Задание на 20.10.2020 г. Важно: адрес моей электронной почты weral0606@yandex.ru. Со всеми вопросами обращаться в рабочее время Работы на проверку представляем в рукописном сканированном варианте или в Word, затем после получения разрешения, размещаем в личном кабинете, предварительно переводим графику и текст в PDF.

Лекция 4(2)

4.5 Определение стационарной конфигурации мерзлого массива и температурного поля в нем

Конфигурация мерзлого массива и его термический режим находятся в определенной закономерной связи с условиями теплообмена на поверхности и притоком глубинного тепла. Основная трудность нахождения нижней границы мерзлой толщи связана с существенной нестационарностью температурного поля в слое сезонного оттаивания. Вместе с тем в связи с многолетними колебаниями температур температурное поле в толще, подстилающей слой годовых колебаний, также нестационарно. Однако поскольку амплитуда многолетних колебаний температур значительно меньше амплитуды годовых колебаний, ниже слоя нулевых годовых амплитуд температурное поле изменяется во времени крайне медленно.

Исходя из этого, Д. В. Редозубов (1959) предложил простой метод «терморазведки на мерзлоту», опирающийся на решение стационарной задачи теплопроводности при граничных условиях I рода. Указанный метод позволяет приближенно вычислять конфигурацию многолетнемерзлого массива и температурное поле в нем по данным неглубоких скважин или результатам расчета средней температуры пород, а также по известной температуре на достаточно большой глубине или по известной геотермической ступени в данном районе. Исключение слоя с резко нестационарным температурным полем приводит к необходимости введения ограничивающей поверхности, где задается распределение температур, неизменное во времени (но зависящее от координат в случае двух- и трехмерной задачи). Ограничивающая поверхность выбирается в зависимости от рельефа поверхности. Наиболее простым случаем формы ограничивающей поверхности является плоскость (например, в равнинных условиях), а в двухмерной задаче - прямая, ограничивающая полуплоскость. В последнем случае стационарное температурное поле в однородной толще горных пород (- $\infty < x < \infty, z > 0$) определяется решением уравнения Лапласа $t_{xx}(x,z) + t_{zz}(x,z) = 0$, при условии $t(x, 0)=\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ - распределение температур на ограничивающей поверхности ($z=0$), $t_z(x, \infty)$=g. Решение указанной задачи имеет вид

$$t(x,z) = gz + \frac{z}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)/[(s-x)^2 + z^2]\, ds$$

Распределение температур на ограничивающей поверхности $\varphi(x)$ определяется выделенными в результате съемки и картирования изучаемого района участками с различными геолого-географическими и мерзлотными условиями. Практически в качестве $\varphi(x)$ задается ступенчатая функция или ломаная, звенья которой соответствуют указанным участкам. При этом интеграл, входящий в формулу, разбивается на сумму табличных интегралов (пределы интегрирования и значения граничных температур в которых определяются этими участками).

Хотя данное решение справедливо лишь для однородной толщи горных пород, его можно применить в случаях, когда теплопроводность мерзлых и талых пород ($\lambda_м$ и $\lambda_т$) различна. Это осуществляется путем приведения области исследования к одной зоне (талой или мерзлой). В частности, при приведении к талой зоне на всех участках ограничивающей поверхности, где температура ниже 0°С, вместо $\varphi(x)$ должна задаваться величина $\lambda_м\varphi(x)/\lambda_т$. При этом температурное поле в области мерзлых пород, где $t(x,z)<0$, искажается (истинные значения находятся в результате деления на $\lambda_м/\lambda_т$). Однако положение нулевой изолинии, характеризующей конфигурацию мерзлоты, а также температурное поле в талых породах являются истинными.

Аналогичным образом находится решение поставленной задачи, если вместо геотермического градиента по глубоким скважинам задавать температуру на некоторой глубине H ниже границы мерзлоты. При использовании предложенной Д. В. Редозубовым схемы необходимо иметь в виду, что она не учитывает неоднородность среды, а также возможные внутренние источники тепла. Кроме того, абстрагирование, связанное с принятой стационарной схемой, исключает учет многолетнего изменения климата, в результате чего «терморазведка на мерзлоту» может лишь ориентировочно указать расположение нижней границы мерзлых пород без учета динамики ее во времени (аградации или деградации мерзлоты).

