5 \cdot 2,5 - H_A \cdot 6 + F \cdot 3 = 0$$

$$R_A = \frac{q \cdot 5 \cdot 2,5 + H_A \cdot 6 - F \cdot 3}{5} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 2,5 + 5 \cdot 6 - 10 \cdot 3}{5} = 5 \text{ кН.}$$

$$M_1 = -H_A \cdot 3 = -5 \cdot 3 = -15 \text{ кНм}$$

$$M_2 = R_B \cdot 2,5 - q \cdot 2,5 \cdot 1,25 = 5 \cdot 2,5 - 2 \cdot 2,5 \cdot 1,25 = 6,25 \text{ кНм}$$

6. Определение δ_{ik} и Δ_{iF} .

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1}{EI} ds = \frac{6}{6EI_c} (2 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{5}{6 \cdot 2EI_c} (2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{1}{6EI_c} (12 + 5) = \frac{17}{6EI_c}$$

$$\Delta_{1F} = \int \frac{\bar{M}_1 \cdot M_F}{EI} ds = -\frac{3}{6EI_c} (2 \cdot 15 \cdot 0,5) - \frac{3}{6EI_c} (15 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,75 \cdot 7,5) +$$

$$+ \frac{5}{6 \cdot 2EI_c} (4 \cdot 0,5 \cdot 6,25) = \frac{1}{6EI_c} (-45 - 90 + 31,25) = -\frac{103,75}{6EI_c}$$

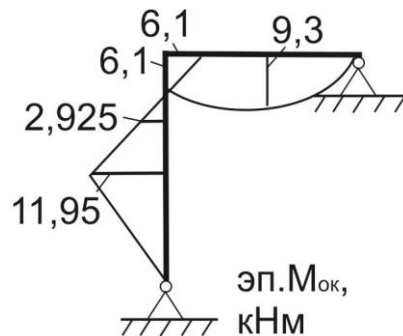
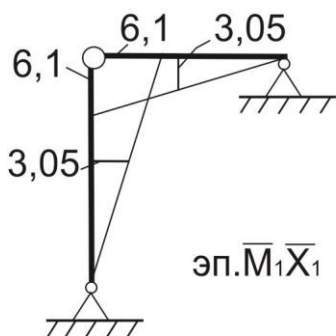
7. Решение канонического уравнения.

$$\frac{17}{6EI_c} \cdot X_1 - \frac{103,75}{6EI_c} = 0$$

$$X_1 = \frac{103,75}{17} = 6,103 \text{ кНм}$$

8. Построение эпюры $M_{ок}$.

$$\text{эп. } M_{ок} = \text{эп. } \bar{M}_1 X_1 + \text{эп. } M_F$$



9. Деформационная проверка.

$$\int \frac{\bar{M}_1 \cdot M_{ок}}{EI} ds = -\frac{3}{6EI_c} (2 \cdot 0,5 \cdot 11,95) - \frac{3}{6EI_c} (11,95 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,75 \cdot 2,925 - 6,1 \cdot 1) +$$

$$+ \frac{5}{6EI_c} (6,1 \cdot 1 + 4 \cdot 0,5 \cdot 9,3) = \frac{1}{6EI_c} (-35,85 - 25,65 + 61,75) =$$

$$= \frac{1}{6EI_c} (-61,8 + 61,75) \approx 0$$

$$\eta = \frac{0,05}{61,8} 100\% = 0,08\% \leq 5\%$$

10. Построение Q , N .

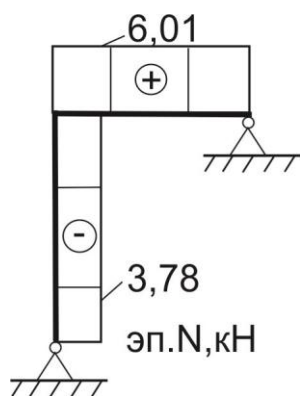
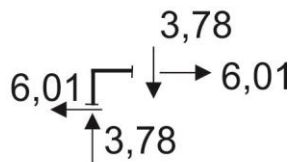
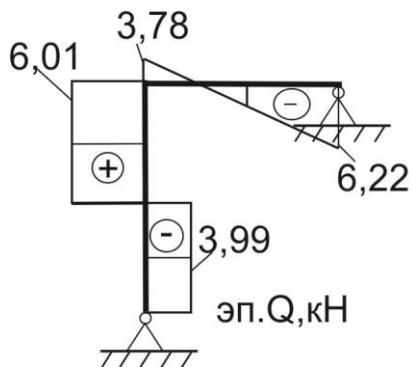
$$Q_i = \pm \frac{ql}{2} + \frac{M_n - M_{n-1}}{l}$$

$$Q_1 = \frac{-11,95}{3} = -3,983 \text{ кН}$$

$$Q_2 = \frac{6,1 + 11,95}{3} = 6,017 \text{ кН}$$

$$Q_2 = \pm \frac{2 \cdot 5}{2} - \frac{6,1}{5} = \pm 5 - 1,22 \quad Q_2^{\text{лев}} = 5 - 1,22 = 3,78 \text{ кН}$$

$$Q_2^{\text{прав}} = -5 - 1,22 = -6,22 \text{ кН}$$



11. Статическая проверка.

