Контактно в 10.15

4.5.7. Методика составления уравнения Бернулли для решения теоретических и инженерных задач

С помощью уравнения Бернулли решаются многие теоретические и практические задачи. Применение уравнения Бернулли предусмотрено для реальной, вязкой жидкости при установившемся движении для тех сечений, где движение не должно быть резко изменяющимся.

На использовании уравнения Бернулли основано создание приборов для измерения скорости и расхода потока жидкости.

При составлении уравнения Бернулли следует пользоваться следующей ***методикой.***

1. ***Выбираются два сечения***, в которых известно наибольшее количество параметров, входящих в уравнение, или их нужно определить. Такими сечениями служат свободная поверхность жидкости или места установки измерительных приборов (манометров, вакуумметров, пьезометров и им подобных). Сечения проводятся горизонтально по свободной поверхности (для практических расчётов скорость на свободной поверхности принимается равной нулю, $\upsilon = 0$) или нормально к направлению движения жидкости, т. е. по живому сечению.

2. ***Сечения нумеруются по направлению движения жидкости.*** Это обусловлено тем, что потери напора в гидравлических сопротивлениях увеличиваются по направлению движения жидкости, и дополнительный член уравнения h_w, учитывающий эти потери, должен быть со знаком плюс.

3. В уравнении Бернулли рекомендуется учитывать ***абсолютное давление в выбранных сечениях.*** Это позволит избежать ошибок при определении давления в сечениях.

4. ***Выбирается плоскость сравнения*** **0-0**. Как правило, она совмещается с одним из сечений или проводится через его ось, тогда геометрическая высота этого сечения равна нулю ($z = 0$). Следует помнить, что плоскость сравнения всегда горизонтальная. Отсчёты геометрической высоты сечения z от плоскости сравнения вверх считаются положительными, вниз – отрицательными.

5. ***Уравнение Бернулли записывается в общем виде.*** Под уравнением представляются значения параметров. Производится подстановка всех величин в уравнение в буквенном выражении. Уравнение решается относительно неизвестного параметра.

Или по другому м**етодические рекомендации к проведению расчетов**

Для решения задачи с применением уравнения Бернулли следует:

1) выбрать два сечения, для которых записывается уравнение. В качестве сечений *рекомендуется* брать:

- выход в атмосферу, где $p_{абс} = p_a$;

- свободную поверхность в резервуаре, где скорость $V = 0$

- сечение, в котором присоединен прибор для измерения давления (манометр, вакуумметр, пьезометр и др.).

2) записать уравнение Бернулли в общем виде – формула (5.1) для идеальной жидкости и формула (5.2) для реальной жидкости;

3) переписать уравнение для заданных сечений с заменой его членов заданными буквенными величинами и исключить члены, равные нулю.

При этом *необходимо помнить*:

- уравнение Бернулли записывается по течению жидкости;

- вертикальная ордината z всегда отсчитывается от произвольной горизонтальной плоскости вверх;

- давление p, входящее в правую и левую части уравнения, должно быть задано в одной системе отсчета (абсолютной или избыточной);

- коэффициент Кориолиса в задачах на движение потока реальной жидкости следует учитывать только при ламинарном режиме течения $\alpha = 2$, для турбулентных потоков можно принимать $\alpha = 1$;

- суммарная потеря напора $\sum h$ записывается в правой части уравнения со знаком «+» и складывается из местных потерь, которые определяются формулой Вейсбаха, и потерь на трение по длине, определяемых формулой Дарси.

6.2. Примеры решения задач по теме: "Расчёт простых трубопроводных систем"

Задача 6.2.1 С помощью насоса по трубе диаметром d = 50 мм и длиной l = 70 м нефть подаётся в закрытый резервуар на высоту H = 15 м. Считать H = const.

Определить показание мановакуумметра ($p_{мв}$), установленного на поверхности нефти в закрытом резервуаре, если показание манометра после насоса $p_{ман}$ = 1,3 ат. Расход нефти Q = 1,2 л/с, плотность нефти $\rho_н$ = 900 кг/м^3, относительная вязкость по Энглеру °E = 4,0. В системе установлен пробковый кран с углом закрытия α = 40° и два колена с коэффициентом сопротивления $\zeta_{кол.}$ = 0,8 (рис. 6.4).

