

Лекция 7

2.2. Кинематика твердого тела

В зависимости от движения тела кинематику твердого тела можно разделить на пять разделов: поступательное движение твердого тела, вращательное движение твердого тела, плоское или плоскопараллельное движение твердого тела, сферическое движение твердого тела, общий случай движения твердого тела.

Поступательным движением твердого тела называется такое движение твердого тела, при котором прямая, соединяющая две точки тела, движется параллельно самой себе.

Свойства точек тела, движущегося поступательно, определяется теоремой: Все точки твердого тела, движущегося поступательно, описывают одинаковые (совпадающие при наложении) траектории, и имеют одинаковые скорости и ускорения. На основании этой теоремы, если знать, как движется одна точка такого тела, то аналогично будут двигаться и другие точки тела, поэтому поступательное движение твердого тела сводится к кинематике точки. Закон поступательного движения можно представить выражениями: при векторном способе - $\vec{r}_C = \vec{r}(t)$; при координатном способе - $x_C=f(t)$, $y_C=f(t)$, $z_C=f(t)$; при естественном способе - $s_C=f(t)$, где C – центр тяжести или массы тела.

Вращательным движением твердого тела называется такое движение тела, при котором все точки этого тела остаются неподвижными, находящиеся на некоторой прямой, называемой осью вращения, а остальные точки описывают окружность с центром на этой прямой.

Вращение тела вокруг неподвижной оси определяется углом поворота φ . Угол поворота считается положительным, если вращение тела происходит против часовой стрелки. В системе СИ угол поворота φ измеряется в радианах. Изменение угла поворота от времени - $\varphi=f(t)$ – это закон вращательного движения твердого тела. Угол поворота φ в зависимости от оборотов тела n , совершенных вращение вокруг оси, связаны соотношением: $\varphi = 2\pi n$.

Вращательное движение тела вокруг неподвижной оси характеризуется угловой скоростью и угловым ускорением.

Угловая скорость определяется изменение угла поворота с течением времени и численно равна $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. В системе СИ угловая скорость измеряется в rad/c или c^{-1} .

Угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости с течением времени и численно равна $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$. В системе СИ имеет единицу измерения $-rad/c^2$ или c^{-2} .

Скорость и ускорения точки (например, A) тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяются: $V_A = \omega R$, $a_{Ar} = \varepsilon R$, $a_{An} = \omega^2 R$, $a_A = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$, где R – радиус вращения точки. Радиус вращения точки – это перпендикуляр от точки тела до оси вращения.

Передаточные механизмы (рис. 2.1) предназначены для передачи вращения от одного вала, называемого ведущим, к другому, называемому ведомым и характеризуются передаточным числом i .

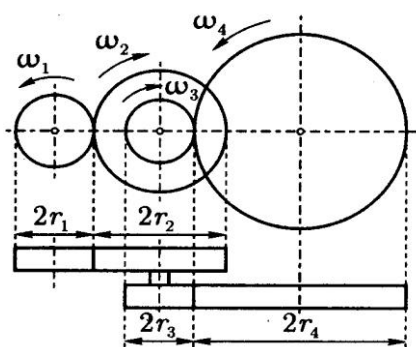


Рис. 2.1

В этом примере передаточные числа i_{1-2} для колес 1-2 и i_{3-4} для колес 3-4:

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}, \quad i_{3-4} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{r_4}{r_3} = \frac{z_4}{z_3}, \text{ где}$$

z – число зубьев колес.

Для всего механизма: $i = i_{1-2} i_{3-4}$.

Плоским движением твердого тела называется такое движение твердого тела, при котором точки движутся в плоскости параллельно некоторой неподвижной плоскости. В результате того, что точки тела движутся в плоскостях, то такое тело называют плоской фигурой.