4.6. Формулировка задачи промерзания и оттаивания пород

Промерзание и оттаивание влажных горных пород являются сложными термодинамическими процессами, которые развиваются в неоднородной капиллярно-пористой среде и сопровождаются изменением агрегатного состояния поровой влагй, а также физических свойств пород. Наиболее полной математической моделью такого процесса в рамках модели сплошной среды (при пренебрежении вопросами термоупругости и конвективного теплообмена) является задача Стефана. Отличительной особенностью задачи Стефана, относящей ее к числу сложнейших нелинейных задач математической физики, является наличие подвижных границ раздела зон с различным агрегатным состоянием (фронтов), закон перемещения которых заранее неизвестен.

В различных типах горных пород фазовые переходы влаги происходят существенно различным образом. Так, в грубодисперсных породах (слаботрещиноватых скальных и полускальных, галечниках и щебнистых грунтах с песчаным и супесчаным заполнителем и т. д.) характерно то, что фазовые переходы влаги происходят практически полностью при температуре промерзания (оттаивания), т. е. на фронте промерзания (фронте оттаивания). Вместе с тем в тонкодисперсных породах в связи со значительным количеством связанной влаги существенное значение имеют фазовые переходы незамерзшей воды, развивающиеся внутри промерзшей зоны.

Рассмотрение математической формулировки задачи Стефана в указанных типах пород с различным характером льдовыделения для простоты проведем на примере одномерной однофронтовой (двухзонной) задачи о промерзании (или оттаивании) однородных пород.

1. *Постановка задачи о промерзании грубодисперсных горных пород*. При переходе температуры через критическое значение в породе происходит резкое изменение физического состояния. При движении фронта, температура на котором постоянна и равна температуре замерзания (t_0), происходит полностью выделение теплоты фазовых переходов ($Q_ф$). В каждой из двух зон - верхней, мерзлой, ограниченной плоскостями $z=0$ и $z=\xi(\tau)$, и нижней, талой, ограниченной $z=\xi(\tau)$ и $z=l$ температурное поле подчиняется уравнению

$$t_\tau(z,\tau) = at_z(z,\tau)$$

причем соответствующие теплофизические характеристики (λ_i, a_i, i=1,2), а также влажность w и плотность скелета γ постоянны и заданы. При переходе через фронт $\xi(\tau)$ характеристики изменяются скачкообразно.

Условие, определяющее скорость перемещения фронта во времени, следует из баланса тепла. Пусть за время $\Delta\tau$ фронт переместится на $\Delta\xi$. При этом на единицу площади поперечного сечения замерзает, если $\Delta\xi>0$ (или оттаивает, если $\Delta\xi<0$), объем $\Delta\xi \cdot 1 \cdot 1$, в связи с чем выделится (поглотится) $Q_\phi \Delta\xi$ тепла. Если w — объемная влажность, то $Q_\phi = \eta w$, где η - объемная теплота фазовых переходов воды (80 000 ккал/м^3 или 335 200 кДж/м^3). Если же w — весовая влажность, то $Q_\phi = \eta\gamma w \gamma_o^{-1}$ где γ_{00} — плотность воды (1000 кг/м^3). Для выполнения теплового баланса это количество тепла должно равняться разности потоков тепла на границе раздела в моменты τ и $\tau+\Delta\tau$. Отсюда, переходя к пределу при $\Delta\tau\to0$, получаем условие Стефана на подвижной границе:

$$\lambda_1 \partial t_1/\partial z]_{z=\xi} - \frac{\lambda_2 \partial t_2}{\partial z]_{z=\xi}} = Q_\text{ф} \xi'(\tau)$$

Условие имеет неизменный вид как при промерзании, так и при оттаивании, если индекс 1 соответствует мерзлой зоне. Указанное обстоятельство необходимо иметь в виду в многофронтовой задаче, которая описывает или сезонное, или многолетнее промерзание и оттаивание в связи с последовательным чередованием мерзлых и талых зон.