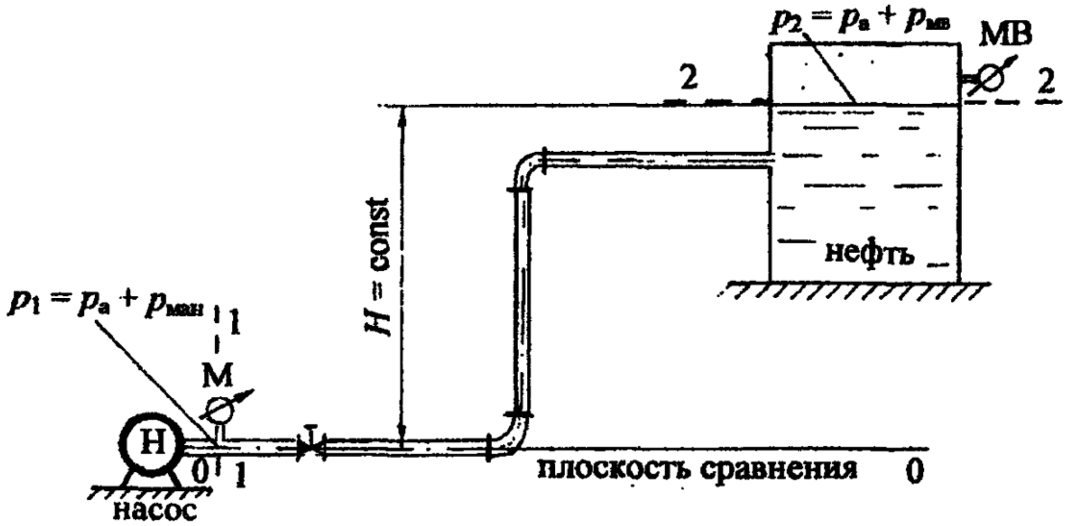


Рис. 6.4

Решение. Представленная трубопроводная система относится ***к первому типу*** простых систем.

Следует вспомнить из главы 1 (задача 1.5.3), что ***мановакуумметр*** – это прибор, который может измерять, как манометрическое (избыточное) давление, так и вакуум. При решении задачи давление на поверхности нефти будем обозначать $p_{мв}$. Если при решении задачи значение давления получится положительным, значит, мановакуумметр работает, как манометр; отрицательное значение давления означает, что мановакуумметр работает, как вакуумметр.

Для определения показания мановакуумметра воспользуемся уравнением Бернулли. Согласно методике составления уравнения (см. раздел 4.5.7):

1. Выбираем ***два сечения***: ***одно*** - в месте установки манометра, это сечение проводим нормально к направлению движения жидкости, где скорость равна скорости движения нефти в трубе – υ; ***другое*** – по свободной поверхности в резервуаре, где давление определяется по мановакуумметру, а скорость равна нулю.

2. Сечения **1-1** и **2-2** нумеруем по направлению движения жидкости, чтобы в уравнении потери напора в гидравлических сопротивлениях учитывались со знаком "+".

3. В выбранных сечениях принимаем абсолютное давление, т. е. с учётом атмосферного: $p_1 = p_а + p_{ман}$; $p_2 = p_а + p_{мв}$.

4. Плоскость сравнения **0-0** проводим через ось первого сечения: $z_1 = 0$; $z_2 = H$.

5. Записываем уравнение Бернулли (4.15) в общем виде и производим подстановку всех параметров:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 \upsilon_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 \upsilon_2^2}{2g} + h_{w_{1-2}};$$

$$\begin{array}{ll} z_1 = 0; & z_2 = H; \\ p_1 = p_а + p_{ман}; & p_2 = p_а + p_{мв}; \\ \upsilon_{1\,сеч.} = \upsilon;\ \ \alpha_1 = 2{,}0; & \upsilon_{2\,сеч.} = 0. \end{array}$$

Движущаяся жидкость – нефть относится к вязким жидкостям, поэтому предполагаем ламинарный режим (коэффициент $\alpha_1 = 2{,}0$). В процессе решения задачи режим движения нефти будет проверен.

