

ГЛАВА 5

ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАЗЫ

Эта глава посвящена всестороннему изучению прямых линий на плоскости и плоскостей и прямых линий в пространстве.

Убедившись в том, что этими объектами исчерпываются все линейные образы (т. е. геометрические объекты, определяемые линейными уравнениями), мы вводим в рассмотрение различные виды уравнений прямой и плоскости и останавливаемся на их использовании для решения важнейших задач.

§ 1. Различные виды уравнения прямой на плоскости

1. Общее уравнение прямой. Докажем сначала, что если на плоскости π задана произвольная прямая линия L и фиксирована произвольная декартова прямоугольная система Oxy , то прямая L определяется в этой системе уравнением первой степени.

Достаточно доказать, что прямая L определяется уравнением первой степени при каком-то одном специальном выборе декартовой прямоугольной системы на плоскости π , ибо тогда она будет определяться уравнением первой степени и при любом выборе декартовой прямоугольной системы на плоскости π (в силу теоремы 4.1). Направим ось Ox вдоль прямой L , а ось Oy перпендикулярно к ней. Тогда уравнением прямой будет уравнение первой степени $y = 0$. В самом деле, этому уравнению будут удовлетворять координаты любой точки, лежащей на прямой L , и не будут удовлетворять координаты ни одной точки, не лежащей на прямой L .

Утверждение доказано.

Докажем теперь, что если на плоскости π фиксирована произвольная декартова прямоугольная система Oxy , то всякое уравнение первой степени с двумя переменными x и y определяет относительно этой системы прямую линию.

В самом деле, пусть фиксирована произвольная декартова прямоугольная система Oxy и задано уравнение первой степени

$$Ax + By + C = 0, \quad (5.1)$$

в котором A , B и C — какие угодно постоянные, причем из постоянных A и B хотя бы одна отлична от нуля. Уравнение (5.1) заведомо имеет хотя бы одно решение x_0, y_0^*), т. е. существует хотя бы одна точка $M_0(x_0, y_0)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (5.1):

$$Ax_0 + By_0 + C = 0. \quad (5.2)$$

Вычитая из уравнения (5.1) тождество (5.2), мы получим уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \quad (5.3)$$

эквивалентное уравнению (5.1). Достаточно доказать, что уравнение (5.3) определяет относительно системы Oxy некоторую прямую. Мы докажем, что уравнение (5.3) (а стало быть, и (5.1)) определяет прямую L , проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$ и перпендикулярную вектору $\mathbf{n} = \{A, B\}$ (так как A и B одновременно не равны нулю, то вектор $\mathbf{n}$ ненулевой).

В самом деле, если точка $M(x, y)$ лежит на указанной прямой L , то ее координаты удовлетворяют уравнению (5.3), ибо в этом случае векторы $\mathbf{n} = \{A, B\}$ и $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ ортогональны и их скалярное произведение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) \quad (5.4)$$

равно нулю. Если же точка $M(x, y)$ не лежит на указанной прямой L , то ее координаты не удовлетворяют уравнению (5.3), ибо в этом случае векторы $\mathbf{n}$ и $\overline{M_0M}$ не ортогональны, и поэтому их скалярное произведение (5.4) не равно нулю. Утверждение доказано.

Уравнение (5.1) с произвольными коэффициентами A , B и C такими, что A и B не равны нулю одновременно, называется *общим уравнением прямой*. Мы доказали, что прямая, определяемая общим уравнением (5.1), ортогональна к вектору $\mathbf{n} = \{A, B\}$. Этот последний вектор мы будем называть *нормальным вектором прямой* (5.1).

Заметим, что если два общих уравнения $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ определяют одну и ту же прямую, то найдется такое число t , что справедливы равенства

$$A_1 = At, \quad B_1 = Bt, \quad C_1 = Ct, \quad (5.5)$$

т. е. коэффициенты A_1, B_1, C_1 второго уравнения равны соответствующим коэффициентам A, B и C первого уравнения, умноженным на некоторое число t .

*) В самом деле, A и B одновременно не равны нулю. Пусть, например, $B \neq 0$. Тогда, взяв произвольное x_0 , мы получим из уравнения (5.1) $y_0 = -\frac{A}{B}x_0 - \frac{C}{B}$.