В результате математическая формулировка задачи о промерзании грубодисперсных пород в случае граничных условий I рода имеет следующий вид. Требуется найти $t_i(z,\tau)$, i=1, 2 и $\xi(\tau)$, удовлетворяющие предыдущему уравнению, а также

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = a_1 \frac{\partial^2 t_1}{\partial z^2};\ 0 < z < \xi(\tau); \frac{\partial t_2}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 t_2}{\partial z^2}$$

$z \in \xi(\tau), l;\ t_1(0,\tau) = \Phi_1(\tau) < t_0;\ t_2(l,\tau) = \Phi_2(\tau) \geq t_0;$

$t_1(z,0) = \varphi_1(z) \leq t_0;\ z \in [0, \xi(0)];\ t_2(z,0) = \varphi_2(z) \geq t_0$

$z \in [\xi(0), l];\ t_1(\xi(\tau),\tau) = t_2(\xi(\tau),\tau) \equiv t_0$

Без ограничения общности можно принять t_0=0. При расчетах глубин сезонного промерзания (оттаивания) за l принимают обычно глубину нулевых годовых амплитуд. При этом Φ_2 соответствует средней температуре горных пород. При исследовании же глубин многолетнего промерзания и оттаивания, а также при прогнозе изменения мерзлотных условий в. связи с антропогенными воздействиями на нижней границе задается поток глубинного тепла (q).

Как показано И. Стефаном (1889), именем которого названа данная задача, условие относит ее к классу нелинейных задач. Это исключает возможность применения наложения решений и приводит к необходимости повторного решения задачи при любых изменениях данных.

2. Постановка задачи промерзания слабовлажных тонкодисперсных пород. В рассматриваемых породах практически свободная влага (если она при данной естественной влажности существует) замерзает при температуре начала замерзания t_0, а связанная —в диапазоне температур ниже t_0 согласно кривой льдистости (рис. 4.4).

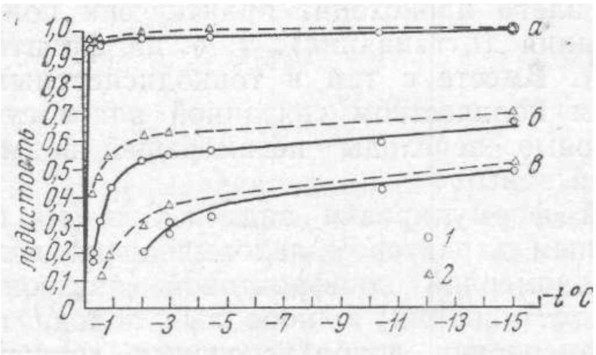

Рис. 4.4 Кривые замерзания (льдистости) типичных дисперсных пород по З. А. Нерсесовой: а - песок ($\omega_{об} = 11 - 12\%$); б - суглинок ($\omega_{об} = 21 - 22\%$); в - глина ($\omega_{об} = 30 - 31\%$); 1 — замерзание; 2 — оттаивание

В результате образуется промерзшая зона, в которой наряду с незамерзшей при данной температуре водой $w_n(t)$ имеются и кристаллы льда. В этой зоне при повышении или понижении температур происходит соответственно поглощение (выделение) тепла фазовых переходов незамерзшей влаги, т. е. возникают непрерывно распределенные источники (стоки) тепла с интенсивностью $\eta \partial w_n(t)/\partial \tau$. Поэтому температурное поле в промерзающей зоне может быть описано уравнением Фурье при введении эффективной теплоемкости $C_{эф}$, включающей в себя помимо теплоемкости C фазовые переходы незамерзшей воды:

$$C_{эф}(t) = C + \eta w_n'(t)$$

Поскольку $w_n'(t) \geq 0,\ t < t_0$, причем $w_n'(t) > 0$ в области интенсивных фазовых переходов (обычно при $t \in (t_0 - 5°C,\ t_o)$, то $C_{эф} \gg C$ и существенно зависит от температуры в указанном диапазоне. Вместе с тем если естественная объемная влажность w превышает максимальную молекулярную $w_н(t_0)$, то на границе раздела $\xi(\tau)$ при температуре t_0 происходят аналогично описанному выше фазовые переходы «свободной» влаги $w - w_н(t_0)$, т. е. $Q_ф = \eta[w_e - w_н(t_0)]$