Подставляем все параметры в уравнение Бернулли:

$$\frac{p_а}{\rho_н g} + \frac{p_{ман}}{\rho_н g} + \frac{2\upsilon^2}{2g} = H + \frac{p_а}{\rho_н g} + \frac{p_{мв}}{\rho_н g} + h_w.$$

После сокращений и преобразования уравнения Бернулли получим:

$$\frac{p_{мв}}{\rho_н g} = \frac{p_{ман}}{\rho_н g} + \frac{2\upsilon^2}{2g} - H - h_w. \qquad (6.10)$$

Рассчитаем все слагаемые в уравнении (6.10):

$$\frac{p_{ман}}{\rho_н g} = \frac{1{,}3 \cdot 98 \cdot 10^3}{900 \cdot 9{,}8} = 14{,}44\,\text{м}.$$

Скорость движения нефти в трубе (υ) рассчитываем через расход (Q):

$$\upsilon = \frac{Q}{\omega} = \frac{4Q}{\pi d^2};$$

расход Q и диаметр d переводим: Q = 1,2 л/с = 1,2 · 10^{-3} м^3/с; d = 0,05 м;

$$\upsilon = \frac{4 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-3}}{3{,}14 \cdot 0{,}05^2} = 0{,}61 \text{м/с};$$

скоростной напор $\dfrac{\upsilon^2}{2g} = \dfrac{0{,}61^2}{2 \cdot 9{,}8} = 0{,}019 \text{м}$ (достаточно малая величина).

Рассчитаем потери напора в гидравлических сопротивлениях по формуле (5.1)

$$h_w = \Sigma h_r + h_l;$$

потери напора в местных сопротивлениях по формуле (5.2)

$$\Sigma h_r = \Sigma \zeta \frac{\upsilon^2}{2g},$$

где $\Sigma\zeta$ – сумма коэффициентов местных сопротивлений. Учитываем потери напора в двух коленах и в пробковом кране:

$$\Sigma\zeta = 2\,\zeta_{кол.} + \zeta_{кр.} + \zeta_{вых.};$$

по табл. 4 (см. приложение): $\zeta_{кр.}$ = 17,3 при угле закрытия α = 40°, $\zeta_{вых.}$ =1,0, тогда:

$$\Sigma\zeta = 2 \cdot 0{,}8 + 17{,}3 + 1{,}0 = 19{,}9;$$

получим Σh_r = 19,9 · 0,019 = 0,38 м.

Потери напора по длине определяем согласно формуле (5.3):

$$h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{\upsilon^2}{2g}.$$

Для выбора расчётной формулы коэффициента гидравлического сопротивления λ (см. схему, рис. 5.1) определим режим движения жидкости по критерию Рейнольдса (см. формулу 4.20):

$$Re = \frac{\upsilon d}{\nu}.$$

В формулу (4.20) входит коэффициент кинематической вязкости ν. Для расчёта этого коэффициента воспользуемся значением относительной вязкости в градусах Энглера (°E) (см. физические свойства жидкости). По формуле Уббелоде:

$$\nu = \left(0{,}0731°E - \frac{0{,}0631}{°E}\right) \cdot 10^{-4};$$

$$\nu = \left(0{,}0731 \cdot 4{,}0 - \frac{0{,}0631}{4{,}0}\right) \cdot 10^{-4}, \text{м}^2/\text{с}; \ \nu = 0{,}277 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Получим:
$$Re = \frac{0{,}61 \cdot 0{,}05}{0{,}277 \cdot 10^{-4}} = 1101 < Re_{\text{кр}} = 2300.$$

Так как число ***Re*** меньше критического значения, заключаем, что имеет место ***ламинарный режим движения нефти***. Принятое значение коэффициента $\alpha_1 = 2{,}0$ верно.

