

3. Динамика

3.1. Основные понятия и законы

Динамикой называют раздел механики, в котором изучается движение материальных тел в зависимости от действующих на них сил.

Система отсчета. При многих технических расчетах можно принимать за неподвижную всякую, неизменно связанную с Землей. Систему отсчета, по отношению к которой всякая материальная частица под действием взаимно уравновешенных сил совершает прямолинейное и равномерное движение, называют инерционной системой отсчета.

Основные законы динамики.

1. *Закон инерции.* Материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действие других тел не изменит это состояние.

2. *Закон пропорциональности силы и ускорения.* Ускорение ($\bar{a}$) материальной точки массой m пропорционально приложенной к ней силе ($\bar{P}$) и имеет одинаковое с ней направление: $m\bar{a} = \bar{P}$.

3. *Закон равенства действия и противодействия.* Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

4. *Закон независимости действия сил.* Несколько одновременно действующих на материальную точку сил сообщают точке такое ускорение, какое сообщила бы ей одна сила, равная их геометрической сумме: $m\bar{a} = \sum \bar{P}_i$.

Масса. Массой материальной частицы (тела) называют меру ее инертности, численно выражающуюся, отношением модуля силы, действующей на частицу (тело), и вызванного ею ускорения. Масса материальной точки (тела) (m) численно равна отношению ее веса (G) к ускорению свободного падения (g): $m = G/g$.

Система механических единиц. Существует две системы механических единиц: *техническая* (МКГСС), в которой основными единицами являются метр (м), килограмм силы (кГ) и секунда (с). Единицей измерения массы в этой системе будет $1 \text{ кГ} \cdot \text{с}^2/\text{м}$, т. е. масса, которой сила в 1 кГ сообщает ускорение 1

м/с^2 и *физическая* (Международная система единиц СИ), в которой основными единицами измерения механических величин являются метр (м), килограмм массы (кг) и секунда (с). Единица измерения силы - производная единица - 1 ньютон (Н). 1 Н - это сила, сообщающая массе в 1 кг ускорение 1 м/с^2 ($1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2$). Соотношение между единицами силы в системах СИ и МКГСС:
 $1 \text{ кГ} = 9,81 \text{ Н}$ или $1 \text{ Н} = 0,102 \text{ кГ}$.

Классификация сил. Силы, действующие в материальной системе, подразделяют на внешние (F^e) и внутренние (F^i) или активные и реакции связей. Кроме того при решении задач динамики рассматривают следующие постоянные или переменные силы:

- *сила тяжести.* Это постоянная сила G , действующая на любое тело, находящееся вблизи земной поверхности. Модуль силы тяжести равен весу тела. Под действием силы G любое тело при свободном падении на Землю (с небольшой высоты и в безвоздушном пространстве) имеет одно и то же ускорение g , называемое ускорением свободного падения, а иногда ускорением силы тяжести. Значение g в разных местах земной поверхности различно; оно зависит от географической широты места и высоты его над уровнем моря. На уровне моря $g = 9,8156 \text{ м/с}^2$. Из второго уравнения динамики следует, что $G = mg$ или $m = G/g$.

- *сила трения.* Так называется сила трения скольжения, действующая (при отсутствии жидкой смазки) на движущееся тело. Ее модуль определяется равенством $F = fN$, где f - коэффициент трения, который считают постоянным; N - нормальная реакция.

- *сила упругости.* Эта сила зависит от положения тела. В частности, для силы упругости пружины $P = c \cdot \lambda$, где λ - удлинение (или сжатие) пружины; c - коэффициент жесткости пружины (в системе СИ измеряется в Н/м).

- *сила вязкого трения.* Такая сила, зависящая от скорости, действует на тело при его медленном движении в очень вязкой среде (или при наличии жидкой смазки) и может быть выражена равенством $R = \mu \cdot V$, где V - скорость тела; μ - коэффициент сопротивления.

- *сила инерции*. Такой силой называют геометрическую сумму сил противодействия движущейся материальной частицы телам, сообщаемым ей ускорение, т. е. $\bar{\Phi} = -m\bar{a}$.

3.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

В зависимости от способов задания движения точки, дифференциальные уравнения могут быть:

– в векторной форме:

$$m\bar{a} = \bar{P} = m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = m \frac{d\bar{V}}{dt}.$$

– в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$m\ddot{x} = m \frac{d\dot{x}}{dt} = P_x; \quad m\ddot{y} = m \frac{d\dot{y}}{dt} = P_y; \quad m\ddot{z} = m \frac{d\dot{z}}{dt} = P_z.$$

– в проекциях на естественные оси координат:

$$ma_n = m \frac{V^2}{\rho} = P_n,$$

$$ma_\tau = m \frac{d^2 s}{dt^2} = m \frac{dV}{dt} = P_\tau.$$

Дифференциальные уравнения движения *несвободной точки* в векторной форме: $m\bar{a} = \bar{P} + \bar{N}$;

в координатной форме: $m\ddot{x} = P_x + N_x$; $m\ddot{y} = P_y + N_y$; $m\ddot{z} = P_z + N_z$,

где N – равнодействующая реакций связей.

Дифференциальные уравнения *относительного движения точки* в векторной форме: $m\bar{a}_r = \bar{P} - m\bar{a}_e - m\bar{a}_c$,

где a_e – ускорение переносного движения; a_r – относительное ускорение; a_c – ускорение Кориолиса.

Две основные задачи динамики точки.

Первая задача – зная массу точки и уравнения ее движения, найти равнодействующую приложенных к точке сил. Если известен закон движения

точки в векторной форме $\vec{r} = \vec{r}(t)$, тогда $\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$. Из основного уравнения динамики определяем силу $\vec{P} = m\vec{a}$.

Вторая задача – зная приложенные к точке силы, а также ее массу m , начальные положения и скорость, определить закон движения точки. Общий ход решения: составляют дифференциальные уравнения движения, дважды интегрируют, определяют постоянные интегрирования из начальных условий и получают закон движения точки.

Примерный алгоритм решения второй основной задачи динамики точки.

1. Выбрать начало отчета (как правило, совмещая его с начальным положением точки).
2. Провести координатные оси, направляя их, как правило, в сторону движения.
3. Изобразить движущуюся точку в произвольном положении (но чтобы $x > 0, y > 0, z > 0$).
4. Приложить к точке все действующие на нее силы.
5. Записать основное уравнение динамики применительно к данной задаче в векторном виде.
6. Спроектировать векторное уравнение на выбранные оси, то есть записать дифференциальные уравнения движения точки.
7. Преобразовать дифференциальные уравнения к виду, удобному для интегрирования.
8. Записать начальные условия.
9. Дважды проинтегрировать дифференциальные уравнения и получить их общие решения.
10. Определить постоянные интегрирования.
11. Записать частные решения дифференциальных уравнений, то есть подставить постоянные интегрирования в их общие решения.
12. Найти искомые в задаче величины или исследовать полученный результат.

