

По ссылке пройти по ссылке в 12.00

Лекция. Уравнение Бернулли

План

1. Режимы движения жидкости
2. Уравнение Бернулли для идеальной жидкости.
3. Уравнение Бернулли для реальной жидкости.
4. Измерение скорости потока и расхода жидкости (самостоятельно)
5. Примеры решения задач (самостоятельно)

Практические занятия. Решить предложенные задачи. Составить по ним презентацию.

Режимы движения жидкости

При наблюдении за движением жидкости в трубах и каналах, можно заметить, что в одном случае жидкость сохраняет определенный строй своих частиц, а в других - перемещаются бессистемно. Однако исчерпывающие опыты по этому вопросу были проведены Рейнольдсом в 1883 г. На рис. 4.1 изображена установка, аналогичная той, на которой Рейнольдс производил свои опыты.

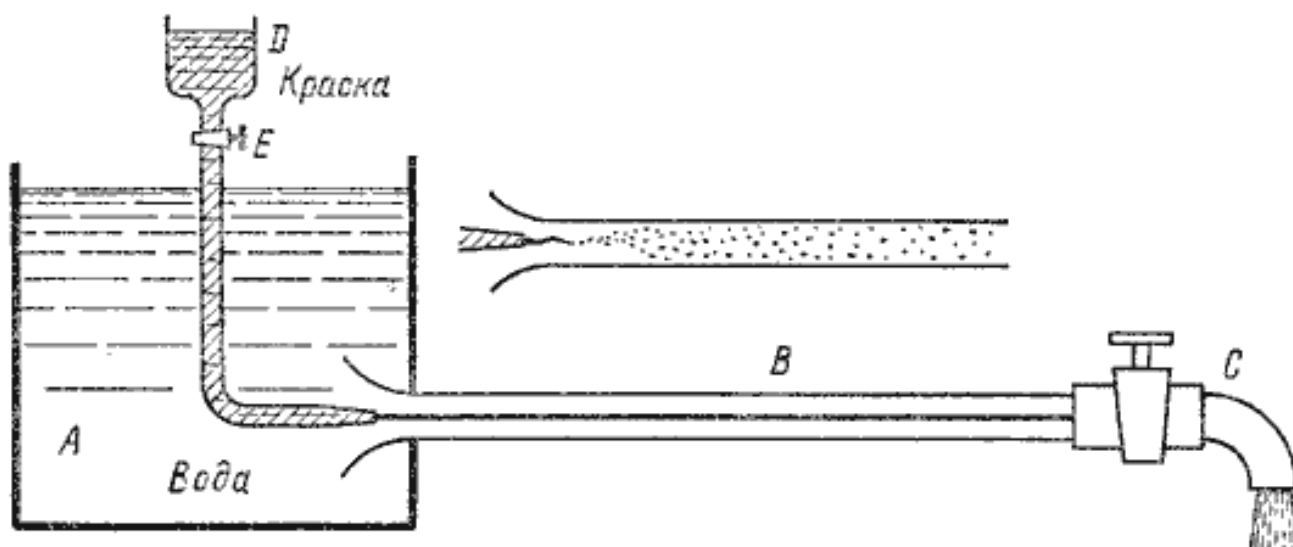


Рис. 4.1. Схема установки Рейнольдса

Установка состоит из резервуара *A* с водой, от которого отходит стеклянная труба *B* с краном *C* на конце, и сосуда *D* с водным

раствором краски, которая может по трубке вводиться тонкой струйкой внутрь стеклянной трубы В.

Первый случай движения жидкости. Если немного приоткрыть кран С и дать возможность воде протекать в трубе с небольшой скоростью, а затем с помощью крана Е впустить краску в поток воды, то увидим, что введенная в трубу краска не будет перемешиваться с потоком воды. Струйка краски будет отчетливо видимой вдоль всей стеклянной трубы, что указывает на слоистый характер течения жидкости и на отсутствие перемешивания. Если при этом, если к трубе подсоединить пьезометр или трубку Пито, то они покажут неизменность давления и скорости по времени. Такой режим движения называется *ламинарный*.

Второй случай движения жидкости. При постепенном увеличении скорости течения воды в трубе путем открытия крана С картина течения вначале не меняется, но затем при определенной скорости течения наступает быстрое ее изменение. Струйка краски по выходе из трубки начинает колебаться, затем размывается и перемешивается с потоком воды, причем становятся заметными вихреобразования и вращательное движение жидкости. Пьезометр и трубка Пито при этом покажут непрерывные пульсации давления и скорости в потоке воды. Такое течение называется *турбулентным* (рис.4.1, вверху).

Если уменьшить скорость потока, то восстановится ламинарное течение.

Итак, *ламинарным* называется слоистое течение без перемешивания частиц жидкости и без пульсации скорости и давления. При ламинарном течении жидкости в прямой трубе постоянного сечения все линии тока направлены параллельно оси трубы, при этом отсутствуют поперечные перемещения частиц жидкости.

Турбулентным называется течение, сопровождающееся интенсивным перемешиванием жидкости с пульсациями скоростей и давлений. Наряду с основным продольным перемещением жидкости наблюдаются поперечные перемещения и вращательные движения отдельных объемов жидкости. Переход от ламинарного режима к турбулентному наблюдается

при определенной скорости движения жидкости. Эта скорость называется *критической* $v_{кр}$.

Значение этой скорости прямо пропорционально кинематической вязкости жидкости и обратно пропорционально диаметру трубы.

$$v_{кр} = \frac{\nu}{d} \cdot k$$

где ν - кинематическая вязкость;

k - безразмерный коэффициент;

d - внутренний диаметр трубы.

Входящий в эту формулу безразмерный коэффициент k , одинаков для всех жидкостей и газов, а также для любых диаметров труб. Этот коэффициент называется *критическим числом Рейнольдса* $Re_{кр}$ и определяется следующим образом:

$$Re_{кр} = \frac{v_{кр} d}{\nu}$$

Как показывает опыт, для труб круглого сечения $Re_{кр}$ примерно равно 2300.