В самом деле, по условию прямые, определяемые уравнениями $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, сливаются. Стало быть, нормальные векторы $\mathbf{n} = \{A, B\}$ и $\mathbf{n}_1 = \{A_1, B_1\}$ коллинеарны. Так как, кроме того, вектор $\mathbf{n}$ ненулевой, найдется (в силу теоремы 2.1) число t такое, что $\mathbf{n}_1 = t\mathbf{n}$, а отсюда и из линейного свойства координат вектора вытекают первые два из равенств (5.5). Докажем справедливость и последнего равенства (5.5). Слившиеся прямые имеют общую точку $M_0(x_0, y_0)$, так что $Ax_0 + By_0 + C = 0$ и $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0$. Умножая первое из этих равенств на t и вычитая из него второе равенство, будем иметь $(At - A_1)x_0 + (Bt - B_1)y_0 + (Ct - C_1) = 0$. Отсюда в силу первых двух равенств (5.5) $Ct - C_1 = 0$, т. е. $C_1 = Ct$.

2. Неполные уравнения прямой. Уравнение прямой в отрезках. Общее уравнение прямой (5.1) называется *полным*, если все его коэффициенты A , B и C отличны от нуля. Если хотя бы один из указанных коэффициентов равен нулю, уравнение называется *неполным*.

Рассмотрим все возможные виды неполных уравнений.

1) $C = 0$, уравнение $Ax + By = 0$ определяет прямую, проходящую через начало координат (поскольку координаты начала удовлетворяют этому уравнению).

2) $B = 0$, уравнение $Ax + C = 0$ определяет прямую, параллельную оси Oy (поскольку нормальный вектор этой прямой $\mathbf{n} = \{A, 0\}$ ортогонален оси Oy).

3) $A = 0$, уравнение $By + C = 0$ определяет прямую, параллельную оси Ox (поскольку нормальный вектор этой прямой $\mathbf{n} = \{0, B\}$ ортогонален оси Ox).

4) $B = 0$ и $C = 0$, уравнение $Ax = 0$ определяет ось Oy (в самом деле, эта прямая параллельна оси Oy и проходит через начало координат).

5) $A = 0$, $C = 0$, уравнение $By = 0$ определяет ось Ox (ибо эта прямая параллельна оси Ox и проходит через начало координат).

Рассмотрим теперь *полное* уравнение прямой (5.1) и покажем, что оно может быть приведено к следующему виду:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (5.6)$$

называемому *уравнением прямой в отрезках*.

В самом деле, так как все коэффициенты A , B и C отличны от нуля, мы можем переписать уравнение (5.1) в виде

$$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1$$

и затем положить $a = -C/A$, $b = -C/B$.

Заметим, что в уравнении «в отрезках» (5.6) числа a и b имеют простой геометрический смысл: они равны величинам отрезков, которые отсекает прямая на осях Ox и Oy соответственно (отрезки отсчитываются от начала координат, см. рис. 5.1). Чтобы убедиться в этом, достаточно найти точки пересечения прямой, определяемой уравнением (5.6), с осями координат. Например, точка пересечения с осью Ox определяется из совместного рассмотрения уравнения прямой (5.6) с уравнением $y=0$ оси Ox . Мы получим координаты точки пересечения $x=a$, $y=0$. Аналогично устанавливается, что координаты точки пересечения прямой (5.6) с осью Oy имеют вид $x=0$, $y=b$.

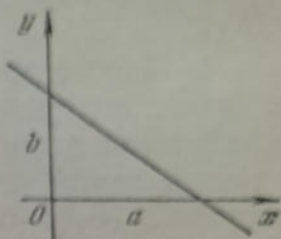


Рис. 5.1

Уравнение прямой в форме «в отрезках» удобно использовать для построения этой прямой на чертеже.

3. Каноническое *) уравнение прямой. Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, будем называть направляющим вектором этой прямой.

Поставим перед собой задачу: найти уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1)$ и имеющей заданный направляющий вектор $q = \{l, m\}$.

Очевидно, точка $M(x, y)$ лежит на указанной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1\}$ и $q = \{l, m\}$ коллинеарны, т. е. тогда и только тогда, когда координаты этих векторов пропорциональны (см. следствие из теоремы 2.17):

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}. \quad (5.7)$$

Уравнение (5.7) и есть искомое уравнение прямой. Это уравнение называют обычно каноническим уравнением прямой.

