

Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий

Данная тема предполагает изучить следующие вопросы: Основы решения прямой задачи гравиразведки, Основы решения прямой задачи магниторазведки.

§ 2. Основы решения прямой задачи гравиразведки

Ускорение силы тяжести $\vec{g}$ является напряженностью гравитационного поля и, как следует из теории физических полей, подчиняется в произвольной точке $\mathbf{a}$ следующим дифференциальным уравнениям:

$$\text{rot } \vec{g}(\mathbf{a}) = 0, \quad \text{div } \vec{g}(\mathbf{a}) = -4\pi\sigma(\mathbf{a}), \quad (2.1)$$

причем на границах тел оно непрерывно. Здесь σ - плотность, а $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-2} \cdot \text{с}^{-2}$ - гравитационная постоянная (в системе СИ). Первое из этих уравнений, благодаря известному тождеству $\text{rot grad } W \equiv 0$ дает возможность ввести скалярный гравитационный потенциал W соотношением

$$\vec{g}(\mathbf{a}) = +\text{grad } W(\mathbf{a}). \quad (2.2)$$

Положительный знак перед градиентом связан с тем, что гравитирующие массы притягиваются друг к другу. Характер притяжения точечных масс описывается законом всемирного тяготения И.Ньютона. Масса m_1 , находящаяся в точке $\mathbf{a}$, притягивается к массе m , расположенной в точке $\mathbf{q}$ с силой

$$F = \frac{\gamma \cdot m \cdot m_1}{L_{qa}^2}, \quad (2.3)$$

где L_{qa} - расстояние между точками $\mathbf{q}$ и $\mathbf{a}$. Поскольку напряженность поля - это сила, действующая на единичную массу, можно вычислить величину ускорения силы тяжести, создаваемого массой m в точке $\mathbf{a}$:

$$g(\mathbf{a}) = \frac{\gamma \cdot m}{L_{qa}^2} \quad (2.4)$$

или в векторной форме

$$g(a) = -\gamma \frac{m}{L_{qa}^3} L_{qa}. \quad (2.5)$$

В этой формуле знак минус появляется в связи с тем, что вектор направлен из точки **q** в точку **a**. Из (2.2) и (2.5) следует, что в точке **a** потенциал точечной массы **m**, расположенной в точке **q**, определяется соотношением

$$W(a) = \frac{\gamma \cdot m}{L_{qa}}. \quad (2.6)$$

Данная формула справедлива в любой системе координат. Запишем ее подробно в левой прямоугольной декартовой системе координат, изображенной на рис. 6. Особенность данной системы состоит в том, что ось **z** направлена вниз. Это отвечает общепринятым представлениям, что положительна та сила тяжести, которая направлена вниз, а также упрощает вид выводимых соотношений. Во введенной системе координат формула (2.6) примет вид

$$W(x, y, z) = \frac{\gamma m}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}}. \quad (2.7)$$

С помощью данной формулы можно получить соотношение для потенциала тела **V**, учитывая, что в каждой из точек тела **m = σdV = σdξdηdζ**. Интегрируя (2.7) по объему тела, получаем

$$W(x, y, z) = \gamma \int_V \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta) dV}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}}. \quad (2.8)$$

Выведенная формула является основной при решении прямых задач для разных геологических объектов. Дифференцируя ее, можно получать интегральные соотношения для любых элементов гравитационного поля. В частности, компоненты аномального вектора $\vec{g}$ в соответствии с (2.2) выглядят следующим образом:

$$W_x(x, y, z) = \gamma \int_V \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\xi - x) dV}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}, \quad (2.9)$$

$$W_y(x, y, z) = \gamma \int_V \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\eta - y) dV}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}, \quad (2.10)$$

$$W_z(x, y, z) = \gamma \int_V \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\zeta - z) dV}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}. \quad (2.11)$$

Напомним, что при интерпретации гравитационных аномалий на небольшом участке, где не сказывается сферичность Земли, Δg отождествляется с W_z , поэтому наибольшее практическое значение имеет именно последняя формула (2.11). Дальнейшее дифференцирование подынтегральных выражений дает возможность получить соотношения для высших производных гравитационного потенциала, что предоставляется выполнить читателю самостоятельно.