Таким образом, критерий подобия Рейнольдса позволяет судить о режиме течения жидкости в трубе. При $Re < Re_{кр}$ течение является ламинарным, а при $Re > Re_{кр}$ течение является турбулентным. Точнее говоря, вполне развитое турбулентное течение в трубах устанавливается лишь при Re примерно равно 4000, а при $Re = 2300...4000$ имеет место переходная, критическая область.

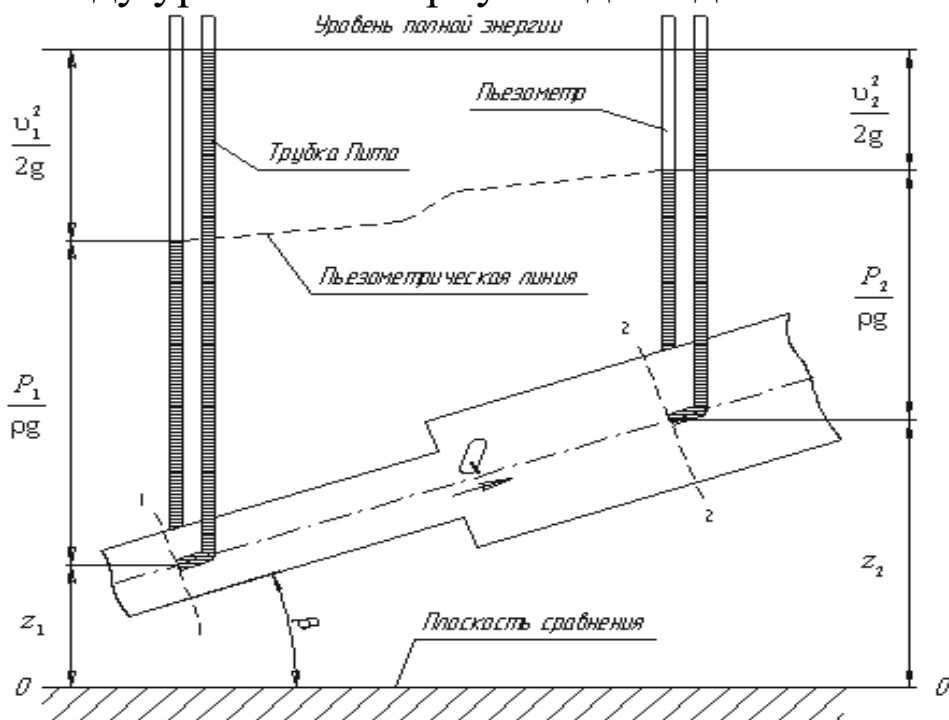
Режим движения жидкости напрямую влияет на степень гидравлического сопротивления трубопроводов.

Уравнение Бернулли для идеальной жидкости

Уравнение Даниила Бернулли, полученное в 1738 г., является фундаментальным уравнением гидродинамики. Оно дает связь между давлением P , средней скоростью v и пьезометрической высотой z в различных сечениях потока и выражает закон сохранения энергии движущейся жидкости. С помощью этого уравнения решается большой круг задач.

Рассмотрим трубопровод переменного диаметра, расположенный в пространстве под углом β (рис.3.5).

Схема к выводу уравнения Бернулли для идеальной жидкости



Выберем произвольно на рассматриваемом участке трубопровода два сечения: сечение 1-1 и сечение 2-2. Вверх по трубопроводу от первого сечения ко второму движется жидкость, расход которой равен Q .

Для измерения давления жидкости применяют *пьезометры* - тонкостенные стеклянные трубки, в которых жидкость поднимается на высоту $\frac{P}{\rho g}$. В каждом сечении установлены пьезометры, в которых уровень жидкости поднимается на разные высоты.

Кроме пьезометров в каждом сечении 1-1 и 2-2 установлена трубка, загнутый конец которой направлен навстречу потоку жидкости, которая называется *трубка Пито*. Жидкость в трубках Пито также поднимается на разные уровни, если отсчитывать их от *пьезометрической линии*.

Пьезометрическую линию можно построить следующим образом. Если между сечением 1-1 и 2-2 поставить несколько таких же пьезометров и через показания уровней жидкости в них провести кривую, то мы получим ломаную линию (рис.3.5).

Однако высота уровней в трубках Пито относительно произвольной горизонтальной прямой 0-0, называемой *плоскостью сравнения*, будет одинакова.

Если через показания уровней жидкости в трубках Пито провести линию, то она будет горизонтальна, и будет отражать *уровень полной энергии трубопровода*.

Для двух произвольных сечений 1-1 и 2-2 потока идеальной жидкости уравнение Бернулли имеет следующий вид:

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} = H = \text{const}$$

Так как сечения 1-1 и 2-2 взяты произвольно, то полученное уравнение можно переписать иначе:

$$z + \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = H = \text{const}$$

и прочитать так: сумма трех членов уравнения Бернулли для любого сечения потока идеальной жидкости есть величина постоянная.

С энергетической точки зрения каждый член уравнения представляет собой определенные виды энергии:

z_1 и z_2 - удельные энергии положения, характеризующие потенциальную энергию в сечениях 1-1 и 2-2;

$\frac{P_1}{\rho g}$ и $\frac{P_2}{\rho g}$ -

удельные энергии давления, характеризующие потенциальную энергию давления в тех же сечениях;

$\frac{v_1^2}{2g}$ и $\frac{v_2^2}{2g}$ -

удельные кинетические энергии в тех же сечениях.

Следовательно, согласно уравнению Бернулли, *полная удельная энергия идеальной жидкости в любом сечении постоянна*.

Уравнение Бернулли можно истолковать и чисто геометрически. Дело в том, что каждый член уравнения имеет линейную размерность. Глядя на рис.3.5, можно заметить, что z_1 и z_2 - геометрические высоты сечений 1-1 и 2-2 над плоскостью

сравнения; $\frac{P_1}{\rho g}$ и $\frac{P_2}{\rho g}$ - пьезометрические высоты; $\frac{v_1^2}{2g}$ и $\frac{v_2^2}{2g}$ - скоростные высоты в указанных сечениях.