Для ламинарного режима коэффициент гидравлического сопротивления λ рассчитывается по формуле (5.8)

$$\lambda = \frac{64}{Re}.$$

Рассчитаем потери напора по длине:

$$h_l = \frac{64}{Re} \frac{l}{d} \frac{\upsilon^2}{2g}; \ h_l = \frac{64}{1101} \cdot \frac{70}{0{,}05} \cdot 0{,}019 = 1{,}54 \text{ м}.$$

Потери напора в гидравлических сопротивлениях:

$$h_w = 0{,}38 + 1{,}54 = 1{,}92 \text{ м}.$$

Подставим значение всех слагаемых в преобразованное уравнение Бернулли (6.10):

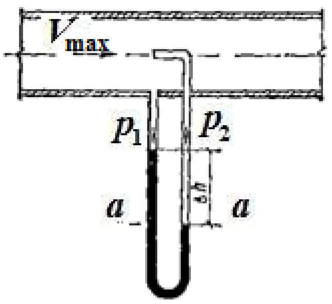
$$\frac{p_{мв}}{\rho_н g} = 14{,}44 + 0{,}019 \cdot 2 - 15{,}0 - 1{,}92 = -2{,}44 м.$$

Получили отрицательное значение, значит, мановакуумметр работает как вакуумметр. Величина вакуума

$$p_{мв} = p_{вак.} = 2{,}44 \cdot \rho_н g = 2{,}44 \cdot 900 \cdot 9{,}8 = 21521 \text{ Па} \text{ или } p_{вак.} = 0{,}22 \text{ ат.}$$

Ответ. Показание мановакуумметра соответствует вакуумметрическому давлению: $p_{мв} = p_{вак.} \approx 0{,}22$ ат.

Пример 5.1. На оси водопроводной трубы установлена трубка Пито с дифференциальным ртутным манометром. Определить максимальную скорость движения воды в трубе V_{max}, если разность уровней ртути в манометре Δh = 18 мм.



Решение:

Трубка Пито измеряет скоростной напор

$$H = \frac{V_{max}^2}{2g}$$

Откуда $V_{max} = \sqrt{2gH}$

Для определения H запишем уравнение равновесия в ртутном манометре относительно плоскости *a-a*

$$p_1 + \Delta h \rho_{рт} g = p_2 + \Delta h \rho g$$

где $p_1, p_2 -$ давления в трубках ртутного манометра на уровне верхней отметки ртути; $\rho_{рт}, \rho$ - плотность ртути (13600 кг/м^3) и воды (1000 кг/м^3).

Отсюда получаем

$$H = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \Delta h \left(\frac{\rho_{рт}}{\rho} - 1\right)$$

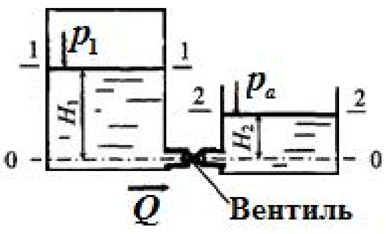
Подставляя исходные данные, получим

$$H = 0{,}018 \left(\frac{13600}{1000} - 1\right) = 0{,}227 \text{ м.}$$

Таким образом, максимальная скорость в трубе

$$V_{max} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}227} = 2{,}1 \text{ м.}$$

Пример 5.2. Горизонтальная труба диаметром d = 5 см соединяет резервуары с водой, в которых поддерживаются постоянные уровни H_1 = 4,5 м и H_2 = 2,5 м. Для регулирования расхода на трубопроводе установлен вентиль. Определить коэффициент сопротивления вентиля и потерю напора в нем, если расход воды Q = 12,5 л/с, а избыточное давление на поверхности воды в напорном баке $p_{изб}$ = 25 кПа. Другими потерями напора пренебречь.



Решение:

Перед записью уравнения Бернулли выбираем два сечения.

В качестве начального сечения принимаем открытую поверхность жидкости в напорном баке и обозначаем его 1-1. В пределах этого сечения скорость жидкости мала $V_1 \approx 0$, абсолютное давление $p_1 = p_а + p_{изб}$. Конечное сечение выбираем на поверхности жидкости в сливном баке 2-2. В пределах этого сечения скорость $V_2 \approx 0$, абсолютное давление $p_2 = p_а$.

В качестве произвольной горизонтальной плоскости для отсчета нивелирных высот (сечение 0-0) выбираем плоскость, совпадающую с осью трубопровода. Тогда $z_1 = H_1$, а $z_2 = H_2$.