Таким образом, в рамках принятых модельных представлений аномалия ускорения силы тяжести 3-мерных объектов может быть вычислена по формуле (2.11). Эта же формула является

исходной при расчете гравитационных аномалий для 2,5 и $2\frac{1}{4}$ -мерных моделей. Для двумерных моделей она упрощается. Во-первых, для двумерных моделей плотность не меняется вдоль простираения, поэтому вместо $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$ в (2.11) можно подставить $\sigma(\xi, \zeta)$. Во-вторых, аномалии двумерных объектов не зависят от **y**, поэтому, подставив для простоты **y=0**, получим

$$g(x, z) = \gamma \int_V \frac{\sigma(\xi, \zeta)(\zeta - z) dV}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2 + \eta^2]^{3/2}}. \quad (2.12)$$

Учитывая, что **dS = dξdζ**, сведем тройной интеграл к повторному:

$$g(x, z) = \gamma \int_S \sigma(\xi, \zeta) (\zeta - z) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2 + \eta^2]^{3/2}} \right) dS. \quad (2.13)$$

Внутренний интеграл берется с помощью подстановки Эйлера, после чего (2.13) принимает окончательный вид:

$$g(x, z) = 2\gamma \int_S \frac{\sigma(\xi, \zeta) (\zeta - z) dS}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2}. \quad (2.14)$$

Напомним, что для данной модели $\mathbf{g} = \mathbf{W}_z$. Если аналогично рассчитать $\mathbf{W}_x$, получим

$$W_x(x, z) = 2\gamma \int_S \frac{\sigma(\xi, \zeta) (\xi - x) dS}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2}. \quad (2.15)$$

Формулы (2.14) и (2.15) можно рассматривать как результат применения соотношения (2.2) к логарифмическому потенциалу, вводимому выражением

$$W(x, z) = -\gamma \int_S \sigma(\xi, \zeta) \ln[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2] dS. \quad (2.16)$$

Применим формулу (2.14) для вычисления притяжения горизонтального однородного плоскопараллельного слоя, расположенного между уровнями z_1 и z_2 . При постоянной плотности слоя σ интеграл (2.14) легко вычисляется следующим образом:

$$g(x, z) = 2\gamma\sigma \int_S \frac{(\zeta - z) dS}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} = 2\gamma\sigma \int_{z_1}^{z_2} (\zeta - z) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} \right) d\zeta. \quad (2.17)$$

Внутренний интеграл по ξ равен $\pi/(\zeta - z)$, что после сокращения и взятия интеграла по ζ приводит в итоге к следующей простой формуле:

$$g(x, z) = 2\pi\gamma\sigma(z_2 - z_1). \quad (2.18)$$

Отсюда видно, что гравитационное притяжение данного слоя во всем полупространстве выше него является постоянным. Эта формула широко применяется в гравиразведке, в частности для вычисления поправки Буге.

Соотношения (2.14) - (2.16) дают принципиальную возможность рассчитывать гравитационные аномалии двумерных моделей, но фактически при решении прямой задачи удобнее пользоваться не ими, а их комплексными аналогами, что будет рассмотрено далее в главе 2.

§ 3. Основы решения прямой задачи магниторазведки

Магнитное поле описывается двумя основными характеристиками: напряженностью $\vec{H}$ и индукцией $\vec{B}$, между которыми в системе СИ существует следующее локальное соотношение:

$$\vec{B}(a) = \mu_0 [\vec{H}(a) + \vec{I}(a)], \quad (3.1)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м - магнитная постоянная, а $\vec{I}$ - намагниченность в рассматриваемой точке a . Из (3.1) следует, что всюду, куда может быть помещен датчик магнитометра (то есть в немагнитной среде), что справедливо даже для скважин, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$. В настоящее время принято градуировать приборы в единицах индукции системы СИ - Тесла.

Намагниченность вещества сложным образом зависит от его магнитных свойств и намагничивающего поля, что характеризуется петлей гистерезиса, но магниторазведка изучает слабые магнитные поля - ведь нормальное геомагнитное поле всего около 50 мкТл. В связи с этим в магниторазведке применяют упрощенную модель намагничивания: считают горные породы и руды "идеальным ферромагнетиком", что дает возможность следующим образом связать намагниченность с магнитными свойствами

$$\vec{I} = \kappa \vec{H} + \vec{I}_n. \quad (3.2)$$

Здесь κ - безразмерная магнитная восприимчивость, а $\vec{I}_n$ - вектор естественной остаточной