В этом случае уравнение Бернулли можно прочесть так: *сумма геометрической, пьезометрической и скоростной высоты для идеальной жидкости есть величина постоянная.*

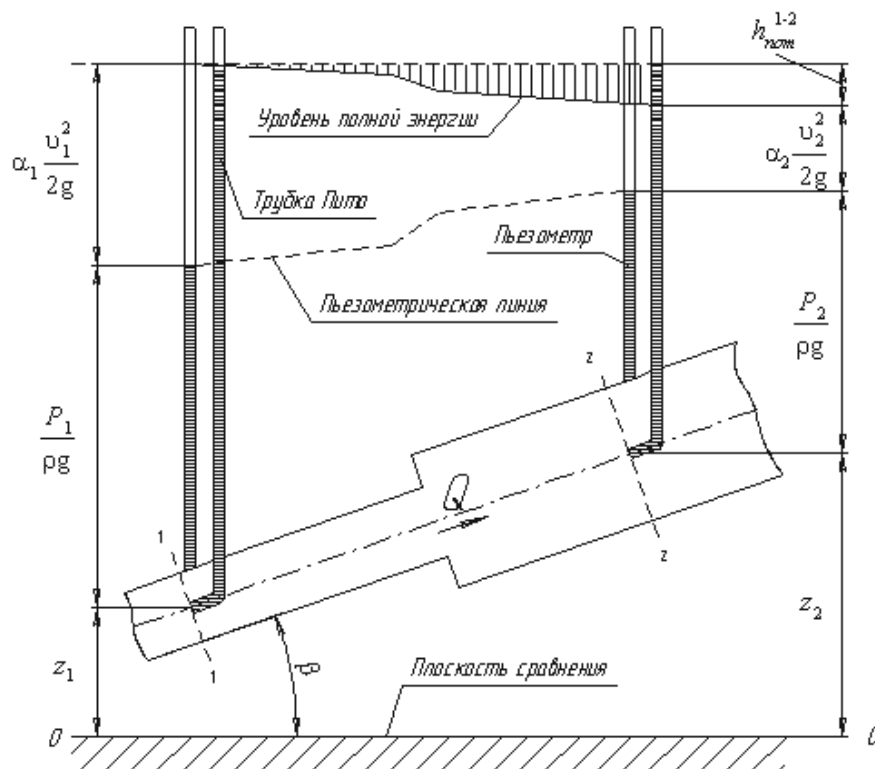
Уравнение Бернулли для реальной жидкости

Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости несколько отличается от уравнения

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} = H = \text{const}$$

Дело в том, что при движении реальной вязкой жидкости возникают силы трения, на преодоление которых жидкость затрачивает энергию. В результате полная удельная энергия жидкости в сечении 1-1 будет больше полной удельной энергии в сечении 2-2 на величину потерь энергии (рис.3.6).

Рис.3.6. Схема к выводу уравнения Бернулли для реальной жидкости



Потерянная энергия или потерянный напор обозначаются $h_{пот}^{1-2}$ и имеют также линейную размерность.

Уравнение Бернулли для реальной жидкости будет иметь вид:

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + h_{пот}^{1-2} = H = \text{const}$$

Из рис.3.6 видно, что по мере движения жидкости от сечения 1-1 до сечения 2-2 потерянный напор все время увеличивается (потерянный напор выделен вертикальной штриховкой). Таким образом, уровень первоначальной энергии, которой обладает жидкость в первом сечении, для второго сечения будет складываться из четырех составляющих: геометрической высоты, пьезометрической высоты, скоростной высоты и потерянного напора между сечениями 1-1 и 2-2.

Кроме этого в уравнении появились еще два коэффициента α_1 и α_2 , которые называются *коэффициентами Кориолиса* и зависят от режима течения жидкости (**$\alpha = 2$ для ламинарного режима, $\alpha = 1$ для турбулентного режима**).

Потерянная высота $h_{пот}^{1-2}$ складывается из линейных потерь, вызванных силой трения между слоями жидкости, и потерь, вызванных местными сопротивлениями (изменениями конфигурации потока)

$$h_{пот}^{1-2} = h_{лин} + h_{мест}$$

С помощью уравнения Бернулли решается большинство задач практической гидравлики. Для этого выбирают два сечения по длине потока, таким образом, чтобы для одного из них были известны величины P , ρ , g , а для другого сечения одна или величины подлежали определению. При двух неизвестных для второго сечения используют уравнение постоянства расхода жидкости $v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2$.

Измерение скорости потока и расхода жидкости

Для измерения скорости в точках потока широко используется работающая на принципе уравнения Бернулли трубка Пито (рис.3.7), загнутый конец которой направлен навстречу потоку.

Пусть требуется измерить скорость жидкости в какой-то точке потока. Поместив конец трубки в указанную точку и составив уравнение Бернулли для сечения 1-1 и сечения, проходящего на уровне жидкости в трубке Пито получим

$$\frac{P_{\text{ст}} + \gamma h}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = H + h + \frac{P_{\text{ст}}}{\gamma} \quad \text{или} \quad v = \sqrt{2gH}$$

где H - столб жидкости в трубке Пито.