В соответствии с условием задачи учитываем только местные потери напора на вентиле $h_в$, тогда уравнение Бернулли принимает вид:

$$H_1 + \frac{p_1}{\rho g} = H_2 + \frac{p_а}{\rho g} + h_в$$

Выразим потери напора на вентиле

$$h_в = H_1 - H_2 + \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_а}{\rho g} = H_1 - H_2 + \frac{p_{изб}}{\rho g} = 4{,}5 - 2{,}5 + \frac{25 \cdot 10^3}{10^3 \cdot 10} = 4{,}5 \text{ м}.$$

С другой стороны, потери напора можно определить по *формуле Вейсбаха*

$$h_в = \zeta \frac{v^2}{2g}$$

Скорость движения жидкости выразим из уравнения неразрывности потока

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi d^2}$$

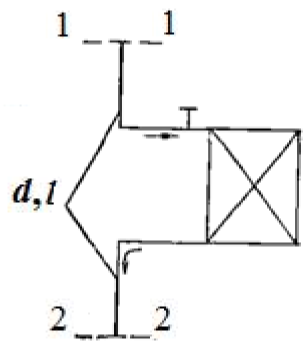
Подставив в формулу и выразив коэффициент сопротивления, окончательно получаем:

$$h_{\text{в}} = \zeta_{\text{в}} \frac{8Q^2}{g\pi^2 d^4};$$

Следовательно,

$$\zeta_{\text{в}} = \frac{h_{\text{в}} g\pi^2 d^4}{8Q^2} = \frac{4{,}5 \cdot 10 \cdot 3{,}14^2 0{,}05^4}{8 \cdot 0{,}0125^2} = 2{,}2$$

Пример 6.1. Расход горячей воды с температурой 95°С через радиатор водяного отопления Q = 0,1 м^3/ч. Определить потери давления между сечениями 1-1 и 2-2, если диаметр подводящих трубопроводов d = 0,0125 м, а их общая длина l = 5 м. Принять следующие коэффициенты сопротивления: для поворота ζ_1 = 1,45 для крана ζ_2 = 0,5, для радиатора ζ_3 = 2,1.



Решение:

Суммарные потери давления складываются из потерь давления по длине и местных потерь:

$$\Delta p_{\text{пот}} = \Delta p_{\text{л}} + \Delta p_{\text{м}}$$

Средняя скорость движения воды в трубопроводе:

$$\upsilon = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0{,}1}{3{,}14 \cdot 3600 \cdot (0{,}0125)^2} = 0{,}225 \text{ м/с}$$

Число Рейнольдса определяем с учетом того, что кинематический коэффициент вязкости воды при температуре 95°С ν = 0,3·10^{-6} м^2/с (табл.4.5):

$$\mathrm{Re} = \frac{\upsilon \mathrm{d}}{\nu} = \frac{0{,}225 \cdot 0{,}0125}{0{,}3 \cdot 10^{-6}} = 9400$$

Абсолютная шероховатость стальной трубы $\Delta = 5 \cdot 10^{-5}$ м (Приложение 7), относительная шероховатость

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{d} = \frac{5 \cdot 10^{-5}}{0{,}0125} = 4 \cdot 10^{-3}$$

Таким образом, коэффициент гидравлического трения определяем по формуле:

$$\lambda = 0{,}11 \cdot \left(\frac{68}{Re} + \frac{\Delta}{d}\right)^{0{,}25} = 0{,}11 \cdot \left(\frac{68}{9400} + 4 \cdot 10^{-3}\right)^{0{,}25} = 0{,}036$$

Вычислим потери давления по длине при плотности воды ρ = 961,9 кг/м^3 (табл.4.1):

$$\Delta p_{л} = \lambda \frac{l}{d} \rho \frac{\upsilon^2}{2} = 0{,}036 \cdot \frac{5}{0{,}0125} 961{,}9 \frac{0{,}225^2}{2} = 370 \text{ Па}$$