намагниченности. Из этой формулы следует, в частности, что размерность намагниченности совпадает с размерностью напряженности: А/м. Подставив (3.2) в (3.1), получим в любой точке пространства

$$\vec{B} = \mu_0[(1 + \kappa)\vec{H} + \vec{I}_n]. \quad (3.3)$$

Величина в круглых скобках называется относительной магнитной проницаемостью вещества и обозначается μ , тогда $\mu = 1 + \kappa$, и (3.3) можно переписать в следующем виде

$$\vec{B} = \mu_0(\mu\vec{H} + \vec{I}_n). \quad (3.4)$$

Характеристики $\vec{H}$ и $\vec{B}$ удовлетворяют, как известно из теории физических полей, следующим дифференциальным уравнениям, являющимся частным случаем уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \vec{H}(a) = 0; \quad \text{div } \vec{B}(a) = 0. \quad (3.5)$$

Как устанавливается в курсе теории поля, из этих уравнений следует, что на границах тел непрерывны тангенциальная компонента напряженности и нормальная компонента индукции магнитного поля. Нормальная компонента напряженности на границе тела испытывает разрыв, равный нормальной компоненте намагниченности в данной точке. Эти соотношения являются исходными при решении прямой задачи магниторазведки.

Решим с их помощью принципиально важную прямую задачу для однородного полупространства. Пусть полупространство с магнитной восприимчивостью κ и нормальной к границе естественной остаточной намагниченностью $\vec{I}_n$ помещено во внешнее однородное намагничивающее поле с напряженностью $\vec{H}^{\text{прв}}$ (рис. 7).

Очевидно, полупространство в этом случае должно намагничиваться однородно и нормально к границе. Вычислим модуль его намагниченности I , исходя из условия непрерывности на границе нормальной компоненты индукции. При этом учтем, что в (3.3) и (3.4)



Рис. 7. К решению задачи о намагничении полупространства

$\vec{H}$ - это суммарная напряженность, векторно складывающаяся из первичной $\vec{H}^{\text{прв}}$ и вторичной (аномальной) $\vec{H}^{\text{втр}}$. Для данной задачи аномалию легко определить, поскольку разрыв напряженности на границе должен составлять I . В силу симметрии модели это может быть только тогда, когда в свободном полупространстве $H^{\text{втр}} = 0,5 I$, а в полупространстве, занятом магнетиком, $H^{\text{втр}} = -0,5 I$. Тогда во внешнем полупространстве нормальная компонента индукции в соответствии с (3.3) составляет $\mu_0(H^{\text{прв}} + 0,5 I)$, а во внутреннем $\mu_0[(1 + \kappa)(H^{\text{прв}} - 0,5 I) + I_n]$. Приравняв их и решая получающееся уравнение относительно I , получаем

$$I = \frac{\kappa H^{\text{прв}} + I_n}{1 + 0,5\kappa}. \quad (3.6)$$

Так как при выводе данного выражения удовлетворены и уравнения (3.5) и граничные условия, то в силу теоремы единственности, доказываемой в курсах теории поля, аномалия вертикальной составляющей индукции магнитного поля над вертикально намагниченным полупространством

$$Z = 0,5 \mu_0 I, \quad (3.7)$$

где $\mathbf{I}$ определяется выражением (3.6). Горизонтальная составляющая при этом равна нулю.

Обратимся к формуле (3.6). В безграничном пространстве, где отсутствует аномальное поле, намагниченность в соответствии с (3.2), была бы равна

$$\mathbf{I} = \kappa \mathbf{H}^{\text{пр}} + \mathbf{I}_n. \quad (3.8)$$

Сравнивая (3.8) и (3.6), видим, что полупространство намагничивается слабее, нежели пространство, заполненное таким же магнетиком, в $1+0,5\kappa$ раз. Числовой параметр $0,5$ принято называть коэффициентом размагничивания или размагничивающим фактором полупространства и обозначать как N . Дело в том, что вторичное (аномальное) поле направлено внутри полупространства в рассматриваемом случае противоположно первичному, что приводит к уменьшению намагниченности (размагничиванию) полупространства. Данный эффект называется эффектом размагничивания объекта в собственном аномальном поле, а внутреннее аномальное поле часто называют размагничивающим.

Прямая задача для полупространства решается весьма просто, но приемы, примененные при этом - частные. Для объектов более сложных форм необходимо иметь достаточно общий математический аппарат вычисления аномалий. Попробуем построить его таким же способом, как для гравиразведки, а именно, введя скалярный потенциал, определив его для шара и проинтегрировав по объему изучаемой модели.