Заметим, что в каноническом уравнении (5.7) один из знаменателей l или m может оказаться равным нулю (оба числа l и m равняться нулю не могут, ибо вектор $q = \{l, m\}$ ненулевой). Так как всякую пропорцию $a/b = c/d$ мы договорились понимать как равенство $ad = bc$, обращение в нуль одного из знаменателей в (5.7) означает обращение в нуль и соответствующего числителя. В самом деле, если, например, $l = 0$, то, поскольку $m \neq 0$, из равенства $l(y - y_1) = m(x - x_1)$ заключаем, что $x - x_1 = 0$.

В заключение запишем уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (конечно, эти точки считаются отличными друг от друга). Так как за направляю-

*) Термин «канонический» (от греческого κανων — правило, предписание, образец) понимается здесь как «типовой», «традиционный».

щий вектор такой прямой можно взять вектор $\mathbf{q} = \overline{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$ и прямая проходит через точку $M_1(x_1, y_1)$, то из канонического уравнения (5.6) получим уравнение искомой прямой в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (5.8)$$

4. Параметрические уравнения прямой. Параметрические уравнения прямой элементарно получаются из канонического уравнения этой прямой. Примем за параметр t величину, стоящую в левой и в правой частях (5.7). Так как один из знаменателей (5.7) отличен от нуля, а соответствующий числитель может принимать какие угодно значения, то областью изменения параметра t является вся вещественная ось: $-\infty < t < \infty$.

Мы получим $x - x_1 = lt$, $y - y_1 = mt$ или окончательно

$$x = x_1 + lt, \quad y = y_1 + mt. \quad (5.9)$$

Уравнения (5.9) и есть искомые *параметрические уравнения прямой*. Уравнения (5.9) допускают наглядную механическую интерпретацию. Если считать, что параметр t — это время, отсчитываемое от некоторого начального момента, то параметрические уравнения (5.9) определяют закон движения материальной точки по прямой линии с постоянной скоростью $v = \sqrt{l^2 + m^2}$ (такое движение происходит по инерции).

5. Прямая с угловым коэффициентом. Рассмотрим любую прямую, не параллельную оси Ox . Введем понятие угла наклона этой прямой к оси Ox . Предположим, что рассматриваемая прямая пересекает ось Ox в точке A (рис. 5.2). Возьмем на оси Ox произвольную точку M , лежащую по ту сторону от точки A , куда направлена ось Ox , а на рассматриваемой прямой произвольную точку N , лежащую по ту сторону от точки A , куда направлена ось Oy . Угол $\alpha = \angle NAM$ назовем *углом наклона данной прямой к оси Ox* .

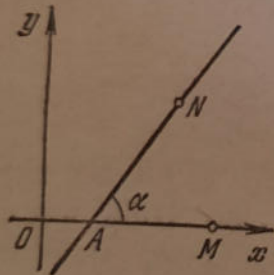


Рис. 5.2

Если прямая параллельна оси Ox или совпадает с ней, то угол наклона этой прямой к оси Ox мы будем считать равным нулю.

Тангенс угла наклона прямой к оси Ox назовем угловым коэффициентом этой прямой. Если обозначить буквой k угловой коэффициент данной прямой, а буквой α угол наклона этой прямой к оси Ox , то по определению можно записать $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Заметим, что для прямой, параллельной оси Ox , угловой коэффициент равен нулю, а для прямой, перпендикулярной оси

Ох, угловой коэффициент не существует (в последнем случае иногда формально говорят, что угловой коэффициент «обращается в бесконечность»).

Выведем уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1)$ и имеющей данный угловой коэффициент k .

Для этого докажем сначала следующее утверждение: если прямая не параллельна оси Oy и имеет направляющий вектор $q = \{l, m\}$, то угловой коэффициент этой прямой k равен $k = m/l$.

