**По ссылке пройти в ВВВ 10.15**

# Лекция. Уравнение Бернулли

**План**

**1.** Режимы движения жидкости

**2.** Уравнение Бернулли для идеальной жидкости.

3. Уравнение Бернулли для реальной жидкости.

4. Измерение скорости потока и расхода жидкости (самостоятельно)

5. Примеры решения задач (самостоятельно)

Практические занятия. Решить предложенные задачи. Составить по ним презентацию.

## Режимы движения жидкости

При наблюдении за движением жидкости в трубах и каналах, можно заметить, что в одном случае жидкость сохраняет определенный строй своих частиц, а в других - перемещаются бессистемно. Однако исчерпывающие опыты по этому вопросу были проведены Рейнольдсом в 1883 г. На рис. 4.1 изображена установка, аналогичная той, на которой Рейнольдс производил свои опыты.

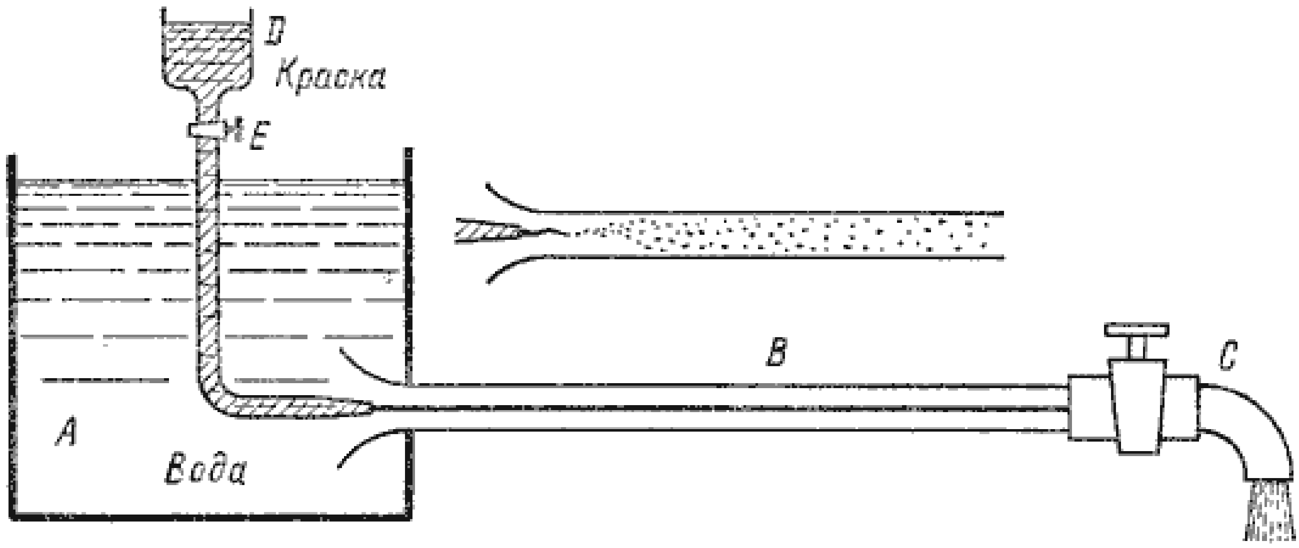



Рис. 4.1. Схема установки Рейнольдса

Установка состоит из резервуара *A* с водой, от которого отходит стеклянная труба *B* с краном *C* на конце, и сосуда *D* с водным раствором краски, которая может по трубке вводиться тонкой струйкой внутрь стеклянной трубы $B$.

*Первый случай движения жидкости*. Если немного приоткрыть кран $C$ и дать возможность воде протекать в трубе с небольшой скоростью, а затем с помощью крана $E$ впустить краску в поток воды, то увидим, что введенная в трубу краска не будет перемешиваться с потоком воды. Струйка краски будет отчетливо видимой вдоль всей стеклянной трубы, что указывает на слоистый характер течения жидкости и на отсутствие перемешивания. Если при этом, если к трубе подсоединить пьезометр или трубку Пито, то они покажут неизменность давления и скорости по времени. Такой режим движения называется *ламинарный*.

*Второй случай движения жидкости*. При постепенном увеличении скорости течения воды в трубе путем открытия крана $C$ картина течения вначале не меняется, но затем при определенной скорости течения наступает быстрое ее изменение. Струйка краски по выходе из трубки начинает колебаться, затем размывается и перемешивается с потоком воды, причем становятся заметными вихреобразования и вращательное движение жидкости. Пьезометр и трубка Пито при этом покажут непрерывные пульсации давления и скорости в потоке воды. Такое течение называется *турбулентным* (рис.4.1, вверху).

Если уменьшить скорость потока, то восстановится ламинарное течение.

Итак, *ламинарным* называется слоистое течение без перемешивания частиц жидкости и без пульсации скорости и давления. При ламинарном течении жидкости в прямой трубе постоянного сечения все линии тока направлены параллельно оси трубы, при этом отсутствуют поперечные перемещения частиц жидкости.

*Турбулентным* называется течение, сопровождающееся интенсивным перемешиванием жидкости с пульсациями скоростей и давлений. Наряду с основным продольным перемещением жидкости наблюдаются поперечные перемещения и вращательные движения отдельных объемов жидкости. Переход от ламинарного режима к турбулентному наблюдается

при определенной скорости движения жидкости. Эта скорость называется *критической* $\upsilon_{кр}$.
Значение этой скорости прямо пропорционально кинематической вязкости жидкости и обратно пропорционально диаметру трубы.

$$\upsilon_{кр} = \frac{\nu}{d} \cdot k$$

где $\nu$ - кинематическая вязкость;
$k$ - безразмерный коэффициент;
$d$ - внутренний диаметр трубы.

