

Тема: Динамика точки

Содержание: первый этап выполнения РГР № 4

Последовательность выполнения:

1. Изучить материал лекции № 9.
2. Выбрать свое задание по шифру зачетной книжки, как и предыдущие РГР (см. ниже рисунки и таблица).
3. Движение тела (точки) разбить на два участка АВ и ВС.
4. Выбрать систему координат на участке АВ.
5. Составить дифф. уравнение движения тела (точки) на этом участке.
6. Интегрированием получить уравнение скорости на этом участке (уравнение 1).
7. Повторным интегрированием получить уравнение движения точки на этом участке (уравнение 2).
8. Определить постоянные интегрирования на этом участке C_1 и C_2 .

Это первый этап выполнения РГР № 4.

Задание и пример выполнения ВСЕЙ РГР № 4 см. ниже.

Задание РГР № 4

Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящиеся под действием постоянных сил

Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, в течении τ с. Его начальная скорость V_A . Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f . В точке B тело

покидает плоскость со скоростью V_B , описывая траекторию $y=f(x)$ и попадает в точку C плоскости BC или BD со скоростью V_C , находясь в полете T с.

Исходные данные и параметры, которые требуется определить, взять из табл. 3.2 и рис. 3.8. Считать $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 60^\circ$. При решении задачи принять тело за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Таблица 3.2

Вариант	Дано:						Найти:		
	$h, \text{ м}$	$d, \text{ м}$	$l, \text{ м}$	f	$\tau, \text{ с}$	$T, \text{ с}$			
1	2,0	-	2,0	0,10	-	1,5	$y=f(x)$	V_C	d
2	2,5	-	2,0	0,15	1,0	-	V_A	d	T
3	3,0	-	1,5	0,10	-	2,0	τ	d	V_C
4	-	4,0	-	0,10	2,0	3,5	h	l	V_A
5	-	-	3,0	0,15	1,5	4,0	V_C	h	d
6	-	3,0	-	0,20	1,0	3,0	l	h	V_A
7	-	4,0	2,5	0,05	1,0	-	V_C	h	T
8	6	-	2,0	-	0,5	2,0	V_A	f	d
9	8	-	1,5	-	0,5	2,0	V_C	f	$y=f(x)$
0	-	-	3,0	0,07	0,7	1,5	h	$y=f(x)$	V_A