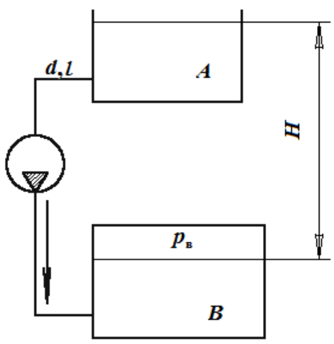
Местные потери давления складываются из потерь на поворот, в пробковом кране и в радиаторе:

$$\Delta p_{м} = \sum \xi \frac{\rho \upsilon^2}{2} = (2 \cdot 1{,}45 + 0{,}5 + 2{,}1) \cdot \frac{961{,}9 \cdot 0{,}225^2}{2} = 134 \text{ Па}$$

Суммарные потери давления

$$\Delta p_{пот} = 370 + 134 = 504 \text{ Па.}$$

Пример 6.2. Вода, перекачивается насосом из открытого бака *А* в расположенный ниже резервуар *В*, где поддерживается постоянное давление $p_в$ = 0,18 МПа (абс.) по трубопроводу общей длиной l = 225 м и диаметром d =250 мм. Разность уровней воды в баках *h*=3 м. Определить потребный напор, создаваемый насосом для подачи в бак *В* расхода воды Q = 98 л/с. Принять суммарный коэффициент местных сопротивлений ζ = 6,5. Эквивалентная шероховатость стенок трубопровода Δ = 0,15 мм. Жидкость – вода с плотностью ρ = 1000 кг/м^3 и вязкостью ν = 0,01 Ст. Атмосферное давление $p_а$ = 0,1 МПа.



Решение:

Потребный напор, создаваемый насосом для подачи в бак *В* расхода воды Q равен

$$H_{потр.} = H_{ст.} + \sum h$$

Статический напор складывается из пьезометрической высоты на поверхности жидкости в резервуаре *В* $H_{ст.} = \frac{p_в - p_а}{\rho g}$ и разности уровней воды в резервуарах *h*. Т.к. вода перекачивается в нижний бак, то вторую составляющую подставляем со знаком «-».

Потери напора $\sum h$ складываются из потерь напора на трение по длине трубопровода $h_{\text{тр}}$ и потерь на местных сопротивлениях $h_{\text{м}}$.

Таким образом

$$H_{\text{потр.}} = \frac{p_{\text{в}} - p_{\text{а}}}{\rho g} - h + h_{\text{тр}} + h_{\text{м}}$$

Потери напора $h_{\text{тр}}$ по длине трубопровода определим по формуле Дарси, записав ее через расход:

$$h_{\text{тр}} = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{8Q^2}{g \cdot \pi^2 \cdot d^4}$$

Для правильного вычисления коэффициента трения λ определим режим течения жидкости в трубопроводе:

$$Re = \frac{Vd}{\nu}$$

Согласно уравнению неразрывности скорость движения жидкости в трубопроводе

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2}$$

Тогда формула числа Рейнольдса примет вид:

$$Re = \frac{4Q}{\pi d \nu}$$

Подставив значения, определим режим течения жидкости:

$$Re = \frac{4 \cdot 0{,}098}{3{,}14 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}01 \cdot 10^{-4}} = 499110 \gg 2320$$

Величина числа Рейнольдса указывает на турбулентный режим движения. Для такого значения числа Re коэффициент трения вычислим по универсальной формуле Альтшуля:

$$\lambda = 0{,}11 \cdot \left(\frac{68}{Re} + \frac{\Delta}{d}\right)^{0{,}25}$$

Вычислим коэффициент Дарси:

$$\lambda = 0{,}11 \cdot \left(\frac{68}{499110} + \frac{0{,}15}{250}\right)^{0{,}25} = 0{,}018$$

Вычислим потери напора $h_{\text{тр}}$ по длине трубопровода

$$h_{\text{тр}} = 0{,}018 \cdot \frac{225 \cdot 8 \cdot (0{,}098)^2}{9{,}81 \cdot 3{,}14^2 \cdot 0{,}25^5} = 3{,}291 \text{ м.}$$