Входящий в эту формулу безразмерный коэффициент $k$, одинаков для всех жидкостей и газов, а также для любых диаметров труб. Этот коэффициент называется *критическим числом Рейнольдса* $Re_{кр}$ и определяется следующим образом:

$$Re_{кр} = \frac{\upsilon_{кр} d}{\nu}$$

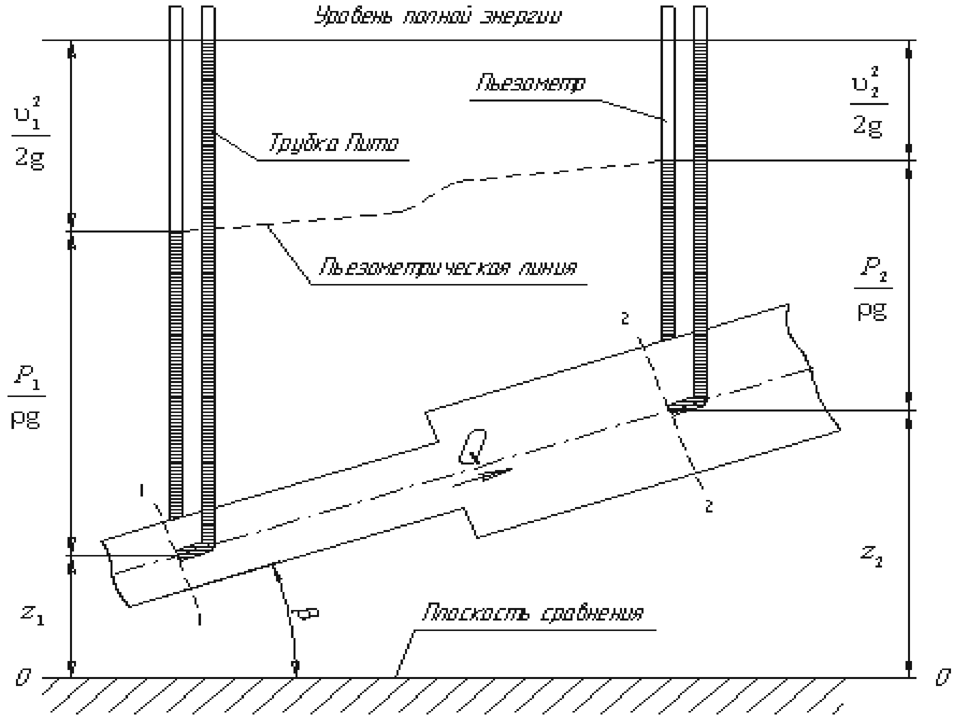
Как показывает опыт, для труб круглого сечения $Re_{кр}$ примерно равно 2300.
Таким образом, критерий подобия Рейнольдса позволяет судить о режиме течения жидкости в трубе. При $Re < Re_{кр}$ течение является ламинарным, а при $Re > Re_{кр}$ течение является турбулентным. Точнее говоря, вполне развитое турбулентное течение в трубах устанавливается лишь при Re примерно равно 4000, а при Re = 2300…4000 имеет место переходная, критическая область.
Режим движения жидкости напрямую влияет на степень гидравлического сопротивления трубопроводов.

## Уравнение Бернулли для идеальной жидкости

Уравнение Даниила Бернулли, полученное в 1738 г., является фундаментальным уравнением гидродинамики. Оно дает связь между давлением $P$, средней скоростью $\upsilon$ и пьезометрической высотой $z$ в различных сечениях потока и выражает закон сохранения энергии движущейся жидкости. С помощью этого уравнения решается большой круг задач.

Рассмотрим трубопровод переменного диаметра, расположенный в пространстве под углом β (рис.3.5).

Схема к выводу уравнения Бернулли для идеальной жидкости




Выберем произвольно на рассматриваемом участке трубопровода два сечения: сечение *1-1* и сечение *2-2*. Вверх по трубопроводу от первого сечения ко второму движется жидкость, расход которой равен *Q*.

Для измерения давления жидкости применяют *пьезометры* - тонкостенные стеклянные трубки, в которых жидкость поднимается на высоту $\frac{P}{\rho g}$. В каждом сечении установлены пьезометры, в которых уровень жидкости поднимается на разные высоты.

Кроме пьезометров в каждом сечении *1-1* и *2-2* установлена трубка, загнутый конец которой направлен навстречу потоку жидкости, которая называется *трубка Пито*. Жидкость в трубках Пито также поднимается на разные уровни, если отсчитывать их от *пьезометрической линии*.

Пьезометрическую линию можно построить следующим образом. Если между сечением *1-1* и *2-2* поставить несколько таких же пьезометров и через показания уровней жидкости в них провести кривую, то мы получим ломаную линию (рис.3.5).

Однако высота уровней в трубках Пито относительно произвольной горизонтальной прямой *0-0*, называемой *плоскостью сравнения*, будет одинакова.
Если через показания уровней жидкости в трубках Пито провести линию, то она будет горизонтальна, и будет отражать *уровень полной энергии трубопровода*.
Для двух произвольных сечений *1-1* и *2-2* потока идеальной жидкости уравнение Бернулли имеет следующий вид:

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\upsilon_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\upsilon_2^2}{2g} = H = \text{const}$$

Так как сечения *1-1* и *2-2* взяты произвольно, то полученное уравнение можно переписать иначе:

$$z + \frac{P}{\rho g} + \frac{\upsilon^2}{2g} = H = \text{const}$$

и прочитать так: сумма трех членов уравнения Бернулли для любого сечения потока идеальной жидкости есть величина постоянная.
С энергетической точки зрения каждый член уравнения представляет собой определенные виды энергии:
z1 и z2 - удельные энергии положения, характеризующие потенциальную энергию в сечениях *1-1* и *2-2*; $\frac{P_1}{\rho g}$ и $\frac{P_2}{\rho g}$ - удельные энергии давления, характеризующие потенциальную энергию давления в тех же сечениях; $\frac{\upsilon_1^2}{2g}$ и $\frac{\upsilon_2^2}{2g}$ - удельные кинетические энергии в тех же сечениях.
Следовательно, согласно уравнению Бернулли, *полная удельная энергия идеальной жидкости в любом сечении постоянна*.
Уравнение Бернулли можно истолковать и чисто геометрически. Дело в том, что каждый член уравнения имеет линейную размерность. Глядя на рис.3.5, можно заметить, что z1 и z2 - геометрические высоты сечений *1-1* и *2-2* над плоскостью

сравнения; $\dfrac{P_1}{\rho g}$ и $\dfrac{P_2}{\rho g}$ - пьезометрические высоты; $\dfrac{\upsilon_1^2}{2g}$ и $\dfrac{\upsilon_2^2}{2g}$ - скоростные высоты в указанных сечениях.

В этом случае уравнение Бернулли можно прочитать так: *сумма геометрической, пьезометрической и скоростной высоты для идеальной жидкости есть величина постоянная*.