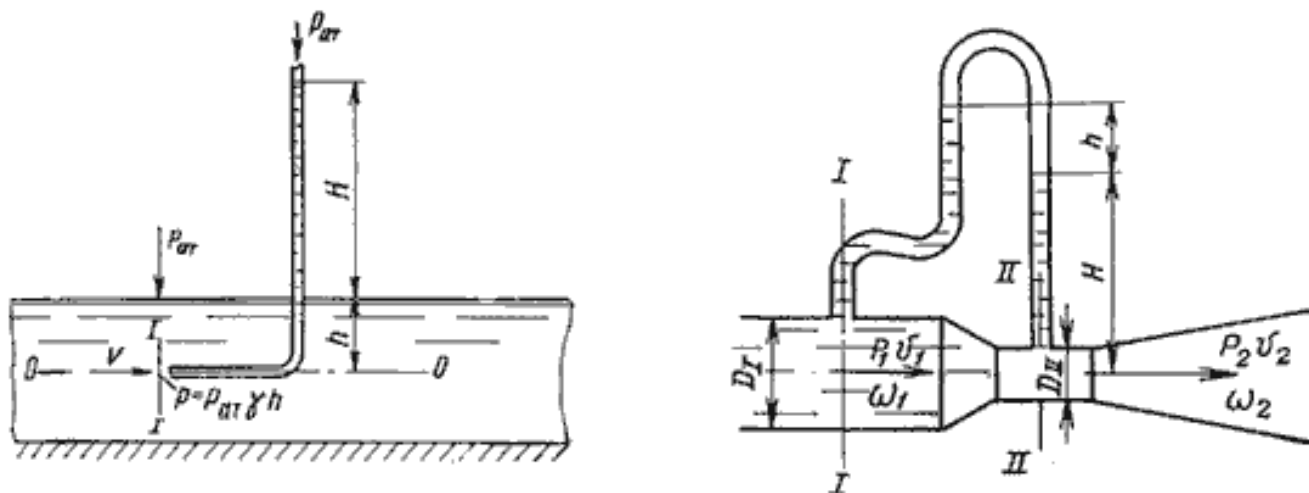


Рис. 3.7. Трубка Пито и расходомер Вентури

Для измерения расхода жидкости в трубопроводах часто используют расходомер Вентури, действие которого основано так же на принципе уравнения Бернулли. Расходомер Вентури состоит из двух конических насадков с цилиндрической вставкой между ними (рис.3.7). Если в сечениях I-I и II-II поставить пьезометры, то разность уровней в них будет зависеть от расхода жидкости, протекающей по трубе.

Пренебрегая потерями напора и считая $z_1 = z_2$, напомним уравнение Бернулли для сечений I-I и II-II:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$

или

$$h = \frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{v_1^2}{2g} \left[-1 + \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \right]$$

Используя уравнение неразрывности

$$Q = v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2$$

сделаем замену в полученном выражении:

$$h = \frac{Q^2}{2g\omega_1^2} \left[-1 + \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 \right]$$

Решая относительно Q , получим

$$Q = \omega_1 \omega_2 \sqrt{\frac{2g}{\omega_1^2 - \omega_2^2}} \cdot \sqrt{h}$$

Выражение, стоящее перед $\sqrt{h}$, является постоянной величиной, носящей название постоянной водомера Вентури.

Из полученного уравнения видно, что h зависит от расхода Q . Часто эту зависимость строят в виде тарировочной кривой h от Q , которая имеет параболический характер.

Задача 1

Определить при помощи водомера Вентури расход, проходящий по трубопроводу, если диаметр трубопровода $d_1=100$ мм, диаметр горловины $d_2=56$ мм, разность показаний пьезометров $h=45$ см. Потерями напора при расчете пренебречь.

Примечание. Водомер Вентури широко применяется в практике. Он состоит из двух конических участков, соединенных короткой цилиндрической вставкой (рис. 4-9). Широкие концы конических участков имеют те же диаметры, что и трубопровод, на котором устанавливается водомер. В сечениях 1-1 и 2-2 присоединены пьезометры.

Решение. Горизонтальную плоскость сравнения OO выберем произвольно, составим уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 2-2 без учета потерь напора

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}.$$

Примем $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, перепишем уравнение Бернулли в таком виде

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}.$$

Так как $(z_1 + p_1/\gamma) - (z_2 + p_2/\gamma) = h$ (разности показаний пьезометров), то

$$h = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}.$$

Для определения скорости выразим одну скорость через другую, используя уравнение неразрывности $v_1\omega_1 = v_2\omega_2$.

Тогда

$$v_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1} v_2.$$

Подставим v_1 в уравнение для h и получим:

$$h = \frac{v_2^2}{2g} - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \frac{v_2^2}{2g}.$$

Отсюда

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2}}.$$

Расход без учета потерь напора (теоретический расход) равен:

$$Q_T = v_2\omega_2 = \omega_2 \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2}}.$$

Так как ω_2 и ω_1 для данного водомера не зависят от расхода, то можно выделить постоянную водомера A :

$$A = \omega_2 \sqrt{\frac{2g}{1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2}},$$

тогда

$$Q_T = A \sqrt{h}.$$

В действительности при движении жидкости через водомер имеются, хотя и относительно небольшие, потери напора, вследствие чего фактический расход будет меньше по сравнению с теоретическим. Эта разница учитывается умножением Q_T на коэффициент расхода водомера

водомера

$$\mu = 0,95 \div 0,98.$$

Окончательно фактический расход

$$Q = \mu Q_T = \mu A \sqrt{h}.$$

Найдем постоянную водомера A , учитывая, что $(\omega_2/\omega_1)^2 = (d_2/d_1)^4$:

$$A = 0,785 \cdot 5,6^2 \sqrt{\frac{2 \cdot 981}{1 - \left(\frac{5,6}{10}\right)^4}} = 1\,150 \text{ см}^2/\text{сек}.$$

Принимая $\mu = 0,95$, определяем расход

$$Q = 0,95 \cdot 1\,150 \sqrt{45} = 7\,320 \text{ см}^3/\text{сек} = 7,32 \text{ л/сек}.$$

Задача 2

№ 3. На трубе диаметром $D = 200$ мм имеется местное сужение диаметром $d = 100$ мм.

Пренебрегая сопротивлениями, определить разность высот уровней в пьезометрических трубках 1 и 2, если известно, что по трубе течет вода со скоростью в широком сечении, равной $0,8$ м/с.

Решение

Относительно плоскости сравнения, которую нужно провести по оси потока, для сечений 1–1 и 2–2 составляется уравнение Бернулли без учета потерь энергии.

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

Из уравнения неразрывности потока определяется скорость во втором сечении $V_1 \omega_1 = V_2 \omega_2$ (м/с); $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d_2^2}{d_1^2}$;

$$V_2 = \frac{V_1 \cdot D^2}{d^2} = \frac{0,8 \cdot 0,2^2}{0,1^2} = 3,2 \text{ (м/с)}.$$

$$0 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{0,8^2}{2 \cdot 10} = 0 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{3,2^2}{2 \cdot 10};$$

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = \Delta h = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} = \frac{3,2^2}{20} - \frac{0,8^2}{20} = 0,48 \text{ (м)}.$$

№ 2. Определить режим движения в лотке прямоугольного сечения шириной $b = 120$ см при уровне воды в нем $h = 5$ см, если $v = 8$ см/с, $\nu = 0,015$ см²/с.