Пусть α — угол наклона прямой к оси Ox , а θ — угол наклона направляющего вектора $q = \{l, m\}$ к оси Ox . Так как прямая может быть наклонена к оси Ox под острым или под тупым углом и ее направляющий вектор q может иметь два противоположных направления, то возможны четыре случая, изображенных на рис. 5.3. В случаях 1) и 3) $\theta = \alpha$ и для проекций на оси вектора q справедливы формулы

$$l = |q| \cos \theta,$$

$$m = |q| \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = |q| \sin \theta.$$

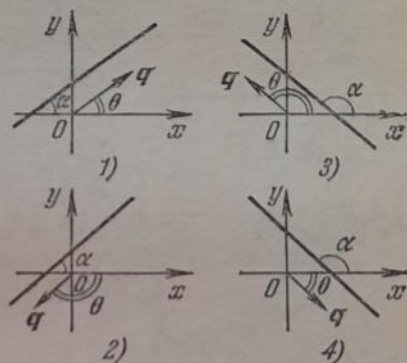


Рис. 5.3

В случаях 2) и 4) $\theta = \pi - \alpha$ и для проекций вектора q справедливы формулы $l = |q| \cos \theta$, $m = -|q| \sin \theta$.

Таким образом, в случаях 1) и 3) $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \alpha$ и $m/l = \operatorname{tg} \theta$ а в случаях 2) и 4) $\operatorname{tg} \theta = -\operatorname{tg} \alpha$ и $m/l = -\operatorname{tg} \theta$.

Стало быть, во всех четырех случаях $\operatorname{tg} \alpha = m/l$, и утверждение доказано.

Для того чтобы вывести уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_1(x_1, y_1)$ и имеющей заданный угловой коэффициент k , умножим обе части канонического уравнения (5.7) на m и учтем, что $m/l = k$.

Получим искомое уравнение в виде

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (5.10)$$

Если теперь обозначить через b постоянную $b = y_1 - kx_1$, то уравнение (5.10) примет вид

$$y = kx + b. \quad (5.11)$$

Уравнение (5.11) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом. В этом уравнении k обозначает угловой коэффициент данной прямой, а b представляет собой величину отрезка, отсекаемого данной прямой на оси Oy , начиная от начала координат. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть совместно уравнение (5.11) и уравнение $x = 0$ оси Oy и

найти координаты точки пересечения оси Oy и прямой (5.11): $x = 0, y = b$ (рис. 5.4).

6. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

а) Пусть сначала две прямые L_1 и L_2 заданы общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Так как нормальным вектором прямой L_1 является вектор $\mathbf{n}_1 = \{A_1, B_1\}$, а нормальным вектором прямой L_2 является вектор $\mathbf{n}_2 = \{A_2, B_2\}$, то задача об определении угла между прямыми L_1 и L_2 сводится к определению угла φ между векторами $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ *).

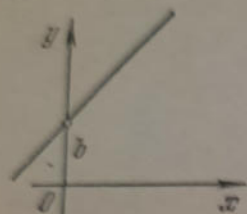


Рис. 5.4

Из определения скалярного произведения $\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 = |\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2| \cos \varphi$ и из выражения в координатах длин векторов $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ и их ска-

лярного произведения получим

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (5.12)$$

Итак, угол φ между прямыми L_1 и L_2 определяется с помощью формулы (5.12).

Условие параллельности прямых L_1 и L_2 , эквивалентное условию коллинеарности векторов $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$, заключается в пропорциональности координат этих векторов, т. е. имеет вид **)

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \quad (5.13)$$

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2 может быть извлечено из формулы (5.12) (при $\cos \varphi = 0$) или выражено равенством нулю скалярного произведения $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$. Оно имеет вид

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \quad (5.14)$$

б) Пусть теперь две прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} \quad \text{и} \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}.$$

Так как направляющими векторами прямых L_1 и L_2 служат векторы $\mathbf{q}_1 = \{l_1, m_1\}$ и $\mathbf{q}_2 = \{l_2, m_2\}$, то в полной аналогии со случаем а) мы получим:

*) Любые две пересекающиеся прямые образуют два угла, в сумме равных π . Нам достаточно определить один из них.