Возможность введения скалярного магнитного потенциала U вытекает из первого уравнения в (3.5). Определим его соотношением

$$\vec{H}(\mathbf{a}) = -\text{grad } U(\mathbf{a}). \quad (3.9)$$

Знак минус перед градиентом в отличие от (2.2) связан с тем, что одноименные магнитные полюса (т.н. магнитные массы) отталкиваются друг от друга. Подставим (3.4) во второе уравнение из (3.5) с учетом (3.9), в результате убедимся, что скалярный магнитный потенциал удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\text{div} (\mu \text{ grad } U) = \text{div } \vec{I}_n. \quad (3.10)$$

Для однородных объектов уравнение упрощается и переходит в уравнение Лапласа:

$$\Delta U = 0. \quad (3.11)$$

На границах тел потенциал удовлетворяет двум граничным условиям. Из непрерывности тангенциальной компоненты напряженности следует, что потенциал на границе непрерывен. Если обозначить потенциал внутри тела как U_i , а вне тела как U_e , то на границе $U_i = U_e$. Данные потенциалы как и поля складываются из потенциалов первичного и вторичного полей: $U = U^{\text{пр}} + U^{\text{втр}}$, следовательно, можно считать, что на границе непрерывен вторичный потенциал, и первое граничное условие принимает вид:

$$U_i^{\text{втр}} = U_e^{\text{втр}}. \quad (3.12)$$

Второе граничное условие вытекает из непрерывности нормальных компонент вектора индукции и в соответствии с этим имеет вид:

$$\frac{\partial U^{\text{пр}}}{\partial n} + \frac{\partial U_e^{\text{втр}}}{\partial n} = \mu \left(\frac{\partial U^{\text{пр}}}{\partial n} + \frac{\partial U_i^{\text{втр}}}{\partial n} \right). \quad (3.13)$$

Решить прямую задачу магниторазведки для любого объекта можно, найдя такие потенциалы внутри и вне него, которые удовлетворяют дифференциальному уравнению и двум граничным условиям. Решим эту задачу для однородного шара.

Пусть шар радиуса a с магнитной восприимчивостью κ помещен в однородное первичное магнитное поле $\vec{H}^{\text{пр}}$, направленное вдоль оси z . Расположим центр шара в начале декартовой системы координат (рис. 8) и определим потенциал первичного поля. С помощью (3.9) легко убедиться, что

$$U^{\text{пр}} = -H^{\text{пр}} z. \quad (3.14)$$

Из курса теории поля известно, что шар в однородном поле поляризуется однородно, а его внешнее поле



Рис. 8. К решению прямой задачи для однородного шара

эквивалентно полю диполя. Убедимся в этом, попытавшись удовлетворить условиям теоремы единственности. Для этого составим выражения для внутреннего и внешнего вторичных потенциалов с неопределенными коэффициентами и найдем их значения из граничных условий. Для удобства расчетов перейдем к сферическим координатам R, θ, φ , вводимым соотношениями:

$$x = R \sin \theta \cos \varphi; y = R \sin \theta \sin \varphi; z = R \cos \theta. \quad (3.15)$$

В сферической системе координат потенциал первичного поля принимает вид

$$U^{\text{пра}} = -H^{\text{пра}} R \cos \theta. \quad (3.16)$$

Внутренний вторичный потенциал будем искать как потенциал однородного поля с неопределенным коэффициентом A :

$$U_i^{\text{пра}} = A H^{\text{пра}} R \cos \theta. \quad (3.17)$$

Внешний вторичный потенциал будем искать в форме потенциала вертикального диполя, расположенного в центре шара, с неопределенным коэффициентом C :

$$U_e^{\text{втр}} = C H^{\text{пра}} \frac{\cos \theta}{R^2}. \quad (3.18)$$

Удовлетворим сначала условие (3.12). При $R=a$ приравняем (3.17) и (3.18), в результате чего получим соотношение $C=a^3 A$. В условии (3.13) вместо дифференцирования по нормали в сферической системе можно дифференцировать по координате R , тогда получим следующее уравнение для определения A : $-1-2A = \mu(-1+A)$ откуда $A=(\mu-1)/(\mu+2)$. Выражения для потенциалов, удовлетворяющие условиям теоремы единственности, примут вид:

$$\begin{aligned} U_i^{\text{пра}} &= \frac{\mu-1}{\mu+2} H^{\text{пра}} R \cos \theta, \\ U_e^{\text{втр}} &= \frac{\mu-1}{\mu+2} H^{\text{пра}} \frac{\cos \theta}{R^2}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Переходя обратно к декартовой системе координат, получим внутри шара

$$U_i^{\text{втр}} = \frac{\mu-1}{\mu+2} H^{\text{пра}} z, \quad (3.20)$$

а вне его

$$U_e^{\text{втр}} = \frac{\mu-1}{\mu+2} a^3 H^{\text{пра}} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.21)$$

Проанализируем полученные выражения. Потенциал вне шара эквивалентен потенциалу диполя, помещенного в его центр, с дипольным моментом, ориентированным по направлению намагничивающего поля. Преобразуем (3.21), умножив и поделив на $4\pi/3$ и учитывая, что $\mu=1+\kappa$. В результате получим

$$U_e^{\text{втр}} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\kappa H^{\text{пра}}}{1 + \frac{1}{3}\kappa} \cdot \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.22)$$

Первый множитель в данной формуле возникает из-за применения системы СИ, второй множитель представляет собой намагниченность шара, а третий - его объем. Таким образом, потенциал внешнего аномального поля шара можно представить в виде

$$U_e^{\text{втр}} = \frac{1}{4\pi} \cdot IV \cdot \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.23)$$

Дипольный момент шара, как видно, совпадает с его магнитным моментом $M=IV$, а намагниченность шара определяется формулой

$$I = \frac{\kappa H^{\text{пра}}}{1 + \frac{1}{3}\kappa}. \quad (3.24)$$

Напомним, что задача решалась при $I_n=0$. Если учесть наличие остаточной намагниченности, направленной так же, как намагничивающее поле, то (3.24) преобразуется к виду

$$I = \frac{\kappa H^{npa} + I_n}{1 + \frac{1}{3}\kappa}. \quad (3.25)$$

Сравнивая (3.25) и (3.6), можно убедиться, что они имеют одинаковый вид:

$$I = \frac{\kappa H^{npa} + I_n}{1 + \kappa N}, \quad (3.26)$$

только для полупространства коэффициент размагничивания $N=1/2$, а для шара $N=1/3$.

Анализируя (3.20), можно установить, что потенциал внутреннего поля шара - это потенциал однородного поля с напряженностью

$$\vec{H}_i^{втр} = -N \vec{I}, \quad (3.27)$$

направленного противоположно намагниченности, следовательно, в данном случае и первичному полю. Из вида полученной формулы становится ясно, почему внутреннее аномальное поле называют размагничивающим, а параметр N - коэффициентом размагничивания.

Выведенные формулы относились к шару, центр которого совпадает с началом координат. Переносим центр в точку $q(\xi, \eta, \zeta)$, получаем

$$U_e^{втр} = -\frac{1}{4\pi} \cdot IV \cdot \frac{\zeta - z}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}. \quad (3.28)$$

Легко убедиться, что данная формула имеет следующую структуру:

$$U_e^{втр} = -\frac{1}{4\pi} \cdot IV \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{L_{qa}} \right), \quad (3.29)$$

допускающую обобщение на случай произвольно ориентированной намагниченности. Если шар намагничивается в поле, имеющем компоненты напряженности $H_x^{npa}, H_y^{npa}, H_z^{npa}$, а компоненты его вектора остаточной намагниченности соответственно I_{nx}, I_{ny}, I_{nz} , то он приобретает компоненты намагниченности

$$I_x = \frac{\kappa H_x^{npa} + I_{nx}}{1 + \kappa N}; \quad I_y = \frac{\kappa H_y^{npa} + I_{ny}}{1 + \kappa N}; \quad I_z = \frac{\kappa H_z^{npa} + I_{nz}}{1 + \kappa N}. \quad (3.30)$$

Каждая из компонент создает свою часть общего потенциала, который, как следует из (3.29) и принципа суперпозиции полей:

$$U_e^{втр} = -\frac{V}{4\pi} \left[I_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{L_{qa}} \right) + I_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{L_{qa}} \right) + I_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{L_{qa}} \right) \right]. \quad (3.31)$$