Местные потери напора $h_{\text{м}}$ определим по формуле Вейсбаха, записав ее через расход:

$$h_{\text{м}} = \zeta \frac{8Q^2}{g \cdot \pi^2 \cdot d^4}$$

Вычислим местные потери $h_{\text{м}}$:

$$h_{\text{м}} = 6{,}5 \frac{8 \cdot (0{,}098)^2}{9{,}81 \cdot 3{,}14^2 \cdot 0{,}25^4} = 1{,}32 \text{ м.}$$

Окончательно подставив полученные значения, определим потребный напор, используя для расчета избыточное давление в баке *B*:

$$H_{\text{потр.}} = \frac{(0{,}18 - 0{,}1)10^6}{1000 \cdot 9{,}81} - 3 + 3{,}291 + 1{,}32 = 9{,}8 \text{ м.}$$

Из открытого резервуара A при абсолютном давлении на поверхности воды в нем $p_{01} = 120кПа$ вода перетекает в нижний резервуар B по вертикальной трубе. Диаметр вертикальной трубы увеличивается от $d = 100м$ до $D = 125мм$ (Рис. 5-1).

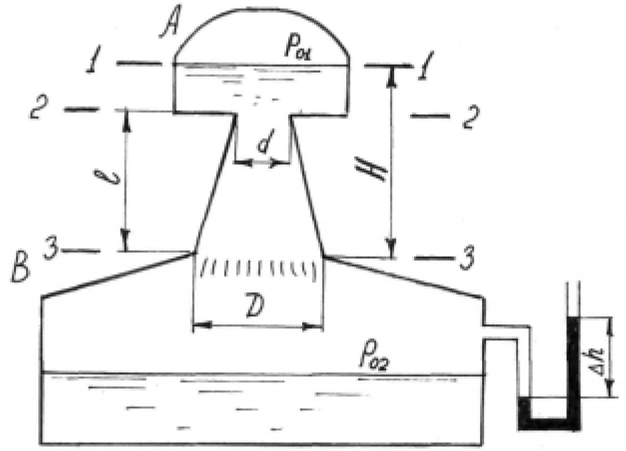


Рис. 5 -1

Расстояние между поверхностью воды в резервуаре A и выходным сечением трубы $H = 3м$, а расстояние между сечениями с диаметрами d и D составляет $l = 2м$. Показания ртутного манометра, присоединенного к резервуару B, $\Delta h = 250мм$.

Определить расход воды Q в трубе и давление p_d.в сечении $2-2$.

Решение 5.1

Вначале используем уравнение Бернулли применительно к сечениям $1-1$ и $3-3$

$$\frac{p_{01}}{\rho g} + H = \frac{p_{02}}{\rho g} + \frac{\alpha V_3^2}{2g} \qquad (5\text{-}1)$$

В этом случае: $V_3 = \frac{4Q}{\pi D^4}$, $p_{02} = p_a + \rho_P g \Delta h$. Тогда используя (5-1) получаем формулу для расхода Q

$$Q = \frac{\pi D^2}{4}\sqrt{\frac{2g}{\alpha}\left(\frac{p_{01} - p_a}{\rho g} + H - \frac{\rho_P}{\rho}\Delta h\right)} =$$

(5 -2)

$$= \frac{\pi \cdot 0.125^2}{4}\sqrt{\frac{2 \cdot 9.8}{1.05}\left(\frac{120000 - 98100}{100 \cdot 9.8} + 3 - \frac{13600}{1000} \cdot -0.25\right)} = 0.072\frac{м^3}{с} = 72\frac{л}{с};$$

Далее используем уравнение Бернулли для сечений $1-1$ и $2-2$

- $$\frac{p_{01}}{\rho g} + H = \frac{p_d}{\rho g} + l + \frac{8\alpha Q^2}{\pi^2 g d^4}. \qquad (5\text{-}3)$$
- Как следует из уравнения (5-3), давление p_d будет равно

$$p_d = p_0 + \rho g(H - l) - \frac{8\alpha\rho Q^2}{\pi^2 d^4} =$$

$$= 98100 + 1000 \cdot 9.8(3-2) - \frac{8 \cdot 1.05 \cdot 1000 \cdot 0.072^2}{\pi^2 \cdot 0.1^4} = 64кПа. \quad (5\text{-}4)$$