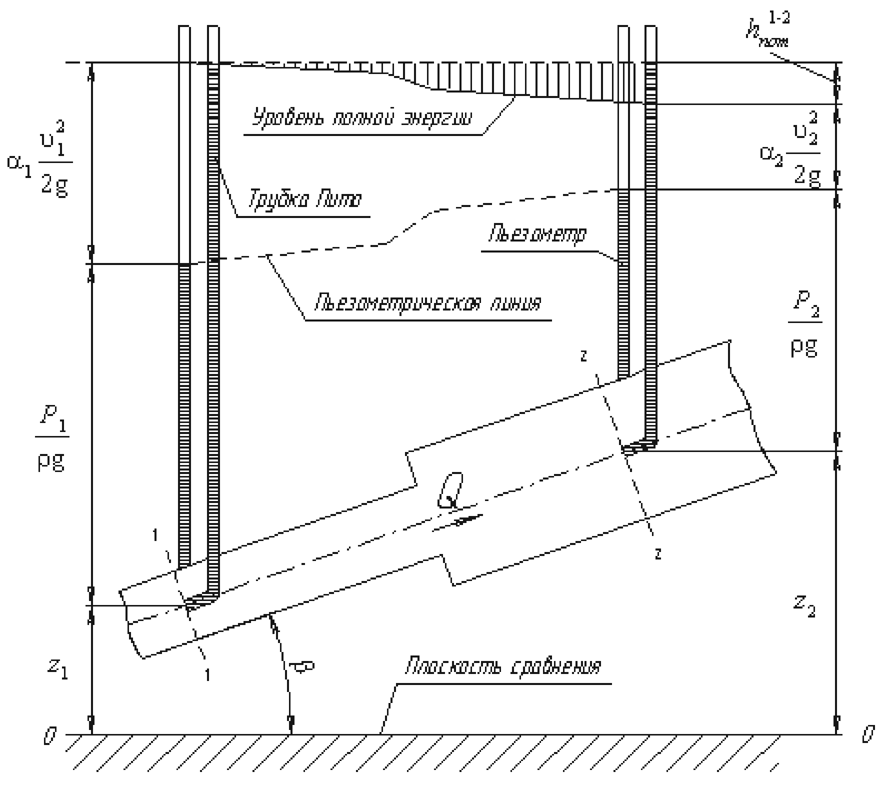
## Уравнение Бернулли для реальной жидкости

Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости несколько отличается от уравнения

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\upsilon_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\upsilon_2^2}{2g} = H = \text{const}$$

Дело в том, что при движении реальной вязкой жидкости возникают силы трения, на преодоление которых жидкость затрачивает энергию. В результате полная удельная энергия жидкости в сечении *1-1* будет больше полной удельной энергии в сечении *2-2* на величину потерянной энергии (рис.3.6).

Рис.3.6. Схема к выводу уравнения Бернулли для реальной жидкости



Потерянная энергия или потерянный напор обозначаются $h_{пот}^{1-2}$ и имеют также линейную размерность.
Уравнение Бернулли для реальной жидкости будет иметь вид:

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{\upsilon_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{\upsilon_2^2}{2g} + h_{пот}^{1-2} = H = \mathrm{const}$$

Из рис.3.6 видно, что по мере движения жидкости от сечения *1-1* до сечения *2-2* потерянный напор все время увеличивается (потерянный напор выделен вертикальной штриховкой). Таким образом, уровень первоначальной энергии, которой обладает жидкость в первом сечении, для второго сечения будет складываться из четырех составляющих: геометрической высоты, пьезометрической высоты, скоростной высоты и потерянного напора между сечениями *1-1* и *2-2*.
Кроме этого в уравнении появились еще два коэффициента $\alpha_1$ и $\alpha_2$, которые называются *коэффициентами Кориолиса* и зависят от режима течения жидкости (**α = 2 для ламинарного режима, α = 1 для турбулентного режима**).
Потерянная высота $h_{пот}^{1-2}$ складывается из линейных потерь, вызванных силой трения между слоями жидкости, и потерь, вызванных местными сопротивлениями (изменениями конфигурации потока)

$$h_{пот}^{1-2} = h_{лин} + h_{мест}$$

С помощью уравнения Бернулли решается большинство задач практической гидравлики. Для этого выбирают два сечения по длине потока, таким образом, чтобы для одного из них были известны величины Р, ρ, *g*, а для другого сечения одна или величины подлежали определению. При двух неизвестных для второго сечения используют уравнение постоянства расхода жидкости $\upsilon_1\omega_1 = \upsilon_2\omega_2$.

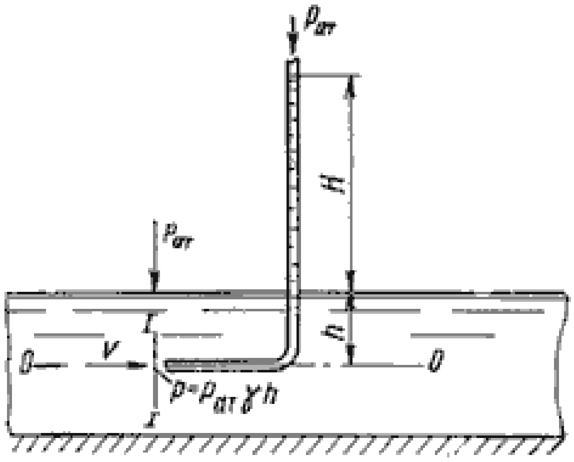
## Измерение скорости потока и расхода жидкости

Для измерения скорости в точках потока широко используется работающая на принципе уравнения Бернулли трубка Пито (рис.3.7), загнутый конец которой направлен навстречу потоку.

Пусть требуется измерить скорость жидкости в какой-то точке потока. Поместив конец трубки в указанную точку и составив уравнение Бернулли для сечения *1-1* и сечения, проходящего на уровне жидкости в трубке Пито получим

$$\frac{P_{атм}+\gamma h}{\gamma}+\frac{\upsilon^2}{2g}=H+h+\frac{P_{атм}}{\gamma} \quad \text{или} \quad \upsilon=\sqrt{2gH}$$

где H - столб жидкости в трубке Пито.