В квадратной скобке содержится скалярное произведение двух векторов: первый - это $\vec{I}$ с компонентами I_x, I_y, I_z , а второй вектор - это $\text{grad}(1/L_{qa})$. Записывая U вместо $U_e^{втр}$, получаем общее выражение для потенциала в точке a , создаваемого шаром с центром в точке q :

$$U(a) = -\frac{V}{4\pi} \left(\vec{I} \text{ grad} \frac{1}{L_{qa}} \right). \quad (3.32)$$

Оператор grad в данной формуле берется по координатам точки a . Применяя символический оператор Гамильтона ∇ , (3.32) можно переписать в форме:

$$U(a) = -\frac{V}{4\pi} \left(\vec{I} \overset{a}{\nabla} \frac{1}{L_{qa}} \right), \quad (3.33)$$

а, принимая во внимание, что $\vec{\nabla}^q = -\vec{\nabla}^a$, и в альтернативной, имея в виду, что выбор одной из формул зависит от характера решаемой задачи:

$$U(a) = \frac{V}{4\pi} \left(\vec{I} \vec{\nabla}^q \frac{1}{L_{qa}} \right). \quad (3.34)$$

Полученные выражения дают возможность путем интегрирования по объему модели записать формальные соотношения для потенциала 3-мерного тела V:

$$U(a) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \left(\vec{I}(q) \vec{\nabla}^a \frac{1}{L_{qa}} \right) dV \quad (3.35)$$

или

$$U(a) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\vec{I}(q) \vec{\nabla}^q \frac{1}{L_{qa}} \right) dV. \quad (3.36)$$

Вместе с тем, очевидно, что данные соотношения надо применять с осторожностью, что, в частности, следует из несовпадения намагниченностей пространства, полупространства и шара.

В необходимости корректного применения выведенных соотношений можно дополнительно убедиться, решив прямую задачу для горизонтального кругового цилиндра, вытянутого вдоль оси y. Задача эта решается аналогично задаче для шара, только вычисления проводятся не в сферической, а в цилиндрической системе координат. Предоставляем само решение провести читателю самостоятельно, и приведем лишь конечный результат. Если радиус цилиндра обозначить через **a**, то потенциал однородного вторичного поля внутри цилиндра при вертикальном намагничении будет

$$U_i^{втр} = N \vec{I} z, \quad (3.37)$$

где $N=1/2$ (как для полупространства), а намагниченность **I** также вычисляется по формуле (3.26) с данным коэффициентом размагничивания. Внешний аномальный потенциал цилиндра эквивалентен потенциалу вертикального линейного диполя, расположенного на оси цилиндра:

$$U_c^{втр} = \frac{1}{2\pi} \cdot IS \cdot \frac{z}{x^2 + z^2}, \quad (3.38)$$

где $S=\pi a^2$ - площадь поперечного сечения цилиндра, а произведение **IS** - его линейный магнитный момент. Формальное интегральное соотношение для магнитного потенциала двумерной модели можно, обобщая (3.38), записать следующим образом:

$$U(x, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{(\xi - x) I_x(\xi, \zeta) + (\zeta - z) I_z(\xi, \zeta)}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} dS. \quad (3.39)$$

От формулы (3.35), интегрируя потенциал по **η** (как в гравитационной задаче), также можно формально прийти к (3.39), но значения намагниченности при этом должны, конечно же, остаться такими как для шара, а не как для кругового цилиндра. Для принципиального решения вопроса о применимости полученных выражений надо глубже разобраться в зависимости намагниченности от формы, чему посвящен следующий параграф.

В заключение данного параграфа укажем еще на одно формальное соотношение - так называемое соотношение Пуассона между гравитационным и магнитным потенциалами однородных и однородно намагниченных тел. Если в формулах (2.8), (3.35) и (3.36) положить $\sigma = \text{const}$ и $\vec{I} = \text{const}$, то легко убедиться, что

$$U(a) = \frac{1}{4\pi\gamma\sigma} \left(\vec{I} \cdot \vec{\nabla}^q W(a) \right) = -\frac{1}{4\pi\gamma\sigma} \left(\vec{I} \cdot \vec{\nabla}^a W(a) \right). \quad (3.40)$$

Применимость соотношения Пуассона также определяется характером размагничивания изучаемой модели.

Дополнительная литература

Знаменский В. В. Полевая геофизика. М., Недра, 1980.

Миронов В. С. Курс гравиразведки. Л., «Недра», 1972.