**) При этом, как и выше, мы понимаем пропорцию $a/b = c/d$ в смысле равенства $ad = bc$.

1) формулу для угла φ между прямыми L_1 и L_2 :

$$\cos \varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2}}, \quad (5.12')$$

2) условие параллельности прямых L_1 и L_2 :

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}, \quad (5.13')$$

3) условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2 :

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0. \quad (5.14')$$

в) Пусть, наконец, две прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом

$$y = k_1 x + b_1 \quad \text{и} \quad y = k_2 x + b_2.$$

Если α_1 и α_2 — углы наклона прямых L_1 и L_2 к оси Ox , а φ — один из углов между этими прямыми, то из элементарных соображений (рис. 5.5) вытекает, что

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

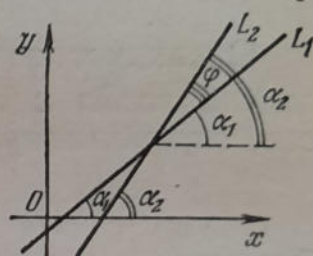


Рис. 5.5

Мы получаем следующую формулу для определения угла φ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (5.12'')$$

Если в этой формуле поменять ролями k_1 и k_2 (от чего фактически лишь изменится знак на противоположный), то эта формула определит нам *другой* угол между прямыми, смежный по отношению к прежнему углу (эти два угла в сумме составляют π и тангенсы их отличаются лишь знаком).

Прямые параллельны, когда тангенс угла между ними равен нулю, т. е. *условие параллельности имеет вид*

$$k_1 = k_2 \quad (5.13'')$$

(при этом числитель в (5.12'') равен нулю, а знаменатель строго положителен).

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2 также можно получить из (5.12''). Оно отвечает случаю, когда тангенс угла φ не существует, т. е. случаю обращения знаменателя формулы (5.12'') в нуль: $k_1 k_2 + 1 = 0$.

Итак, *условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2 имеет вид*

$$k_2 = -1/k_1. \quad (5.14'')$$

Т а б л и ц а 3.1. Основные типы уравнений прямых на плоскости

Название	Уравнение	Способ задания прямой	Геометрический смысл коэффициентов
Общее уравнение прямой	$A \cdot x + B \cdot y + C = 0,$ $A^2 + B^2 \neq 0$	Прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = A \cdot \vec{i} + B \cdot \vec{j}$ (рис.3.5,а)	Коэффициенты A, B – координаты нормали $\vec{n} = A \cdot \vec{i} + B \cdot \vec{j}$; свободный член $C = -A \cdot x_0 - B \cdot y_0$
Параметрическое уравнение прямой	$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot t, \\ y = y_0 + b \cdot t, \end{cases}$ $t \in R;$ $a^2 + b^2 \neq 0$	Прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ коллинеарно вектору $\vec{p} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$ (рис.3.13)	Коэффициенты a, b – координаты направляющего вектора $\vec{p} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$; x_0, y_0 – координаты точки $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащей прямой
Каноническое уравнение прямой	$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$	См. параметрическое уравнение	См. параметрическое уравнение
Уравнение прямой, проходящей через две точки	$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$	Прямая проходит через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ (рис.3.18)	Коэффициенты x_0, y_0 и x_1, y_1 – координаты точек $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$
Уравнение прямой "в отрезках"	$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 1,$ $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$	Прямая отсекает на координатных осях "отрезки" x_1 и y_1 (рис.3.19)	Коэффициенты x_1, y_1 определяют точки на координатных осях, через которые проходит прямая
Уравнение с угловым коэффициентом	$y = k \cdot x + y_0$	Прямая проходит через точку $(0, y_0)$ на оси Oy и образует угол α с положительным направлением оси Ox (рис.3.21,а)	Угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha, 0 \leq \alpha < \pi, \alpha \neq \frac{\pi}{2}; y_0$ – ордината точки пересечения прямой с осью ординат