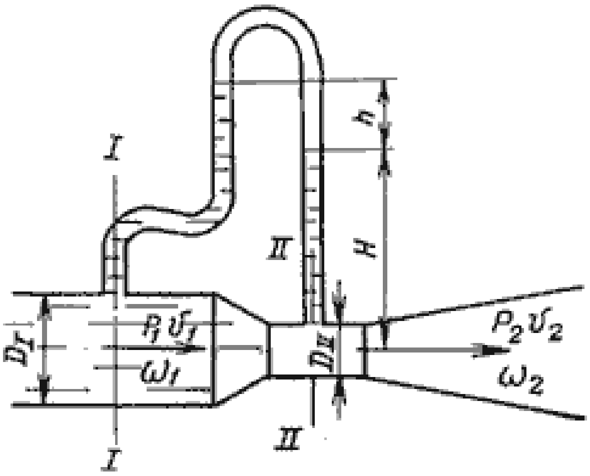




Рис. 3.7. Трубка Пито и расходомер Вентури

Для измерения расхода жидкости в трубопроводах часто используют расходомер Вентури, действие которого основано так же на принципе уравнения Бернулли. Расходомер Вентури состоит из двух конических насадков с цилиндрической вставкой между ними (рис.3.7). Если в сечениях *I-I* и *II-II* поставить пьезометры, то разность уровней в них будет зависеть от расхода жидкости, протекающей по трубе.

Пренебрегая потерями напора и считая z1 = z2 , напишем уравнение Бернулли для сечений *I-I* и *II-II*:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{\upsilon_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{\upsilon_2^2}{2g}$$

или

$$h=\frac{P_1-P_2}{\gamma}=\frac{\upsilon_1^2}{2g}\left[-1+\left(\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right)^2\right]$$

Используя уравнение неразрывности

$$Q = \upsilon_1\omega_1 = \upsilon_2\omega_2$$

сделаем замену в получено выражении:

$$h = \frac{Q^2}{2g\omega_1^2}\left[-1+\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2\right]$$

Решая относительно Q, получим

$$Q = \omega_1\omega_2\sqrt{\frac{2g}{\omega_1^2-\omega_2^2}}\cdot\sqrt{h}$$

Выражение, стоящее перед $\sqrt{h}$, является постоянной величиной, носящей название постоянной водомера Вентури.

Из полученного уравнения видно, что $h$ зависит от расхода $Q$. Часто эту зависимость строят в виде тарировочной кривой $h$ от $Q$, которая имеет параболический характер.

Задача 1

Определить при помощи водомера Вентури расход, проходящий по трубопроводу, если диаметр трубопровода $d_1 = 100$ *мм,* диаметр горловины $d_2 = 56$ *мм,* разность показаний пьезометров $h = 45$ *см.* Потерями напора при расчете пренебречь.

Примечание. Водомер Вентури широко применяется в практике. Он состоит из двух конических участков, соединенных короткой цилиндрической вставкой (рис. 4-9). Широкие концы конических участков имеют те же диаметры, что и трубопровод, на котором устанавливается водомер. В сечениях *1-1* и *2-2* присоединены пьезометры.

Решение. Горизонтальную плоскость сравнения *ОО* выберем произвольно, составим уравнение Бернулли для сечений *1-1* и *2-2* без учета потерь напора

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}.$$

Примем $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, перепишем уравнение Бернулли в таком виде

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g};$$

Так как $(z_1+p_1/\gamma)-(z_2+p_2/\gamma)=h$ (разности показаний пьезометров), то

$$h=\frac{v_2^2}{2g}-\frac{v_1^2}{2g}.$$

Для определения скорости выразим одну скорость через другую, используя уравнение неразрывности $v_1\omega_1=v_2\omega_2$.

Тогда

$$v_1=\frac{\omega_2}{\omega_1}v_2.$$

Подставим $v_1$ в уравнение для $h$ и получим:

$$h=\frac{v_2^2}{2g}-\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\frac{v_2^2}{2g}.$$

Отсюда

$$v_2=\sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}}.$$

Расход без учета потерь напора (теоретический расход) равен:

$$Q_т=v_2\omega_2=\omega_2\sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}}.$$

Так как $\omega_2$ и $\omega_1$ для данного водомера не зависят от расхода, то можно выделить постоянную водомера $A$:

$$A=\omega_2\sqrt{\frac{2g}{1-\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}},$$

тогда

$$Q_т=A\sqrt{h}.$$

В действительности при движении жидкости через водомер имеются, *хотя и относительно небольшие, потери напора*, вследствие чего фактический расход будет меньше по сравнению с теоретическим. Эта разница учитывается умножением $Q_т$ на коэффициент расхода водомера

водомера

$$\mu = 0{,}95 \div 0{,}98.$$

Окончательно фактический расход

$$Q = \mu Q_т = \mu A\sqrt{h}.$$

Найдем постоянную водомера $A$, учитывая, что $(\omega_2/\omega_1)^2 = (d_2/d_1)^4$:

$$A = 0{,}785 \cdot 5{,}6^2 \sqrt{\frac{2 \cdot 981}{1 - \left(\frac{5{,}6}{10}\right)^4}} = 1\ 150\ см^{2,5}/сек.$$

Принимая $\mu = 0{,}95$, определяем расход

$$Q = 0{,}95 \cdot 1\ 150\sqrt{45} = 7\ 320\ см^3/сек = 7{,}32\ л/сек.$$

Задача 2

**№ 3**. На трубе диаметром D = 200 мм имеется местное сужение диаметром d = 100 мм.

Пренебрегая сопротивлениями, определить разность высот уровней в пьезометрических трубках 1 и 2, если известно, что по трубе течет вода со скоростью в широком сечении, равной 0,8 м/с.

*Решение*

Относительно плоскости сравнения, которую нужно провести по оси потока, для сечений 1–1 и 2–2 составляется уравнение Бернулли без учета потерь энергии.

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

Из уравнения неразрывности потока определяется скорость во втором сечении $V_1\omega_1 = V_2\omega_2$ (м/с); $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d_2^{\ 2}}{d_1^{\ 2}}$;

$$V_2 = \frac{V_1 \cdot D^2}{d^2} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}2^2}{0{,}1^2} = 3{,}2 \text{ (м/с)}.$$

$$0 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{0{,}8^2}{2 \cdot 10} = 0 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{3{,}2^2}{2 \cdot 10}.$$

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = \Delta h = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} = \frac{3{,}2^2}{20} - \frac{0{,}8^2}{20} = 0{,}48 \text{ (м)}.$$

**№ 2**. Определить режим движения в лотке прямоугольного сечения шириной b = 120 см при уровне воды в нем h = 5 см, если v = 8 см/с, $\nu$ =0,015см$^2$/с.