Наличие подвижных границ раздела мерзлых и талых зон резко усложняет решение задачи Стефана. В явном виде решение ее получено лишь в автомодельном случае одномерной задачи. В остальных случаях возможно нахождение только численных решений с использованием электронных вычислительных машин. Вместе с тем, исходя из практических нужд, интенсивное развитие получили приближенные решения задачи.

4.7 Автомодельное решение задачи Стефана

Рассматривается решение задачи, описывающей промерзание грубодисперсных пород с образованием границы раздела в однородном полуограниченном пространстве с постоянной начальной (при $\tau=0$) температурой пород $T_0 \geq t_0$. Температура поверхности в момент $\tau=0+0$

мгновенно изменяется и становится равной $T_i<t_0$. При этом образуется фронт $\xi(\tau)$, $\xi(0)=0$, перемещение которого во времени подчиняется параболическому закону вида $\xi(\tau)=\propto\sqrt{\tau}$, где $\propto$ - const>0 - корень трансцендентного уравнения (Тихонов, Самарский, 1966):

^ (T, —1_0) exp {— gg/(4a_2)} h (7\ —1_0) exp {— a^2/(4g_1)> = ^ y^a/2. (3,15)

/aГ[1 — erf {a/(2 J/^T)} erf {a/ (2 W)} * '

1 S

Здесь erfs = 2jt ^{2} exp{—m^2}dm —функция Гаусса, erf 0=0,

б

erf oo =1. Если зона с индексом 1 талая (при этом Ti>t_0, To^to), то правая часть (3,15) берется со знаком «минус». Нахождение единственного положительного корня (3,15) легко осуществляется подбором.

Распределение температур по глубине в обеих зонах определяется после нахождения а из выражений

h (Z, г) = (7\erf [2/(2 erf-^{1} [a/(2

(3,16)

U (г, г) = (T_0 -1_0) {1 - erf [a/(2 /a_2)]}'" x X {erf [2/(2т/aГс)] — erf [a/(2/a7)]}.

В важном частном случае T_0=0 (при этом, очевидно, температура в нижней зоне остается неизменной и теплопоток в ней на фронте равен нулю) нахождение а легко осуществляется графически. Точно так же находится решение автомодельной задачи промерзания (оттаивания) тонкодисиерсных пород в частном случае, когда кривая незамерзшей воды w_H может быть аппроксимирована линейной функцией (при этом $C_{3(}$j)=const).

3*

Если же представить в виде ломаной, то задача сводится к решению системы трансцендентных уравнений вида (3,15), число которых совпадает с числом звеньев ломаной. Нахождение корней этой системы, однако, представляет большие затруднения, что делает такой подход нецелесообразным.

В общем случае, когда $w_В$ определена экспериментально, решение задачи Стефана в автомодельном случае легко осуществляется с помощью ЭВМ. Как показали расчеты этой задачи, для реальных пород с существенно различным характером льдовыделения в диапазоне отрицательных температур, при оттаивании учет фазовых переходов незамерзшей влаги приводит при прочих равных условиях к уменьшению скорости оттаивания, а также к резкому понижению температур мерзлой толщи (заметному даже в песках). Вместе с тем при промерзании указанный эффект проявляется гораздо слабее и должен учитываться практически лишь в тонкодисперсных породах при небольших (близких к максимальной молекулярной) значениях естественной влажности.