Решение

$$Re = V \cdot R / \nu; R = \omega / \chi = b \cdot h / 2h + b = 120 \cdot 5 / 2 \cdot 5 + 120 = 4,62 \text{ (см)}$$

$$Re = 8 \cdot 4,62 / 0,015 = 2464 > Re_{кр} = 580 - \text{режим турбулентный.}$$

Задачи

II.7. Определить давление p_1 в сечении 1—1 горизонтально расположенного сопла гидромонитора (рис. II.3), необходимое для придания скорости воде в выходном сечении 2—2 — $V_2 = 40$ м/с, если скорость движения воды в сечении 1—1 — $V_1 = 3$ м/с.

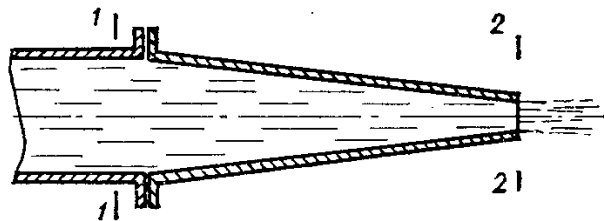


Рис. II.3

Решение. За расчетные сечения выбираем сечения 1—1 и 2—2, в которых скорости заданы, давление p_1 подлежит определению, а давление p_2 в сечении на выходе из гидромонитора равно атмосферному. Плоскость сравнения следует провести через ось сопла, тогда удельные энергии положения $z_1 = z_2 = 0$ и уравнение Д. Бернулли будет иметь следующий вид:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g},$$

откуда

$$p_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} (V_2^2 - V_1^2) = 100\,000 + \frac{1000}{2} (40^2 - 3^2) = 895\,500 \text{ Па} = 0,895 \text{ МПа} = 9,12 \text{ кгс/см}^2.$$

II.8. Определить диаметр d суженной части горизонтального трубопровода (рис. II.4), при котором вода поднимается на высоту $h = 3,5$ м (расход $Q = 6$ л/с, диаметр $D = 10$ см).

Решение. Сечение 1—1 принимаем в суженной части трубы, где нужно определить диаметр d , сечение 2—2 — на выходе из расширенной части трубы, где давление равно атмосферному ($p_2 = p_a$). Плоскость сравнения совместим с осью трубы, тогда $z_1 = z_2 = 0$. С учетом этого уравнение Д. Бернулли получим в виде

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_a}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}.$$

Для того чтобы вода поднялась из резервуара на высоту h , удельная энергия давления на поверхности воды в резервуаре $\frac{p_a}{\rho g}$ должна быть на величину h выше, чем

удельная энергия давления в сечении 1—1, т. е.

$$\frac{p_a}{\rho g} = \frac{p_1}{\rho g} + h.$$

Решая совместно эти уравнения, получим

$$\frac{V_1^2}{2g} = h + \frac{V_2^2}{2g}.$$

Используя уравнение неразрывности (II.6) и уравнение (II.3), получим $V_1 = \frac{Q}{\omega_1} = \frac{4Q}{\pi d^2}$, $V_2 = \frac{4Q}{\pi D^2}$. Подставляя эти величины в последнее уравнение и решая его относительно диаметра суженной части, получим

$$d = \frac{2\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{2g\pi^2h + \frac{16Q^2}{D^4}}} = \frac{2\sqrt{0,006}}{\sqrt[4]{2 \cdot 9,81 \cdot 3,14^2 \cdot 3,5 + \frac{16 \cdot 0,006^2}{0,1^4}}} = 0,03 \text{ м} = 3 \text{ см}.$$

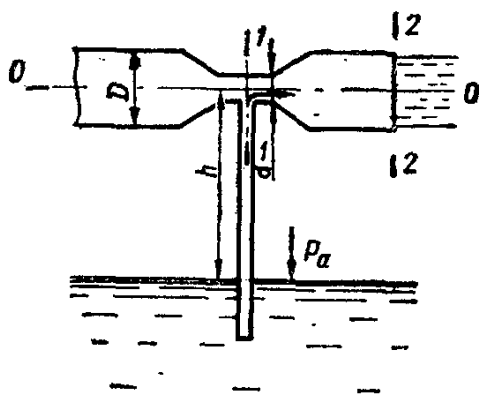


Рис. II.4

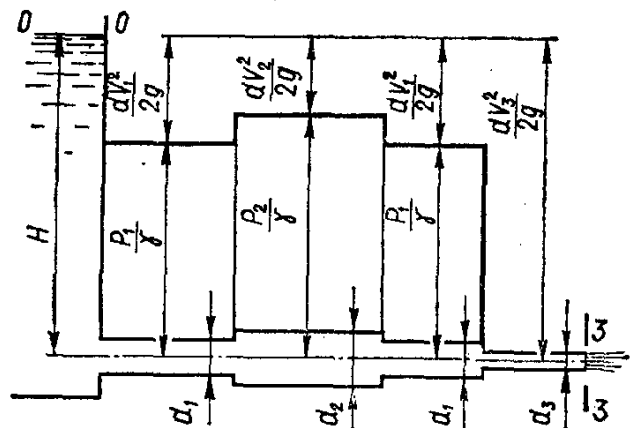


Рис. II.5

II.9. Определить расход воды в горизонтальном трубопроводе переменного сечения (рис. II.5), скорость на каждом из его участков и построить пьезометрическую линию, если $H = 5$ м, $d_1 = 15$ мм, $d_2 = 20$ мм и $d_3 = 10$ мм.

Решение. Уравнение Д. Бернулли для сечений 0—0 и 3—3 при совмещении плоскости сравнения с осью трубы будет иметь вид

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{V_0^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{V_3^2}{2g}.$$

В данном случае $z_0 = H$, $z_3 = 0$. В связи с тем что в сечениях 0—0 и 3—3 давление равно атмосферному, то $\frac{p_0}{\rho g} = \frac{p_3}{\rho g} = \frac{p_a}{\rho g}$. Учитывая, что $H = \text{const}$, а скорость в сечении 0—0 $V_0 = 0$, скорость в выходном сечении 3—3 определится из зависимости

$$\frac{V_3^2}{2g} = H,$$

откуда $V_3 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 5} = 9,9$ м/с.