*Решение*

$\mathrm{Re} = V \cdot R / \nu$; $R = \omega / \chi$ = b · h / 2h + b = 120 · 5 / 2 · 5 + 120 = 4,62 (см)

Re = 8 · 4,62 / 0,015 = 2464 > $\mathrm{Re}_{кр}$ = 580 – режим турбулентный.

## Задачи

**II.7.** Определить давление $p_1$ в сечении *1—1* горизонтально расположенного сопла гидромонитора (рис. II.3), необходимое для придания скорости воде в выходном сечении *2—2* — $V_2 = 40$ м/с, если скорость движения воды в сечении *1—1* — $V_1 = 3$ м/с.

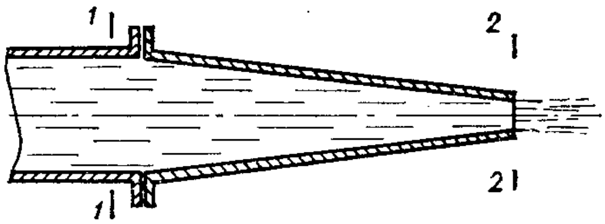


Рис. II.3

Р е ш е н и е. За расчетные сечения выбираем сечения *1—1* и *2—2*, в которых скорости заданы, давление $p_1$ подлежит определению, а давление $p_2$ в сечении на выходе из гидромонитора равно атмосферному. Плоскость сравнения следует провести через ось сопла, тогда удельные энергии положения $z_1 = z_2 = 0$ и уравнение Д. Бернулли будет иметь следующий вид:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g},$$

откуда

$$p_1 = p_2 + \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2) = 100\,000 + \frac{1000}{2}(40^2 - 3^2) =$$

$$= 895\,500 \text{ Па} = 0{,}895 \text{ МПа} = 9{,}12 \text{ кгс/см}^2.$$

**II.8.** Определить диаметр $d$ суженной части горизонтального трубопровода (рис. II.4), при котором вода поднимается на высоту $h = 3{,}5$ м (расход $Q = 6$ л/с, диаметр $D = 10$ см).

Р е ш е н и е. Сечение *1—1* принимаем в суженной части трубы, где нужно определить диаметр $d$, сечение *2—2* — на выходе из расширенной части трубы, где давление равно атмосферному ($p_2 = p_a$). Плоскость сравнения совместим с осью трубы, тогда $z_1 = z_2 = 0$. С учетом этого уравнение Д. Бернулли получим в виде

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_a}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}.$$

Для того чтобы вода поднялась из резервуара на высоту $h$, удельная энергия давления на поверхности воды в резервуаре $\frac{p_a}{\rho g}$ должна быть на величину $h$ выше, чем удельная энергия давления в сечении *1—1*, т. е.

$$\frac{p_a}{\rho g} = \frac{p_1}{\rho g} + h.$$

Решая совместно эти уравнения, получим

$$\frac{V_1^2}{2g} = h + \frac{V_2^2}{2g}.$$

Используя уравнение неразрывности (II.6) и уравнение (II.3), получим $V_1 = \frac{Q}{\omega_1} = \frac{4Q}{\pi d^2}$, $V_2 = \frac{4Q}{\pi D^2}$. Подставляя эти величины в последнее уравнение и решая его относительно диаметра суженной части, получим

$$d = \frac{2\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{2g\pi^2 h + \frac{16Q^2}{D^4}}} = \frac{2\sqrt{0{,}006}}{\sqrt[4]{2\cdot 9{,}81\cdot 3{,}14^2\cdot 3{,}5 + \frac{16\cdot 0{,}006^2}{0{,}1^4}}} = 0{,}03\ \text{м} = 3\ \text{см}.$$

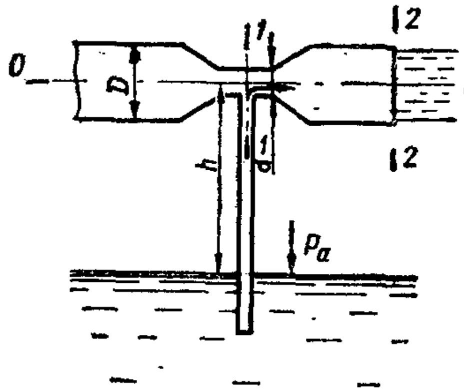


Рис. II.4

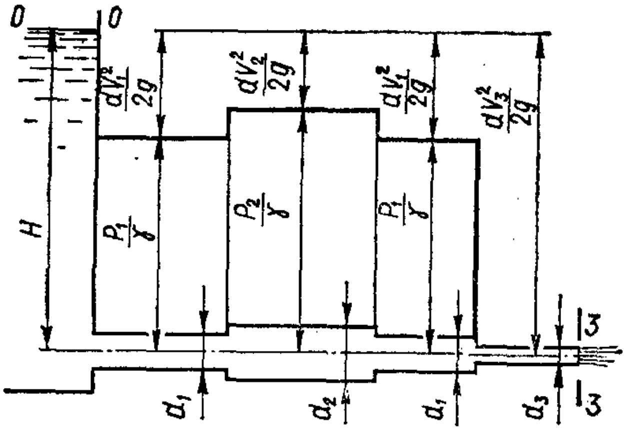


Рис. II.5

**II.9.** Определить расход воды в горизонтальном трубопроводе переменного сечения (рис. II.5), скорость на каждом из его участков и построить пьезометрическую линию, если $H = 5$ м, $d_1 = 15$ мм, $d_2 = 20$ мм и $d_3 = 10$ мм.

Решение. *Уравнение Д. Бернулли для сечений 0—0 и 3—3* при совмещении плоскости сравнения с осью трубы будет иметь вид

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{V_0^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{V_3^2}{2g}.$$

В данном случае $z_0 = H$, $z_3 = 0$. В связи с тем что в сечениях *0—0* и *3—3* давление равно атмосферному, то $\frac{p_0}{\rho g} = \frac{p_3}{\rho g} = \frac{p_a}{\rho g}$. Учитывая, что $H = \text{const}$, а скорость в сечении *0—0* $V_0 = 0$, скорость в выходном сечении *3—3* определится из зависимости

$$\frac{V_3^2}{2g} = H,$$

откуда $V_3 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 5} = 9{,}9$ м/с.