Совершенно аналогично находится решение поставленной задачи при изменении уровня поверхности по заданному закону в связи с изучением процессов абляции, термоэрозии, денудации, разработки и отсыпки грунта, осадко- и снегонакопления и т. д. Все это позволяет так же эффективно решить вопросы управления мерзлотными процессами при производстве различного рода земляных работ, оптимизации снегонакопления и т. п.

2.8 Определение глубин сезонного и многолетнего промерзания (оттаивания) пород по методу Лейбензона

Предложенный Лейбензоном метод приближенного решения задачи Стефана, часто называемый методом мгновенной смены стационарных состояний, широко используется для оценки глубин промерзания и оттаивания.

Идея этого метода, основанного на вариационных принципах, заключается в том, что распределение температур в обеих зонах задается в наиболее простом виде, чем облегчается интегрирование задачи, но при условии, что оно удовлетворяет краевым условиям. Затем с помощью условия Стефана находится закон изменения $\xi(\tau)$. Функции распределения температур в обеих зонах выбираются так, чтобы условие Стефана интегрировалось в явном виде. Обычно в качестве таких распределений принимают решение соответствующей стационарной задачи при неподвижном фронте.

Применительно к задаче промерзания (оттаивания) сильновлажных пород, где $Q_ф \gg C_0$), рассматриваемый метод особенно эффективен, поскольку фронт движется достаточно медленно и теплообороты, связанные фазовыми переходами, значительно превышают неточности в теплооборотах, возникающие при искажении температурного поля в зонах при замене его стационарным.

Приближенное решение методом Лейбензона задачи, имеет следующий вид. Распределение температур в обеих зонах принимается в виде

$$t_1(z, \tau) = (T_1 - t_0)(1 - z/\xi),\quad t_2(z, \tau) = (T_1 - t_0)\,erf\,[(z - \xi)/(2a_2\sqrt{\tau})]$$

Легко видеть, что функции $t_i(z, \tau)$, $i=1,2$ удовлетворяют как уравнению теплопроводности (при фиксировании ξ), так и соответствующим начальным и граничным условиям. Подставляя их в условие Стефана, убеждаемся, что при этом фронт перемещается во времени по параболическому закону (при промерзании T_i -t_0 берется по модулю)

$$\xi(\tau)=\left[\sqrt{2\lambda_1(T_1-t_0)\bullet Q_ф^{-1}+\frac{2\lambda_2C_2(T_2-t_0)^2}{\pi Q_ф^2}}-(T_2-t_0)Q_ф^{-1}\sqrt{\lambda_2C_2/\pi}\right]\sqrt{\pi}$$

В случае промерзания (оттаивания) пород с исходной температурой, близкой к 0°С, указанное решение еще более упрощается:

$$\xi(\tau)=\sqrt{2\lambda_1(T_1-t_0)\bullet Q_\text{ф}^{-1}\tau}$$

Полученное выражение, называемое формулой Стефана, часто применяется при ориентировочных «с запасом» расчетах на начальных этапах геокриологического прогноза. Очевидно, что глубины промерзания или оттаивания, определяемые по по данной формуле в породах, температура которых отлична от 0°С, будут значительно завышены. Тем не менее в силу исключительной простоты формула Стефана на практике часто используется при прикидочных расчетах даже в случае переменной температуры на поверхности. Для этого необходимо лишь определить по эпюре сезонных температур величину тепло- или морозо-градусочасов Ω, т. е. площадь относительно температуры фазовых переходов t_0 за время τ (отсчет времени ведется от начала сезона), и подставить ее в формулу вместо $(T_1-t_0)\tau$.

Расчеты по формуле Стефана можно уточнить, если имеются данные о глубине промерзания (оттаивания) за определенный год на конкретной площадке, оголенной от снежного покрова. Тогда, если на указанный год известны $\Omega=\Omega_1$ и $\xi=\xi_2$ то, используя уравнение, на любой другой год, когда $\Omega=\Omega_2$, соответствующая глубина промерзания (оттаивания) на той же площадке может быть найдена в виде

$$\xi_2=\xi_1\sqrt{\frac{\Omega}{\Omega_2}}$$

Эффективность рассмотренного метода смены стационарных условий привела к тому, что формулы с незначительными модификациями (связанными с введением некоторых эмпирических поправочных коэффициентов) рекомендованы СНиПом Н-18-76 (1977) для расчета нормативных глубин сезонного оттаивания и промерзания соответственно.