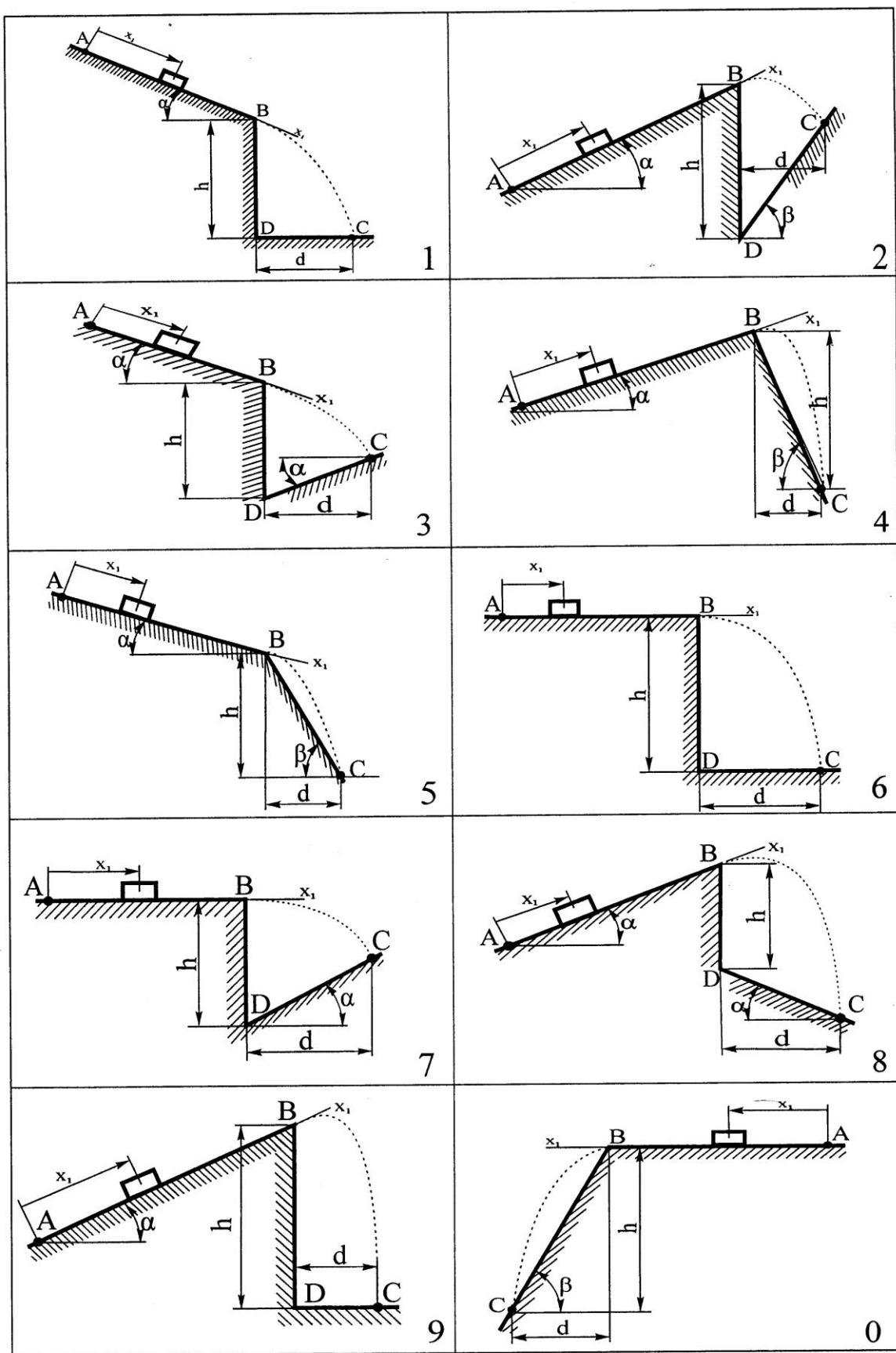


Рис. 3.8

Указания. Задание Д 1 – на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения тела на участке AB , учтя начальные условия. Затем, зная время движения на участке AB или его длину, определить, какую скорость будет иметь тело в точке B . Эта скорость является начальной для движения тела на участке BC . После этого составляют и интегрируют дифференциальное уравнение движения на участке BC тоже с учетом начальных условий, ведя отсчет времени от момента, когда тело находится в точке B , и полагая, что в этот момент $t=0$. Из полученных уравнений определяют требуемые величины.

Пример: В результате полученного толчка тело начало скользить по поверхности AB из точки A с начальной скоростью V_A , расположенной под углом α к горизонту в течении τ секунд (рис. 3.9). Коэффициент трения скольжения тела о поверхность равен f . Пройдя по плоскости расстояние $AB=l$, материальная точка покидает поверхность со скоростью V_B и падает на горизонтальную площадку в точку C со скоростью V_C , при этом оно находилось в воздухе T секунд. При решении задачи не учитывать сопротивление воздуха.

Дано: $V_A=2 \text{ м/с}$, $\alpha=30^\circ$, $h=3 \text{ м}$, $\beta=60^\circ$, $\tau=2 \text{ с}$, $f=0,4$.

Определить: d , l , уравнение траектории тела на участка BC .

Решение. В связи с тем, что при движении материальной точки от A к C , силы различны на участках AB и BC , разделим траекторию движения точки на части и рассмотрим ее движение на участке AB , под действием сил: силы тяжести $\vec{G} = m\vec{g}$, силы трения $\vec{F}_{mp}$, нормальной реакции опоры $\vec{N}$.

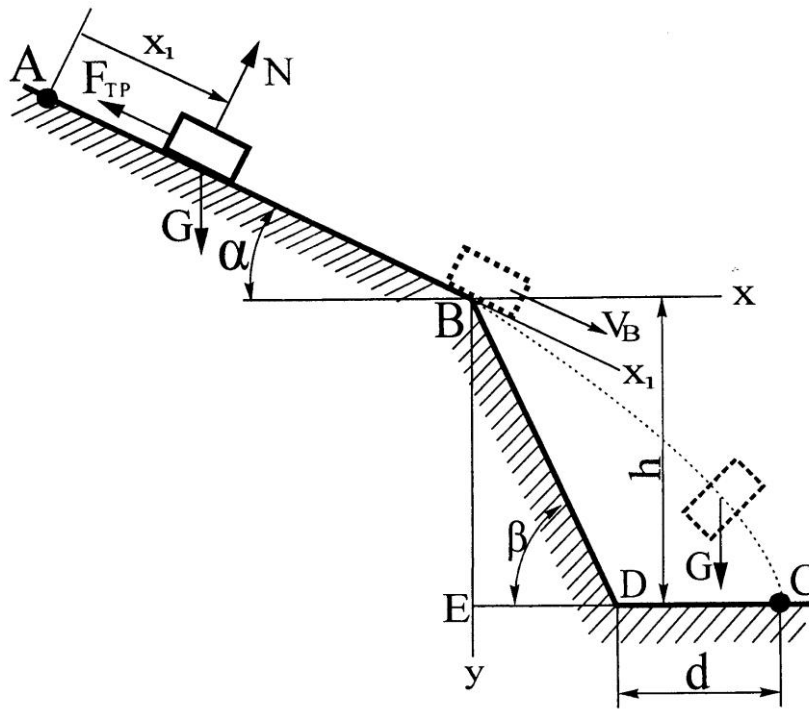


Рис. 3.9

Составим дифференциальное уравнение на ось x_1 :

$$m\ddot{x}_1 = \sum F_{xi} = G \sin \alpha - F_{mp},$$

где $G=mg$, $F_{mp}=f \cdot N$, здесь $N = G \cos \alpha = mg \cos \alpha$

Тогда $m\ddot{x}_1 = mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha$ или, разделив на m

$$\ddot{x}_1 = g \sin \alpha - fg \cos \alpha$$

и дважды проинтегрировав дифференциальное уравнение, получим:

$$\dot{x}_1 = (g \sin \alpha - fg \cos \alpha)t + C_1,$$

$$x_1 = (g \sin \alpha - fg \cos \alpha) \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Определим постоянные интегрирования из начальных условий: когда точка находилась в точке A : при $t=0$ $\dot{x}_1 = V_A = 2$ м/с, $x_1 = 0$. Подставив эти значения в уравнения, полученные при интегрировании, для $t=0$ находим $C_1=2$, $C_2=0$.