Расход воды в трубопроводе

$$Q = V_3\omega_3 = V_3\frac{\pi d_3^2}{4} = 9{,}9\cdot\frac{3{,}14\cdot 0{,}01^2}{4} = 0{,}00078\ \text{м}^3/\text{с}.$$

Скорость в сечении *1—1*

$$V_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \frac{4 \cdot 0{,}00078}{3{,}14 \cdot 0{,}015^2} = 4{,}4 \text{ м/с}.$$

Скорость в сечении *2—2*

$$V_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2} = \frac{4 \cdot 0{,}00078}{3{,}14 \cdot 0{,}02^2} = 2{,}48 \text{ м/с}.$$

Пьезометрическую линию строят, исходя из следующих положений. Поскольку задача решается без учета потерь энергии, то напорная линия (линия полной энергии) будет представлять собой горизонтальную прямую, являющуюся продолжением свободной поверхности воды в сечении *0—0*. Пьезометрическая линия расположится ниже напорной линии на величину $\frac{V^2}{2g}$ в каждом сечении. Таким образом, отложив вниз от напорной линии величины $\frac{V^2}{2g}$ в сечениях, соответствующих изменению диаметра трубопровода, получим ряд точек, соединив которые построим пьезометрическую линию (рис. II.5). При этом

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{4{,}4^2}{2 \cdot 9{,}81} = 0{,}987 \text{ м}; \quad \frac{V_2^2}{2g} = \frac{2{,}48^2}{2 \cdot 9{,}81} = 0{,}312 \text{ м};$$

$$\frac{V_3^2}{2g} = \frac{9{,}9^2}{2 \cdot 9{,}81} = 5 \text{ м}.$$

**Пример 2.1.** На оси водопроводной трубы установлена трубка Пито с дифференциальным ртутным манометром. Определить максимальную скорость движения воды в трубе $u_{\text{макс}}$, если разность уровней ртути в манометре $\Delta h = 18$ мм (рис. 2.2).

*Решение.* Трубка Пито измеряет скоростной напор

$$H = \frac{u_{\text{макс}}^2}{2g}$$

(тарировочный коэффициент трубки равен единице).

Для определения $H$ запишем уравнение равновесия в ртутном маноме ре относительно плоскости $a - a$:

$$p_1 + \Delta h \rho_{\text{рт}} g = p_2 + \Delta h \rho g,$$

где $p_1$ и $p_2$ — давления в трубках ртутного манометра на уровне верхн отметки ртути;

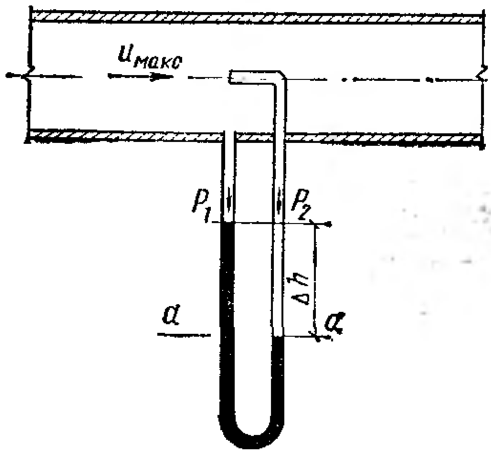


Рис. 2.2

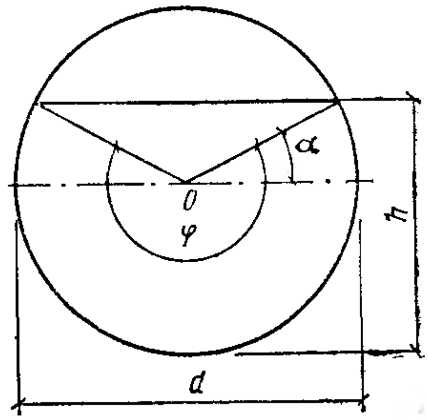


Рис. 2.3

$\rho$ и $\rho_{\text{рт}}$ — плотности воды (1000 кг/м³) и ртути (13 600 кг/м³).

Отсюда

$$H = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} = \Delta h \left( \frac{\rho_{\text{рт}}}{\rho} - 1 \right).$$

Подставляя исходные даниые, получим:

$$H = 0{,}018\ (13\,600/1000 - 1) = 0{,}227 \text{ м}.$$

Максимальная скорость в трубе

$$u_{\text{макс}} = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}227} = 2{,}1 \text{ м/с}.$$

**Пример 2.2.** Определить пределы измеиения гидравлического радиуса $R$ для канализациоиных самотечиых трубопроводов, если диаметр их $d$ измеияется от 150 до 3500 мм. Расчетное (наибольшее) иаполнение: $a=h/d=0{,}6$ для труб $d=150$ мм; $a=h/d=0{,}8$ для труб $d=3500$ мм (рис. 2.3).

*Решение.* Гидравлический радиус определяем по формуле (2.5):

$$R=\omega/\chi,$$

где

$$\omega=\frac{\pi d^2}{4}\,\frac{\varphi}{2\pi}+\frac{1}{2}\left(h-\frac{d}{2}\right)2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(h-\frac{d}{2}\right)^2}=$$

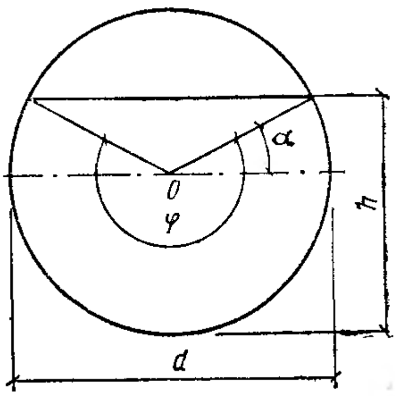



Рис. 2.3

$$= \frac{\pi d^2}{4}\,\frac{\varphi}{2\,\pi} + d^2\,(a - 0{,}5)\,\sqrt{a\,(1 - a)};$$

$$\varkappa = \frac{\pi\, d\, \varphi}{2\pi}\,.$$

Угол $\alpha$ находим из соотношения

$$\sin\,\alpha = \frac{h - d/2}{d/2} = \frac{a\,d - 0{,}5\,d}{0{,}5\,d} = \frac{a}{0{,}5} - 1;$$

