

Дисциплина: Методы математического анализа

Вид занятия: лекция

Группа: РЕГ-21

Указания:

1. Изучить и проработать лекционный материал.
2. Выполнить домашнее задание по данной теме, сфотографировать и загрузить в личный кабинет до **12.11.21**

Тема: Неопределенный интеграл и его свойства. Непосредственное интегрирование.

Определение 1: Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $y = f(x)$, если выполняется условие $F'(x) = f(x)$.

Определение 2: Если функция $y = f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечное множество первообразных, причем все первообразные содержатся в выражении $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная величина.

Определение 3: Неопределенным интегралом называется совокупность всех ее первообразных и обозначается символом $\int f(x)dx = F(x) + C$, где

\int - знак интеграла,

$f(x)$ - подынтегральная функция,

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение,

x - переменная интегрирования.

Определение 4: Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется интегрированием этой функции.

Правильность результата интегрирования проверяется дифференцированием найденной первообразной, т.е. $(F(x) + C)' = f(x)$.

Пример: Проверить, что $\int 3x^2 dx = x^3 + C$.

$(x^3 + C)' = (x^3)' + (C)' = 3x^2 + 0 = 3x^2 = f(x) \Rightarrow$ получили подынтегральную функцию, а значит интегрирование выполнено верно.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx, \quad a = const.$$

2. Интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов этих функций

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \dots \pm \int f_n(x)dx.$$

Дифференцирование и интегрирование – это две взаимно-обратные операции. На основе таблицы дифференцирования составляется таблица для отыскания неопределенных интегралов.

Таблица основных интегралов

- | | |
|--|---|
| 1. $\int 0 dx = C, \quad C = const$ | 14. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$ |
| 2. $\int dx = x + C$ | 15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm A}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm A} + C$ |
| 3. $x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$ | 16. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$ |
| 4. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ | 17. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$ |
| 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$ | 18. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C$ |
| 6. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$ | 19. $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C$ |
| 7. $\int e^x dx = e^x + C$ | |
| 8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0, a \neq 1)$ | |
| 9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ | |
| 10. $\int \cos x dx = \sin x + C$ | |
| 11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ | |
| 12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ | |
| 13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$ | |

Основные методы интегрирования

Метод непосредственного интегрирования

Этот метод основан на применении таблицы интегралов и свойств.

Пример: Вычислить неопределенный интеграл

- $$\int (5x^4 - 6x^2 + 1) dx = 5 \int x^4 dx - 6 \int x^2 dx + \int dx = 5 \frac{x^{4+1}}{4+1} - 6 \frac{x^{2+1}}{2+1} + x + C = 5 \frac{x^5}{5} - 6 \frac{x^3}{3} + x + C =$$

$$= x^5 - 2x^3 + x + C.$$
- $$\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} - 2 \int \frac{dx}{x^3} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} - 2 \int x^{-3} dx = \ln|x| - \left(-\frac{1}{x} \right) - 2 \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C =$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{x} - 2 \frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln|x| + \frac{1}{x} + x^{-2} + C = \ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + C.$$
- $$\int \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{(\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{x}} dx + 2 \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int x^{1/2} dx + 2 \int dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + 2x + 2\sqrt{x} + C = \frac{x^{3/2}}{3/2} + 2x + 2\sqrt{x} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + 2x + 2\sqrt{x} + C.$$

$$4. \int \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^3 x}{\cos^2 x} \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \cos x dx = \operatorname{tg} x - \sin x + C.$$

$$5. \int \frac{dx}{x^2 - 9} = \int \frac{dx}{x^2 - 3^2} = \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 81}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 81} \right| + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{x^2 + 16} = \int \frac{dx}{x^2 + 4^2} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{7 - x^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{7})^2 - x^2} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{\sqrt{7} + x}{\sqrt{7} - x} \right| + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{6 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{6})^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{6}} + C.$$

$$10. \int \sqrt[5]{x^3} dx = \int x^{\frac{3}{5}} dx = \frac{x^{\frac{3}{5} + 1}}{\frac{3}{5} + 1} + C = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + C = \frac{5}{8} \sqrt[5]{x^8} + C.$$

$$11. \int (\cos x - 4 \sin x) dx = \int \cos x dx - 4 \int \sin x dx = \sin x + 4 \cos x + C.$$

$$12. \int \left(\frac{10}{x^2 - 7} + \frac{1}{2} \cdot 3^x \right) dx = 10 \int \frac{dx}{x^2 - 7} + \frac{1}{2} \int 3^x dx = 10 \int \frac{dx}{x^2 - (\sqrt{7})^2} + \frac{1}{2} \int 3^x dx = 10 \cdot \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{7}}{x + \sqrt{7}} \right| + \frac{1}{2} \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + C = \frac{5}{\sqrt{7}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{7}}{x + \sqrt{7}} \right| + \frac{3^x}{2 \ln 3} + C.$$

Домашнее задание: Вычислить неопределенный интеграл

$$1. \int \frac{2x^6 + 1}{x^3} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$2. \int \frac{(x-5)^2}{x^2} dx$$

$$7. \int \left(3 \cos x + \frac{1}{3} \cdot 2^x \right) dx$$

$$3. \int \left(10x^4 + 2\sqrt{x} - \frac{6}{x^2} \right) dx$$

$$8. \int (5x + 5) dx$$

$$4. \int (e^x + 8) dx$$

$$9. \int \frac{dx}{x^7}$$

$$5. \int 6^x dx$$

$$10. \int \left(\frac{dx}{3 - x^2} - 4^x \right) dx$$