Расход воды в трубопроводе

$$Q = V_3 \omega_3 = V_3 \frac{\pi d_3^2}{4} = 9,9 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,01^2}{4} = 0,00078 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Скорость в сечении 1—1

$$V_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \frac{4 \cdot 0,00078}{3,14 \cdot 0,015^2} = 4,4 \text{ м/с.}$$

Скорость в сечении 2—2

$$V_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2} = \frac{4 \cdot 0,00078}{3,14 \cdot 0,02^2} = 2,48 \text{ м/с.}$$

Пьезометрическую линию строят, исходя из следующих положений. Поскольку задача решается без учета потерь энергии, то напорная линия (линия полной энергии) будет представлять собой горизонтальную прямую, являющуюся продолжением свободной поверхности воды в сечении 0—0. Пьезометрическая линия расположится ниже напорной линии на величину $\frac{V^2}{2g}$ в каждом сечении. Таким образом, отложив вниз

от напорной линии величины $\frac{V^2}{2g}$ в сечениях, соответствующих изменению диаметра трубопровода, получим ряд точек, соединив которые построим пьезометрическую линию (рис. II.5). При этом

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{4,4^2}{2 \cdot 9,81} = 0,987 \text{ м; } \frac{V_2^2}{2g} = \frac{2,48^2}{2 \cdot 9,81} = 0,312 \text{ м;}$$

$$\frac{V_3^2}{2g} = \frac{9,9^2}{2 \cdot 9,81} = 5 \text{ м.}$$

Пример 2.1. На оси водопроводной трубы установлена трубка Пито с дифференциальным ртутным манометром. Определить максимальную скорость движения воды в трубе $u_{\text{макс}}$, если разность уровней ртути в манометре $\Delta h = 18$ мм (рис. 2.2).

Решение. Трубка Пито измеряет скоростной напор

$$H = \frac{u_{\text{макс}}^2}{2g}$$

(тарировочный коэффициент трубки равен единице).

Для определения H запишем уравнение равновесия в ртутном манометре относительно плоскости $a-a$:

$$p_1 + \Delta h \rho_{\text{рт}} g = p_2 + \Delta h \rho g,$$

где p_1 и p_2 — давления в трубках ртутного манометра на уровне верхней отметки ртути;

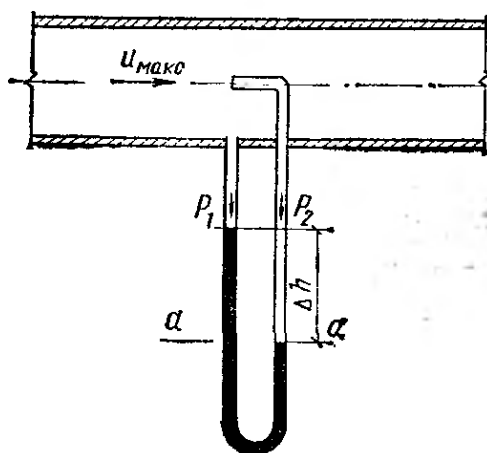


Рис. 2.2

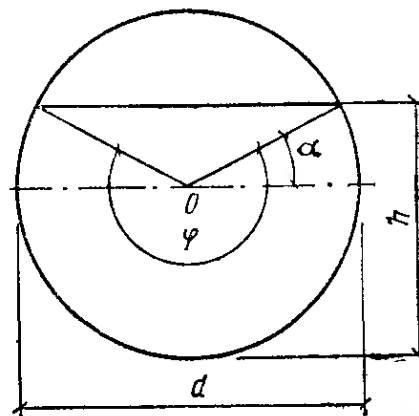


Рис. 2.3

ρ и $\rho_{\text{рт}}$ — плотности воды (1000 кг/м^3) и ртути ($13\,600 \text{ кг/м}^3$).
Отсюда

$$H = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} = \Delta h \left(\frac{\rho_{\text{рт}}}{\rho} - 1 \right).$$

Подставляя исходные данные, получим:

$$H = 0,018 (13\,600/1000 - 1) = 0,227 \text{ м.}$$

Максимальная скорость в трубе

$$u_{\text{макс}} = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,227} = 2,1 \text{ м/с.}$$

Пример 2.2. Определить пределы изменения гидравлического радиуса R для канализационных самотечных трубопроводов, если диаметр их d изменяется от 150 до 3500 мм. Расчетное (наибольшее) наполнение: $a = h/d = 0,6$ для труб $d = 150$ мм; $a = h/d = 0,8$ для труб $d = 3500$ мм (рис. 2.3).

Решение. Гидравлический радиус определяем по формуле (2.5):

$$R = \omega / \chi,$$

где

$$\omega = \frac{\pi d^2}{4} \frac{\varphi}{2\pi} + \frac{1}{2} \left(h - \frac{d}{2} \right)^2 \sqrt{\left(\frac{d}{2} \right)^2 - \left(h - \frac{d}{2} \right)^2} =$$

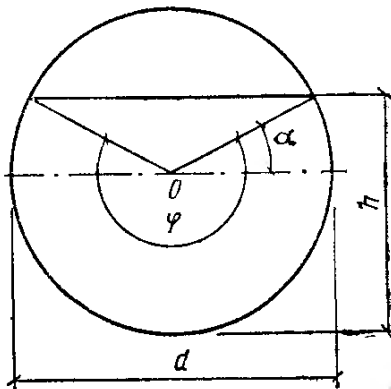


Рис. 2.3

$$= \frac{\pi d^3}{4} \frac{\varphi}{2\pi} + d^3 (a - 0,5) \sqrt{a(1-a)};$$

$$\chi = \frac{\pi d \varphi}{2\pi}.$$

Угол α находим из соотношения

$$\sin \alpha = \frac{h - d/2}{d/2} = \frac{ad - 0,5d}{0,5d} = \frac{a}{0,5} - 1;$$