11. Найдите координаты центра описанной около треугольника

1. ABC окружности, где $A(0; 1)$, $B(1; 3)$, $C(-5; 4)$.
2. OAB окружности, где $O(0; 0)$, $A(-1; -1)$, $B(1; 3)$.
3. OCB окружности, где $O(0; 0)$, $B(-2; -3)$, $C(2; 1)$.
4. OAC окружности, где $O(0; 0)$, $A(0; 1)$, $C(2; 4)$.
5. ABC окружности, где $A(-1; -5)$, $B(2; -3)$, $C(-5; 1)$.
6. OAB окружности, где $O(0; 0)$, $A(1; -1)$, $B(3; -5)$.
7. OCB окружности, где $O(0; 0)$, $B(1; 3)$, $C(-5; 3)$.
8. OAC окружности, где $O(0; 0)$, $A(-1; 1)$, $C(5; -1)$.
9. ABC окружности, где $A(-2; 0)$, $B(-3; -1)$, $C(2; -3)$.
10. OAB окружности, где $O(0; 0)$, $A(0; 3)$, $B(1; 2)$.
11. OCB окружности, где $O(0; 0)$, $B(-1; 4)$, $C(5; 3)$.
12. OAC окружности, где $O(0; 0)$, $A(-2; 5)$, $C(-1; -4)$.
13. ABC окружности, где $A(0; -4)$, $B(1; 1)$, $C(-3; 4)$.
14. OAB окружности, где $O(0; 0)$, $A(2; 6)$, $B(1; 1)$.
15. OCB окружности, где $O(0; 0)$, $B(1; 4)$, $C(5; -4)$.
16. OAC окружности, где $O(0; 0)$, $A(0; 3)$, $C(5; -4)$.

17. ABC окружности, где $A(-1; 2)$, $B(2; 5)$, $C(4; -1)$.
18. OAB окружности, где $O(0; 0)$, $A(-2; 1)$, $B(3; 6)$.
19. OCB окружности, где $O(0; 0)$, $B(2; -1)$, $C(5; 5)$.
20. OAC окружности, где $O(0; 0)$, $A(-1; -4)$, $C(3; 3)$.
21. ABC окружности, где $A(-2; -5)$, $B(4; 1)$, $C(6; -1)$.
22. OAB окружности, где $O(0; 0)$, $A(0; 1)$, $B(2; 4)$.
23. OCB окружности, где $O(0; 0)$, $B(2; 4)$, $C(3; -1)$.
24. OAC окружности, где $O(0; 0)$, $A(-4; -5)$, $C(2; -4)$.
25. ABC окружности, где $A(0; 2)$, $B(2; -4)$, $C(5; 4)$.
26. OAB окружности, где $O(0; 0)$, $A(-1; 5)$, $B(1; -1)$.
27. OCB окружности, где $O(0; 0)$, $B(3; -7)$, $C(6; 3)$.
28. OAC окружности, где $O(0; 0)$, $A(0; -2)$, $C(5; -4)$.
29. ABC окружности, где $A(-1; -5)$, $B(1; 1)$, $C(6; -2)$.
30. OAB окружности, где $O(0; 0)$, $A(-2; -8)$, $B(3; 7)$.

12. Даны две вершины A_1 и A_2 треугольника $A_1A_2A_3$ и точка N пересечения его медиан. Составьте уравнения сторон этого треугольника и определите координаты третьей вершины A_3 , если

- | | |
|--|---|
| 1. $A_1(1; -1)$, $A_2(2; 4)$, $N(1; 4/3)$. | 2. $A_1(2; -3)$, $A_2(-5; 1)$, $N(-4/3; -7/3)$. |
| 3. $A_1(3; 7)$, $A_2(7; -1)$, $N(8/3; -2/3)$. | 4. $A_1(1; 1)$, $A_2(6; -2)$, $N(2; -2)$. |
| 5. $A_1(2; 4)$, $A_2(5; -4)$, $N(7/3; -2/3)$. | 6. $A_1(4; 1)$, $A_2(1; -1)$, $N(4/3; 5/3)$. |
| 7. $A_1(5; 4)$, $A_2(0; 2)$, $N(7/3; 2/3)$. | 8. $A_1(-2; -2)$, $A_2(-4; -5)$, $N(-4/3; -11/3)$. |
| 9. $A_1(3; -1)$, $A_2(-2; -2)$, $N(1; 1/3)$. | 10. $A_1(4; -4)$, $A_2(2; 4)$, $N(2; 1/3)$. |
| 11. $A_1(4; 1)$, $A_2(6; -1)$, $N(8/3; -5/3)$. | 12. $A_1(3; 3)$, $A_2(-1; -4)$, $N(1; -1)$. |
| 13. $A_1(5; 5)$, $A_2(0; -3)$, $N(7/3; 1/3)$. | 14. $A_1(-2; 1)$, $A_2(3; 6)$, $N(5/3; 5/3)$. |
| 15. $A_1(2; 5)$, $A_2(4; -1)$, $N(5/3; 2)$. | 16. $A_1(1; 4)$, $A_2(5; -4)$, $N(2; 1)$. |
| 17. $A_1(-2; -6)$, $A_2(8; -1)$, $N(7/3; 2/3)$. | 18. $A_1(1; 1)$, $A_2(4; -1)$, $N(7/3; 2)$. |
| 19. $A_1(0; -4)$, $A_2(-3; 4)$, $N(-2/3; 1/3)$. | 20. $A_1(-1; -4)$, $A_2(-3; -6)$, $N(-2; 7/3)$. |
| 21. $A_1(1; 1)$, $A_2(8; 7)$, $N(6; 2)$. | 22. $A_1(1; -1)$, $A_2(-1; -2)$, $N(1; 8/3)$. |
| 23. $A_1(-5; 3)$, $A_2(0; 2)$, $N(-4/3; 8/3)$. | 24. $A_1(5; -1)$, $A_2(2; 4)$, $N(2; 4/3)$. |
| 25. $A_1(-2; 0)$, $A_2(2; -3)$, $N(-1; -4/3)$. | 26. $A_1(1; 2)$, $A_2(-4; 4)$, $N(-1; 3)$. |
| 27. $A_1(5; 3)$, $A_2(-1; 4)$, $N(2; 8/3)$. | 28. $A_1(0; 1)$, $A_2(-5; 4)$, $N(-4/3; 8/3)$. |
| 29. $A_1(5; -1)$, $A_2(1; 3)$, $N(5/3; 1/3)$. | 30. $A_1(2; 1)$, $A_2(-2; -3)$, $N(2/3; 1)$. |