Движение твердого тела, совершающего плоское движение, можно рассмотреть как совокупность двух перемещений: поступательного перемещения

тела с произвольной точкой, называемой полюсом, и вращения тела вокруг полюса. Выбор полюса влияет на поступательную часть движения плоской фигуры, но не влияет на вращение тела вокруг полюса.

Законом плоского движения твердого тела с полюсом в точке A являются следующие уравнения: $x_A = f_1(t)$, $y_A = f_2(t)$, $\varphi = f_3(t)$.

Скорость точки плоской фигуры можно определить несколькими способами.

Первый способ: скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и вращательной скорости точки вокруг полюса $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$, где $\vec{V}_B$ - искомая скорость; $\vec{V}_A$ - скорость полюса A ; $\vec{V}_{BA}$ - вращательная скорость точки B вокруг полюса, которая перпендикулярна расстоянию AB и численно равна $V_{BA} = \omega \cdot AB$; ω – угловая скорость фигуры.

Этот способ имеет следствие о проекции скоростей точек плоской фигуры, которое часто применяется при решении задач: проекции скоростей точек плоской фигуры на ось, проведенную через эти точки, равны.

Второй способ определения скорости точки плоской фигуры через мгновенный центр скоростей (МЦС). Мгновенный центр скоростей – это единственная точка фигуры при плоском движении, которая в каждый момент времени имеет скорость равную нулю. Если у плоской фигуры известен МЦС, то вектор скорости этой точки направлен перпендикулярно к отрезку, соединяющему точку с МЦС, в сторону угловой скорости фигуры, а численно этот вектор равен: $V_B = \omega \cdot BS$, где S - МЦС тела. Тогда при решении задач на основании этого соотношения используют свойства точек плоской фигуры: отношение скоростей точек фигуры прямо пропорционально расстоянию от этих точек до МЦС -

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AS}{BS}.$$

Существует четыре способа определения МЦС:

1 способ. Известно направление и модуль одной скорости точки и направление другой (рис. 2.2). Чтобы определить МЦС нужно провести перпендикуляры к направлениям скоростей. Точка S их пересечения и есть МЦС.

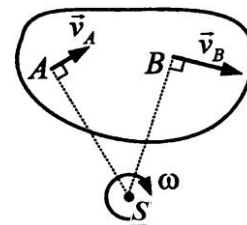


Рис. 2.2

2 способ. Скорости точек известны V_A и V_B , параллельны, а направление скоростей перпендикулярно отрезку AB . Чтобы определить МЦС нужно соединить начало скоростей точек A и B и соединить концы скоростей. Точка пересечения S есть МЦС. Возможны варианты: скорости направлены в одну сторону (рис. 2.3); скорости направлены в разные стороны (рис. 2.4).

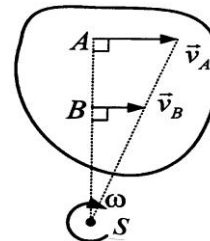


Рис. 2.3

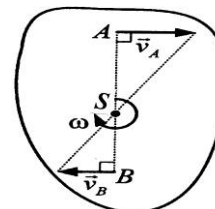


Рис. 2.4

В этих случаях: $\omega = \frac{V_A}{AS}$, $V_B = \omega \cdot BS$.

Если скорости равны между собой $V_A = V_B$, а их направление параллельное, то перпендикуляры тоже параллельны между собой, значит, в движении отсутствует вращательная составляющая плоского движения, т. е. плоское движение переходит в поступательное движение (рис. 2.5).

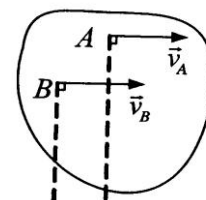


Рис. 2.5

3 способ: через общую точку соприкасающихся тел, одно из которых неподвижно (рис. 2.6). Точка P соприкосновения тел является МЦС.

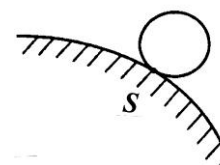


Рис. 2.6

Ускорение точки плоской фигуры можно определить через теорему об ускорении точек плоской фигуры: ускорение точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и вращательного ускорения точки вокруг полюса $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^r + \vec{a}_{BA}^n$.