$$\varphi = \pi + 2\alpha.$$

Для трубы $d = 150$ мм

$$\sin \alpha = 0,6/0,5 - 1 = 0,2; \alpha = 0,2 \text{ рад}; \varphi = 3,14 + 2 \cdot 0,2 = 3,54 \text{ рад};$$

$$\omega = \frac{3,14 \cdot 0,15^2 \cdot 3,54}{4 \cdot 6,28} + 0,15^2 (0,6 - 0,5) \sqrt{0,6(1-0,6)} = 0,0111 \text{ м}^2;$$

$$\chi = 3,14 \cdot 0,15 \cdot 3,54 / 6,28 = 0,266 \text{ м};$$

$$R = 0,0111 / 0,266 = 0,0417 \text{ м}.$$

Для трубы $d = 3500$ мм

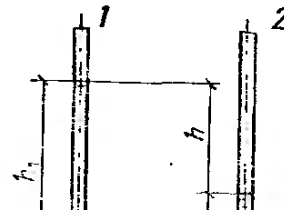
$$\sin \alpha = 0,8/0,5 - 1 = 0,6; \alpha = 0,63 \text{ рад}; \varphi = 3,14 + 2 \cdot 0,63 = 4,4 \text{ рад};$$

$$\omega = \frac{3,14 \cdot 3,5^2 \cdot 4,4}{4 \cdot 6,28} + 3,5^2 (0,8 - 0,5) \sqrt{0,8(1-0,8)} = 8,22 \text{ м}^2;$$

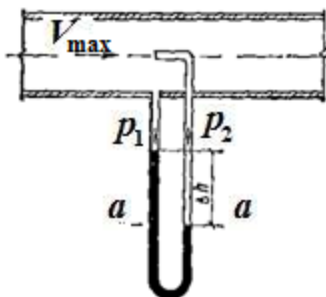
$$\chi = 3,14 \cdot 3,5 \cdot 4,4 / 6,28 = 7,7 \text{ м};$$

$$R = 8,22 / 7,7 = 1,07 \text{ м}.$$

Таким образом, гидравлический радиус изменяется от 0,04 до 1,07 м.



Пример 5.1. На оси водопроводной трубы установлена трубка Пито с дифференциальным ртутным манометром. Определить максимальную скорость движения воды в трубе $V_{\max}$, если разность уровней ртути в манометре $\Delta h = 18$ мм.



Решение:

Трубка Пито измеряет скоростной напор

$$H = \frac{V_{\max}^2}{2g}$$

Откуда $V_{\max} = \sqrt{2gH}$

Для определения H запишем уравнение равновесия в ртутном манометре относительно плоскости $a-a$

$$p_1 + \Delta h \rho_{\text{рт}} g = p_2 + \Delta h \rho g$$

где p_1, p_2 — давления в трубках ртутного манометра на уровне верхней отметки ртути; $\rho_{\text{рт}}, \rho$ — плотность ртути (13600 кг/м^3) и воды (1000 кг/м^3).

Отсюда получаем

$$H = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \Delta h \left(\frac{\rho_{\text{рт}}}{\rho} - 1 \right)$$

Подставляя исходные данные, получим

$$H = 0,018 \left(\frac{13600}{1000} - 1 \right) = 0,227 \text{ м.}$$

Таким образом, максимальная скорость в трубе

$$V_{max} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,227} = 2,1 \text{ м.}$$

№ 1. По трубе диаметром 70 мм протекает за сутки 120 000 кг нефти плотностью 820 кг/м³, вязкость нефти $\nu = 0,5 \text{ см}^2/\text{с}$.

Определить режим движения нефти.

Решение

$$Re = V \cdot d / \nu; \quad V = Q / \omega; \quad Q = W / t; \quad W = m / \rho; \quad Q = m / \rho \cdot t;$$

$$Q = 120\,000 / 820 \cdot 86\,400 = 0,0017 \text{ м}^3/\text{с};$$

$$\omega = \pi \cdot d^2 / 4 = 3,14 \cdot 0,07^2 / 4 = 0,0038 \text{ (м}^2\text{)};$$

$$V = 0,0017 / 0,0038 = 0,45 \text{ (м/с)};$$

$$Re = 45 \cdot 7 / 0,5 = 630 < Re_{кр} = 2320 \text{ – режим ламинарный.}$$

Определить режим движения воды в водопроводной трубе диаметром $d = 300 \text{ мм}$, если протекающий по ней расход $Q = 0,136 \text{ м}^3/\text{с}$. Температура воды 10°C .

Решение:

Число Рейнольдса находим по формуле:

$$Re = \frac{vd}{\nu}$$

Средняя скорость движения воды в трубе

$$v = \frac{Q}{\omega},$$

$$\text{где живое сечение потока } \omega = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,3^2}{4} = 0,071 \text{ м}^2$$

$$\text{Тогда } v = \frac{0,136}{0,071} = 1,92 \text{ м/с.}$$

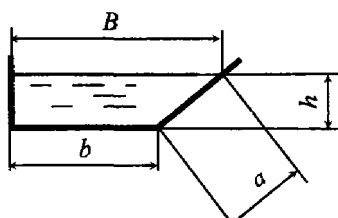
Кинематический коэффициент вязкости воды при температуре 10°C находим по таблице 4.5 (Приложение 4): $\nu = 0,0131 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$.

$$\text{Следовательно, } Re = \frac{1,92 \cdot 0,3}{0,0131 \cdot 10^{-4}} = 441000$$

Так как $Re = 441000 > 2320$ значит режим движения турбулентный.

Задачи

Задача 4.1. Жидкость движется в лотке со скоростью $V = 0,1$ м/с. Глубина наполнения лотка $h = 30$ см, ширина по верху $B = 50$ см, ширина по низу $b = 20$ см. Определить смоченный периметр, площадь живого сечения, гидравлический радиус, расход, режим движения жидкости, если динамический коэффициент вязкости жидкости $\mu = 0,0015$ Па·с, а ее плотность $\rho = 1200$ кг/м³.