13. Даны две вершины A_1 и A_2 треугольника $A_1A_2A_3$ и точка N пересечения его высот. Составьте уравнения сторон этого треугольника и найдите координаты третьей вершины A_3 , если

- | | |
|--|--|
| 1. $A_1(3; 1)$, $A_2(-4; -5)$, $N(-2; -1)$. | 2. $A_1(-3; 1)$, $A_2(4; -5)$, $N(2; -1)$. |
| 3. $A_1(-2; -4)$, $A_2(5; 2)$, $N(3; -2)$. | 4. $A_1(-2; 4)$, $A_2(5; -2)$, $N(3; 2)$. |
| 5. $A_1(2; -4)$, $A_2(-5; 2)$, $N(-3; -2)$. | 6. $A_1(2; 4)$, $A_2(-5; -2)$, $N(-3; -2)$. |
| 7. $A_1(-4; -5)$, $A_2(3; 1)$, $N(2; -3)$. | 8. $A_1(-4; 5)$, $A_2(3; -1)$, $N(2; 3)$. |

9. $A_1(4; -5), A_2(-3; 1), N(-2; -3).$
10. $A_1(4; 5), A_2(-3; -1), N(-2; 3).$
11. $A_1(1; -3), A_2(8; 3), N(4; 3).$
12. $A_1(1; 3), A_2(8; -3), N(4; -3).$
13. $A_1(-1; 3), A_2(-8; 3), N(-4; -3).$
14. $A_1(-1; 3), A_2(-8; -3), N(-4; -3).$
15. $A_1(2; 1), A_2(9; 7), N(7; 4).$
16. $A_1(2; -1), A_2(9; -7), N(7; -4).$
17. $A_1(-2; 1), A_2(-9; 7), N(-7; 4).$
18. $A_1(-2; -1), A_2(-9; -7), N(-7; -4).$
19. $A_1(3; 2), A_2(10; 8), N(9; 4).$
20. $A_1(-3; -2), A_2(-10; -8), N(-9; -4).$
21. $A_1(1; -2), A_2(8; 4), N(8; 3).$
22. $A_1(1; 2), A_2(8; -4), N(8; -3).$
23. $A_1(-1; -2), A_2(-8; 4), N(-8; 3).$
24. $A_1(-1; 2), A_2(-8; -4), N(-8; -3).$
25. $A_1(-3; 4), A_2(4; 10), N(3; 8).$
26. $A_1(-3; -4), A_2(4; -10), N(3; -8).$
27. $A_1(3; 4), A_2(-4; 10), N(-3; 8).$
28. $A_1(3; -4), A_2(-4; -10), N(-3; -8).$
29. $A_1(-3; -1), A_2(4; 5), N(2; 1).$
30. $A_1(3; -1), A_2(-4; 5), N(-2; 1).$