Тогда уравнения, характеризующие скорость и уравнение движения тела на участке AB имеют вид:

$$\dot{x}_1 = (g \sin \alpha - fg \cos \alpha)t + 2,$$

$$x_1 = (g \sin \alpha - fg \cos \alpha) \frac{t^2}{2} + 2t.$$

Для момента $t = \tau = 2$ с, когда тело находится в точке B имеем $\dot{x}_1 = V_B$, $x_1 = l$, и подставляя их в уравнение движения, получаем

$$V_B = (9,8 \cdot \sin 30^\circ - 0,4 \cdot 9,8 \cdot \cos 30^\circ) \cdot 2 + 2 = 5,01 \text{ м/с.} \quad (1)$$

$$l = (9,8 \cdot \sin 30^\circ - 0,4 \cdot 9,8 \cdot \cos 30^\circ) \cdot \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 = 7 \text{ м.} \quad (2)$$

Конец первого этапа практики. Возможны варианты, что в числовых значениях V_B и l сосчитать сразу не получится. Оставьте в общем виде.

Рассмотрим теперь движение груза на участке BC ; найденная скорость V_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($V_o = V_B$). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силу тяжести $\bar{G} = m\bar{g}$. Проводим из точки B оси Bx и By и составим дифференциальные уравнения движения тела:

$$m\ddot{x}_1 = \sum F_{xi} = 0; \quad m\ddot{y} = \sum F_{yi} = G.$$

Разделив обе части на m и дважды проинтегрировав, получим:

$$\ddot{x} = 0; \quad \ddot{y} = g;$$

$$\dot{x} = C_3; \quad \dot{y} = gt + C_4;$$

$$x = C_3t + C_5; \quad y = g \frac{t^2}{2} + C_4t + C_6.$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда тело находится в точке B , считая в этот момент $t=0$. Тогда, при $t=0$ $V=V_B=5,01$ м/с или в проекциях на координатные оси: $\dot{x}_0 = V_B \cos \alpha$, $\dot{y}_0 = V_B \sin \alpha$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Подставляя $t=0$ в уравнения, полученных в результате интегрирования, имеем: $\dot{x}_0 = C_3$; $\dot{y}_0 = C_5$; $x_0 = C_4$; $y_0 = C_6$. Следовательно: $C_3 = V_B \cos \alpha$; $C_4 = V_B \sin \alpha$; $C_5 = 0$; $C_6 = 0$.

В результате находим уравнения проекции скорости тела:

$$\dot{x} = V_B \cos \alpha, \quad \dot{y} = gt + V_B \sin \alpha$$

и уравнения его движения

$$x = V_B \cos \alpha \cdot t, \quad y = g \frac{t^2}{2} + V_B \sin \alpha \cdot t.$$

В момент времени $t=T$, тело падает в точку C , для которой характерно, что $x=d+h \cdot \operatorname{ctg} \beta = d+3 \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = d+1,73$, а $y=h=3$ м. Подставляя эти данные в уравнения движения, получим:

$$d+1,73 = V_B \cos \alpha \cdot T;$$

$$h=3 = g \frac{T^2}{2} + V_B \sin \alpha \cdot T.$$

Зная $h=3$ м и $V_B=5,01$ м/с, из последнего выражения находим T , решив квадратное уравнение:

$$3 = 4,9T^2 + 5,01 \cdot \sin 30^\circ \cdot T \quad \text{или} \quad 4,9T^2 + 5,01 \cdot \sin 30^\circ \cdot T - 3 = 0,$$

$$T_1 = -1,078 \text{ с}; T_2 = 0,56 \text{ с}.$$

Время отрицательным быть не может, значит, $T=0,56$ с. Отсюда $d = 5,01 \cdot \cos 30^\circ \cdot 0,56 - 1,73 = 2,43 - 1,73 = 0,7$ м.

Для того чтобы определить уравнение траектории нужно исключить время из одного из уравнений движения (сделаем это из первого уравнения), и подставим во второе. Если $t = \frac{x}{V_B \cdot \cos \alpha}$, тогда

$$y = \frac{g}{2} \left(\frac{x}{V_B \cos \alpha} \right)^2 + V_B \sin \alpha \frac{x}{V_B \cos \alpha} = \frac{g}{2} \left(\frac{x}{V_B \cos \alpha} \right)^2 + x V_B \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{Ответ: } d = 0,7 \text{ м, } l = 7 \text{ м, } y = \frac{g}{2} \left(\frac{x}{V_B \cos \alpha} \right)^2 + x V_B \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$