$$\varphi = \pi + 2\,\alpha.$$

Для трубы $d = 150$ мм

$$\sin\alpha = 0{,}6/0{,}5 - 1 = 0{,}2;\ \ \alpha = 0{,}2 \text{ рад};\ \ \varphi = 3{,}14 + 2\cdot 0{,}2 = 3{,}54 \text{ рад};$$

$$\omega = \frac{3{,}14\cdot 0{,}15^2\cdot 3{,}54}{4\cdot 6{,}28} + 0{,}15^2\,(0{,}6 - 0{,}5)\,\sqrt{0{,}6\,(1 - 0{,}6)} = 0{,}0111 \text{ м}^2;$$

$$\chi = 3{,}14\cdot 0{,}15\cdot 3{,}54/6{,}28 = 0{,}266 \text{ м};$$

$$R = 0{,}0111/0{,}266 = 0{,}0417 \text{ м}.$$

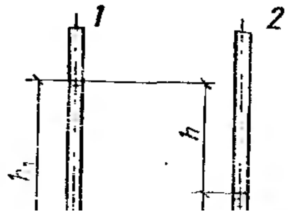
Для трубы $d = 3500$ мм

$$\sin\alpha = 0{,}8/0{,}5 - 1 = 0{,}6;\ \ \alpha = 0{,}63 \text{ рад};\ \ \varphi = 3{,}14 + 2\cdot 0{,}63 = 4{,}4 \text{ рад};$$

$$\omega = \frac{3{,}14\cdot 3{,}5^2\cdot 4{,}4}{4\cdot 6{,}28} + 3{,}5^2\,(0{,}8 - 0{,}5)\,\sqrt{0{,}8\,(1 - 0{,}8)} = 8{,}22 \text{ м}^2;$$

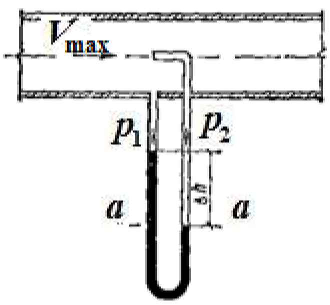
$$\chi = 3{,}14\cdot 3{,}5\cdot 4{,}4/6{,}28 = 7{,}7 \text{ м};$$

$$R = 8{,}22/7{,}7 = 1{,}07 \text{ м}.$$




Таким образом, гидравлический радиус изменяется от 0,04 до 1,07 м.

**Пример 5.1.** На оси водопроводной трубы установлена трубка Пито с дифференциальным ртутным манометром. Определить максимальную скорость движения воды в трубе $V_{\max}$, если разность уровней ртути в манометре $\Delta h = 18$ мм.




**Решение:**

Трубка Пито измеряет скоростной напор

$$H = \frac{V_{max}^2}{2g}$$

Откуда $V_{max} = \sqrt{2gH}$

Для определения $H$ запишем уравнение равновесия в ртутном манометре относительно плоскости *a-a*

$$p_1 + \Delta h \rho_{\text{рт}} g = p_2 + \Delta h \rho g$$

где $p_1, p_2 -$ давления в трубках ртутного манометра на уровне верхней отметки ртути; $\rho_{\text{рт}}, \rho$ - плотность ртути (13600 кг/м$^3$) и воды (1000 кг/м$^3$).

Отсюда получаем

$$H = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \Delta h\left(\frac{\rho_{\text{рт}}}{\rho} - 1\right)$$

Подставляя исходные данные, получим

$$H = 0{,}018\left(\frac{13600}{1000} - 1\right) = 0{,}227 \text{ м}.$$

Таким образом, максимальная скорость в трубе

$$V_{max} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}227} = 2{,}1 \text{ м}.$$

**№ 1**. По трубе диаметром 70 мм протекает за сутки 120 000 кг нефти плотностью 820 кг/м$^3$, вязкость нефти $V$ = 0,5 см$^2$/с.

Определить режим движения нефти.

*Решение*

$$\mathrm{Re} = V \cdot d / \nu;\ V = Q / \omega; Q = W / t; W = m / \rho; Q = m / \rho \cdot t;$$

Q = 120 000 / 820 · 86 400 = 0,0017 м$^3$/с;

$\omega = \pi \cdot d^2 / 4 = 3{,}14 \cdot 0{,}07^2 / 4 = 0{,}0038$ (м$^2$);

V = 0,0017 / 0,0038 = 0,45 (м/с);

Re = 45 · 7 / 0,5 = 630 < $\mathrm{Re}_{кр}$ = 2320 – режим ламинарный.

Определить режим движения воды в водопроводной трубе диаметром $d$ = 300 мм, если протекающий по ней расход $Q$ = 0,136 м$^3$/с. Температура воды 10°С.

**Решение:**

Число Рейнольдса находим по формуле:

$$Re = \frac{\upsilon d}{\nu}$$

Средняя скорость движения воды в трубе

$$\upsilon = \frac{Q}{\omega},$$

где живое сечение потока $\omega = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}3^2}{4} = 0{,}071 \text{ м}^2$

Тогда $\upsilon = \frac{0{,}136}{0{,}071} = 1{,}92 \text{ м/с}.$

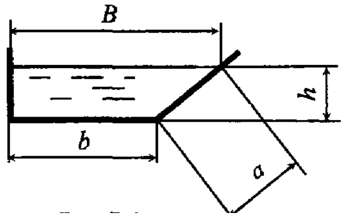
Кинематический коэффициент вязкости воды при температуре 10°С находим по таблице 4.5 (Приложение 4): $\nu = 0{,}0131 \cdot 10^{-4}$ м$^2$/с.

Следовательно, $\mathrm{Re} = \frac{1{,}92 \cdot 0{,}3}{0{,}0131 \cdot 10^{-4}} = 441000$

Так как $\mathrm{Re} = 441000 > 2320$ значит режим движения турбулентный.

## Задачи

**Задача 4.1.** Жидкость движется в лотке со скоростью $V$ = 0,1 м/с. Глубина наполнения лотка $h$ = 30 см, ширина по верху $B$ = 50 см, ширина по низу $b$ = 20 см. Определить смоченный периметр, площадь живого сечения, гидравлический радиус, расход, режим движения жидкости, если динамический коэффициент вязкости жидкости $\mu$ = 0,0015 Па·с, а ее плотность $\rho$ = 1200 кг/м$^3$.