Сферическим движением твердого тела называется такое движение твердого тела, при котором все точки тела описывают траектории, лежащие на сферах с одним и тем же неподвижным центром.

Пусть твердое тело имеет одну неподвижную точку O (рис. 2.7). Для

определения положения тела в пространстве введем две системы координат: $Oxyz$ и $Ox_1y_1z_1$, первая из которых неподвижная, а вторая неизменно связана с телом и перемещается вместе с ним. Начала обеих систем координат совмещены с неподвижной точкой O .

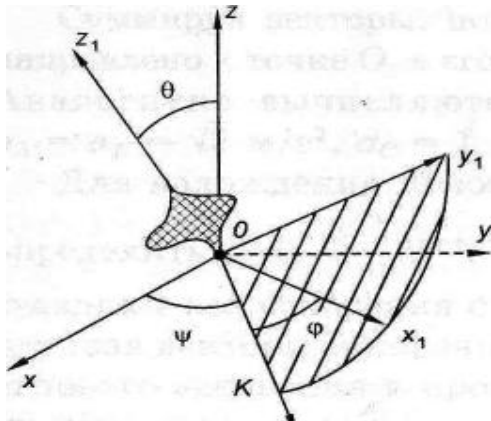


Рис. 2.7

Покажем на рисунке линию пересечения плоскостей $Oxyz$ и $Ox_1y_1z_1$. Это линия называется линией узлов (OK). Положение подвижной

системы координат по отношению к неподвижной системе координат определяется тремя независимыми углами. Углы ψ , θ , φ называются эйлеровыми углами; ψ - угол прецессии, θ – угол нутации, φ – угол собственного вращения.

В процессе движения тела углы Эйлера меняются, являясь некоторыми функциями времени: $\psi = f_1(t)$; $\varphi = f_2(t)$, $\Theta = f_3(t)$. Эти уравнения - *уравнениями сферического движения тела*.

Кинематическими характеристиками тела при сферическом движении являются угловая скорость и угловое ускорение.

Поскольку при движении тела изменяются все три угла, движение тела представляется собой вращение с угловой скоростью $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3$, где $\bar{\omega}_1 = \dot{\psi}$, $\bar{\omega}_2 = \dot{\varphi}$, $\bar{\omega}_3 = \dot{\theta}$. Так как значения $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3$ изменяются со временем численно и по направлению, то $\bar{\omega}$ называют мгновенной угловой скоростью. Величина угловой скорости $\bar{\omega}$ является величиной переменной и по величине и по направлению.

Угловым ускорением тела называется величина $\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}}$. В отличие от вращательного движения, при сферическом движении тела векторы угловой скорости и углового ускорения не лежат на одной прямой.

Поскольку в каждый момент времени происходит поворот тела вокруг мгновенной оси вращения с угловой скоростью ω , то скорость точки определяется формулой: $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, где $\vec{r}$ - радиус вектор данной точки, проведенный из неподвижной точки O .

Ускорение точки будет определяться соотношением: $\vec{a} = \vec{a}_{ep} + \vec{a}_{oc} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}$, где $\vec{a}_{ep} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ - вращательное ускорение, $\vec{a}_{oc} = \vec{\omega} \times \vec{V}$ - осеостремительное ускорение.

Общий случай движения твердого тела это когда тело является полностью свободным. Примером такого движения, может быть, полет планеты, самолета, снаряда и других тел.

Для определения положения тела в пространстве в теле выберем произвольную точку C – полюс. Тогда движение можно описать как: $x_C = f_1(t)$; $y_C = f_2(t)$, $z_C = f_3(t)$, $\psi = f_4(t)$; $\varphi = f_5(t)$, $\Theta = f_6(t)$ – это уравнения общего случая движения твердого тела.