Метод Лейбензона позволяет получить также достаточно простое приближенное решение одномерной осесимметричной задачи, описывающей развитие ореолов промерзания (оттаивания) вокруг бесконечного цилиндра с постоянной температурой T_1 на его стенках. Данная задача представляет значительный интерес при оценке радиуса замораживающих колонок, ореолов оттаивания вокруг заглубленных нефте-, газо- и трубопроводов и т. д. Рассмотрим для простоты случай, когда исходная температура однородных окружающих пород близка к температуре замерзания (оттаивания). В прилегающей к цилиндру радиусом r_0 зоне; при фиксированной мощности ореола (с радиусом $R(\tau)$) уравнение теплопроводности имеет вид

$rt_\tau (r, \tau) = a (r \bullet t_r)_r$, $r \in (r_0, R(\tau))$. Частным решением соответствующей стационарной задачи является $t(r) = \ln r$.

Поэтому температурное поле в пределах ореола при любом заданном $R(\tau)$ находится в виде

$$t (r, \tau) = (T_1 - t_0) \ln (R(\tau)/r) \ln^{-1} (R(r)/r_0),$$

удовлетворяющем условиям $t(r_0, \tau) \equiv T_1, \quad t(R(r),\tau) \equiv t_0$

Из условия (3,13) (вне ореола теплопоток равен нулю) непосредственно получаем уравнение динамики ореола оттаивания (промерзания) во времени:

$$\tau = Qr_0^2 (2\lambda_1 [T_1 - t_0]^{-1} \left\{ R^2(\tau) r_0^{-2} \ln \left(\frac{R(\tau)}{r_0} \right) - \frac{1}{2} [R^2(\tau) r_0^{-2} - 1] \right\}$$

.

Отсюда, задаваясь различными значениями $R(\tau) > r_0$, легко получаем с некоторым занижением моменты времени, в которые радиус ореола достигает этих значений.

3.9 Определение глубины сезонного промерзания (оттаивания) пород по формуле В. С. Лукьянова

Одним из недостатков рассмотренного выше метода смены стационарных состояний является неучет теплоемкости в верхней мерзлой зоне, что может быть существенным в слабовлажных породах. В. С. Лукьянов предложил приближенную формулу, учитывающую как указанный фактор, так и наличие утепления поверхности грунта (снежный покров и различные изоляционные покрытия). Постановка задачи в этом случае отличается от рассмотренных выше тем, что нижняя зона отбрасывается, а ее влияние заменяется теплопотоком q на границе раздела. Теплоизоляция поверхности грунта заменяется введением термического сопротивления изоляции (без учета теплоемкости).

При этом как величина q, так и термическое сопротивление изоляции принимаются постоянными в течение рассматриваемого промежутка времени, равными их осредненным значениям. Коэффициент теплоотдачи с поверхности a принимается постоянным. В расчете используется толщина слоя грунта s, термическое сопротивление которого ($s\lambda_1^{-1}$) равно сумме термических сопротивлений слоя изоляции и теплоотдачи с поверхности (a^{-1}). Распределение температур в верхней зоне принимается линейным.

Учитывая все вышеизложенное, из условия теплового баланса на подвижной границе В. С. Лукьянов непосредственно приходит к трансцендентному уравнению для нахождения фронта при любом заданном τ. Решение этого уравнения с достаточной для практических целей точностью легко осуществляется с помощью сетчатой номограммы (Лукьянов, Головко, 1957). При назначении q рекомендуется использовать карту изолиний, составленную на основании обработки многолетних данных на большей части территории СССР.

При всей ценности формулы В. С. Лукьянова для инженерных расчетов существенным ее недостатком является неопределенность при назначении средних величин теплопотока в нижней зоне и коэффициента теплоотдачи с поверхности.