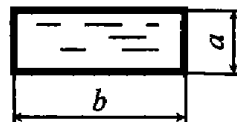
Задача 4.2. Найти минимальный диаметр d напорного трубопровода, при котором нефть будет двигаться при турбулентном режиме, если кинематический коэффициент вязкости нефти $\nu = 0,3$ см²/с, а расход в трубопроводе $Q = 8$ л/с.

Задача 4.3. По трубе диаметром $d = 0,1$ м под напором движется вода. Определить расход, при котором турбулентный режим сменится ламинарным, если температура воды $t = 25^\circ\text{C}$.

Задача 4.4. Определить критическую скорость, при которой происходит переход от ламинарного режима к турбулентному, в трубопроводе диаметром $d = 30$ мм при движении воды ($\nu = 0,009$ Ст), воздуха ($\nu = 0,162$ Ст) и глицерина ($\nu = 4,1$ Ст).

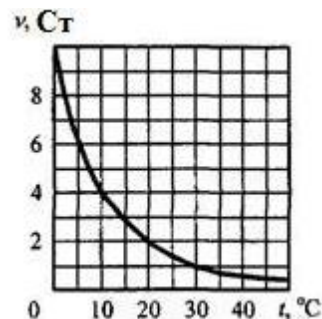
Задача 4.5. Определить, изменится ли режим движения воды в напорном трубопроводе $d = 0,5$ м при возрастании температуры от 15 до 65°C , если расход в трубопроводе $Q = 15$ л/с.

Задача 4.6. Вода движется под напором в трубопроводе прямоугольного сечения. Определить при каком максимальном расходе сохранится ламинарный режим. Температура воды $t = 30^\circ\text{C}$, $a = 0,2$ м, $b = 0,3$ м.



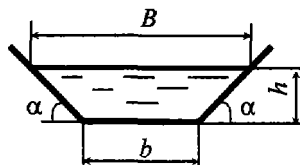
Задача 4.7. По трубе диаметром $d = 0,1$ м под напором движется вода. Определить расход, при котором турбулентный режим сменится ламинарным, если температура воды $t = 25^\circ\text{C}$.

Задача 4.8. Жидкость движется в безнапорном трубопроводе с расходом $Q = 22$ м³/ч. Трубопровод заполнен наполовину сечения. Диаметр трубопровода $d = 80$ мм. Определить, при какой температуре будет происходить смена режимов движения жидкости. График зависимости



кинематического коэффициента вязкости представлен на рисунке.

Задача 4.9. Жидкость, имеющая динамический коэффициент вязкости $\mu = 1,005$ Па·с и плотность $\rho = 900$ кг/м³, движется в трапециевидальном лотке. Определить критическую скорость, при которой будет происходить смена режимов движения жидкости. Глубина наполнения $h = 0,2$ м, ширина лотка по дну $b = 25$ см, угол наклона боковых стенок лотка к горизонту $\alpha = 30^\circ$.

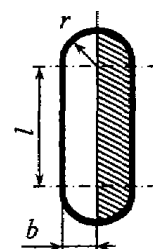


Задача 4.10. Применяемые в водоснабжении и канализации трубы имеют минимальный диаметр $d = 12$ мм и максимальный диаметр $d = 3500$ мм. Расчетные скорости движения воды в них $V = 0,5 \div 4$ м/с. Определить минимальное и максимальное значение чисел Рейнольдса и режим течения в этих трубопроводах.

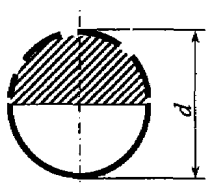
Задача 4.11. Для осветления сточных вод используют горизонтальный отстойник, представляющий собой удлиненный прямоугольный резервуар. Его глубина $h = 2,6$ м, ширина $b = 5,9$ м. Температура воды $t = 20^\circ\text{C}$. Определить среднюю скорость и режим движения сточной жидкости, если ее расход $Q = 0,08$ м³/с, а коэффициент кинематической вязкости $\nu = 1,2 \cdot 10^{-6}$ м²/с. При какой скорости в отстойнике будет наблюдаться ламинарный режим движения жидкости?

Задача 4.12. Конденсатор паровой турбины оборудован 8186 трубками диаметром $d = 2,5$ см. Через трубки пропускается охлаждающая вода при $t = 10^\circ\text{C}$. Будет ли при расходе воды $Q = 13600$ м³/с обеспечен турбулентный режим движения в трубках?

Задача 4.13. Определить режим движения горячей воды ($t = 80^\circ\text{C}$) в пробковом кране, проходное сечение которого при частичном открытии изображено на рисунке, если $l = 20$ мм, $b = r = 3$ мм, расход воды $Q = 0,1$ л/с.



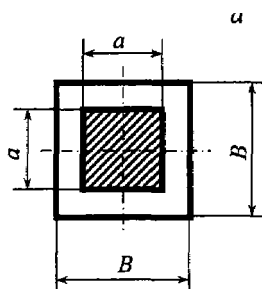
Задача 4.14. Определить режим движения воды при $t = 20^\circ\text{C}$ в смесителе, проходное сечение которого открыто наполовину, если $d = 10$ мм, расход воды $Q = 0,1$ л/с.



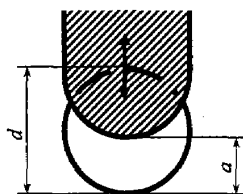
Задача 4.15. Смазка протекает через кольцевую щель. Определить гидравлический радиус при условии, что $D = 50$ мм, $d = 48$ мм.



Задача 4.16. Определить гидравлический радиус для формы потока, изображенной на рисунке.



Задача 4.17. Определить гидравлический радиус, если простая задвижка на трубе круглого сечения d частично закрыта, $\frac{a}{d} = 0,5$.



Определить характер режима при движении воды по трубопроводу диаметром $d = 10$ см, если расход $Q = 4$ л/сек и температура воды $t = 14^\circ$

Определить режим движения воды в трубе диаметром $d = 0,3$ м при средней скорости $v = 1,2$ м/сек и кинематической вязкости $\nu = 0,01$ Ст ($t = 20^\circ\text{C}$).

Определить режим движения воды в канале с гидравлическим радиусом $R = 1,2$ м при средней скорости $v = 0,8$ м/сек и температуре воды 15°C ($\nu = 0,0114$ Ст).