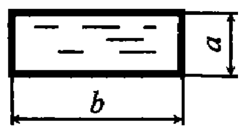

**Задача 4.2.** Найти минимальный диаметр $d$ напорного трубопровода, при котором нефть будет двигаться при турбулентном режиме, если кинематический коэффициент вязкости нефти $\nu$ = 0,3 см$^2$/с, а расход в трубопроводе $Q$ = 8 л/с.

**Задача 4.3.** По трубе диаметром $d$ = 0,1 м под напором движется вода. Определить расход, при котором турбулентный режим сменится ламинарным, если температура воды $t$ = 25°C.

**Задача 4.4.** Определить критическую скорость, при которой происходит переход от ламинарного режима к турбулентному, в трубопроводе диаметром $d$ = 30 мм при движении воды ($\nu$ = 0,009 Ст), воздуха ($\nu$ = 0,162 Ст) и глицерина ($\nu$ = 4,1 Ст).

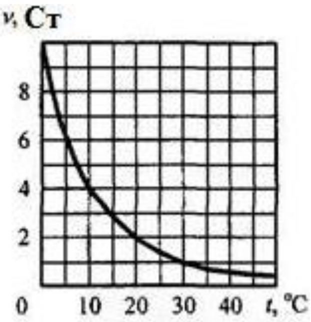
**Задача 4.5.** Определить, изменится ли режим движения воды в напорном трубопроводе $d$ = 0,5 м при возрастании температуры от 15 до 65°C, если расход в трубопроводе $Q$ = 15 л/с.

**Задача 4.6.** Вода движется под напором в трубопроводе прямоугольного сечения. Определить при каком максимальном расходе сохранится ламинарный режим. Температура воды $t$ = 30°C, $a$ = 0,2 м, $b$ = 0,3 м.



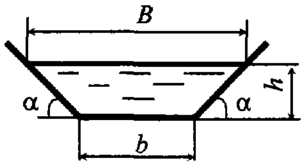

**Задача 4.7.** По трубе диаметром $d$ = 0,1 м под напором движется вода. Определить расход, при котором турбулентный режим сменится ламинарным, если температура воды $t$ = 25°C.

**Задача 4.8.** Жидкость движется в безнапорном трубопроводе с расходом $Q$ = 22 м$^3$/ч. Трубопровод заполнен наполовину сечения. Диаметр трубопровода $d$ = 80 мм. Определить, при какой температуре будет происходить смена режимов движения жидкости. График зависимости



кинематического коэффициента вязкости представлен на рисунке.

**Задача 4.9.** Жидкость, имеющая динамический коэффициент вязкости $\mu$ = 1,005 Па·с и плотность $\rho$ = 900 кг/м$^3$, движется в трапецеидальном лотке. Определить критическую скорость, при которой будет происходить смена режимов движения жидкости. Глубина наполнения $h$ = 0,2 м, ширина лотка по дну $b$ = 25 см, угол наклона боковых стенок лотка к горизонту $\alpha$ = 30°.

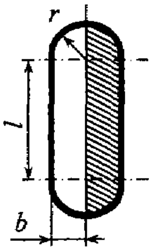



**Задача 4.10.** Применяемые в водоснабжении и канализации трубы имеют минимальный диаметр $d$ = 12 мм и максимальный диаметр $d$ = 3500 мм. Расчетные скорости движения воды в них $V$ = 0,5÷4 м/с. Определить минимальное и максимальное значение чисел Рейнольдса и режим течения в этих трубопроводах.

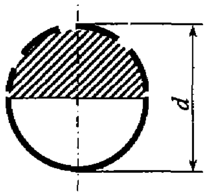
**Задача 4.11.** Для осветления сточных вод используют горизонтальный отстойник, представляющий собой удлиненный прямоугольный резервуар. Его глубина $h$ = 2,6 м, ширина $b$ = 5,9 м. Температура воды $t$ = 20°C. Определить среднюю скорость и режим движения сточной жидкости, если ее расход Q = 0,08 м$^3$/с, а коэффициент кинематической вязкости $\nu$ = 1,2·10$^{-6}$ м$^2$/с. При какой скорости в отстойнике будет наблюдаться ламинарный режим движения жидкости?

**Задача 4.12.** Конденсатор паровой турбины оборудован 8186 трубками диаметром $d$ = 2,5 см. Через трубки пропускается охлаждающая вода при $t$ = 10°C. Будет ли при расходе воды $Q$ = 13600 м$^3$/с обеспечен турбулентный режим движения в трубках?

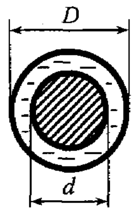
**Задача 4.13.** Определить режим движения горячей воды ($t$ = 80°C) в пробковом кране, проходное сечение которого при частичном открытии изображено на рисунке, если $l$ = 20 мм, $b$ = $r$ = 3 мм, расход воды $Q$ = 0,1 л/с.



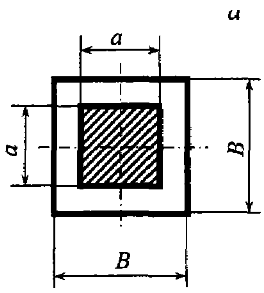

**Задача 4.14.** Определить режим движения воды при $t$ = 20°C в смесителе, проходное сечение которого открыто наполовину, если $d$ = 10 мм, расход воды $Q$ = 0,1 л/с.



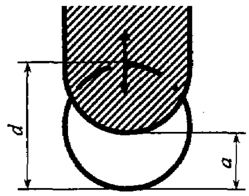

**Задача 4.15.** Смазка протекает через кольцевую щель. Определить гидравлический радиус при условии, что $D$ = 50 мм, $d$ = 48 мм.



**Задача 4.16.** Определить гидравлический радиус для формы потока, изображенной на рисунке.




**Задача 4.17.** Определить гидравлический радиус, если простая задвижка на трубе круглого сечения $d$ частично закрыта, $\frac{a}{d} = 0{,}5$.




Определить характер режима при движении воды по трубопроводу диаметром $d = 10$ *см*, если расход $Q = 4$ *л/сек* и температура воды $t = 14°$

Определить режим движения воды в трубе диаметром $d = 0{,}3$ *м* при средней скорости $v = 1{,}2$ *м/сек* и кинематической вязкости $\nu = 0{,}01$ *Ст* ($t = 20$ °C).

Определить режим движения воды в канале с гидравлическим радиусом $R = 1{,}2$ *м* при средней скорости $v = 0{,}8$ *м/сек* и температуре воды 15 °C ($\nu = 0{,}0114$ *Ст*).