Теоретическая механика. Практика.

После изучения материала по лекции, требуется ответить на поставленные вопросы.

Вопросы для самоконтроля

Раздел 1. СТАТИКА

1. Что изучает статика?
2. Какими тремя факторами определяется сила, действующая на твердое тело?
3. Назовите условия равновесия системы сходящихся сил.
4. Что называется парой сил? Чем характеризуется действие пары сил на твердое тело? Как направлен и чему равен по величине вектор-момент пары?
5. Назовите условие равновесия системы пар сил?
6. Что называется моментом силы относительно данной точки? Как выбирается знак этого момента?
7. Изменится ли момент силы относительно данной точки при переносе силы по линии ее действия?
8. В каком случае момент силы относительно точки равен нулю? Приведите примеры.
9. Что называется главным вектором данной системы сил? Что называется главным моментом системы сил относительно данной точки?
10. Назовите основные аксиомы статики.
11. Что называется моментом силы относительно данной оси? Как выбирается знак этого момента?
12. В каких случаях момент силы относительно оси равен нулю?
13. Какие силы называются равнодействующими и уравновешивающимися? Чем они отличаются друг от друга?
14. Как определить центры тяжести линии, тонкой пластины, твердого тела?

Разбор типичного примера по статике. Обратить внимание на качество рисунка, обозначения и пояснения по ходу решения. Подобная задача в контрольной работе.

.

Дано: $P=10$ кН, $M=5$ кНм, $q_{max}=3$ кН/м, $\alpha=60°$, $a=2$ м, $b=6$ м, $c=2{,}5$ м, $d=1{,}5$ м, распределенная нагрузка действует на участке *КС*.

Определить: реакции связей в опорах *A* и *B*.

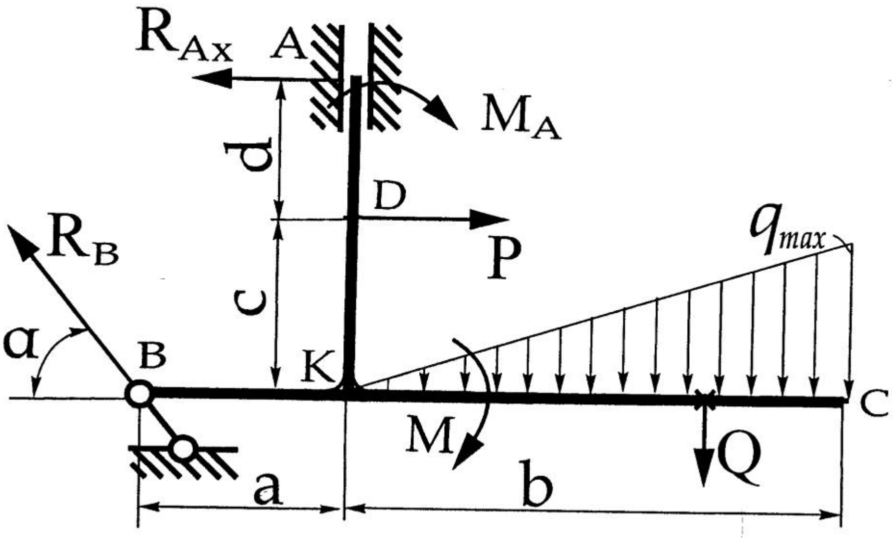

Рис.1.5

Решение. Для определения реакций выбираем расположение осей *x* - горизонтально, *y* – вертикально и изображаем действующие на стержень внешние силы и реакции R_B, R_{Ax}, M_A.

Равнодействующую распределенной нагрузки принимаем, как $Q = \frac{q_{\max} b}{2}$ с точкой ее приложения на расстоянии *2/3b* от точки *К.* Для полученной плоской системы сил составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{xi} = 0; \quad P - R_{Ax} - R_B \cos\alpha = 0;$$

$$\sum F_{yi} = 0; \quad R_B \sin\alpha - Q = 0;$$

$$\sum M_{Bi} = 0; \quad R_{Ax}(c+d) - Pc - M_A - M - Q(a + 2/3b) = 0.$$

Подставив числовые значения и решив систему уравнений, определяем искомые реакции.

Ответ: R_{Ax}=4,8 кН, R_B=10,4 кН, M_A=-64,8 кНм. Знак минус у реакции M_A указывает на то, что ее направление противоположно, чем на рисунке.

Раздел 2. Кинематика.

Вопросы для самоконтроля

1. Что изучает раздел теоретической механики кинематика?

2. Что называется законом движения точки?

3. Что представляет собой траекторией точки?

4. Какое движение тела называется плоским или плоскопараллельным движением?

5. Как направлены естественные координатные оси в каждой точки кривой?

6. Что характеризуют собой касательное и нормальное ускорения точки?

7. Перечислите основные виды движения твердого тела.

8. Как определить скорость любой точки плоской фигуры?

9. Какую точку плоской фигуры называют мгновенным центром скоростей (МЦС) и каковы основные случаи определения его положения?

10. Какими параметрами определяется положение твердого тела, одна из точек которого неподвижна?

11. Какие движения называются абсолютным, переносным, относительным?

12. Как определить по модулю кориолисово ускорение?

13. В каких случаях кориолисово ускорение равно нулю?

Типичный пример по кинематике (подобная задача в контрольной работе).

По заданным уравнениям движения точки $x=f(t)$ и $y=f(t)$ установить траекторию точки и определить скорость, касательное, нормальное и полное ускорение точки в момент времени t_1. Определить радиус кривизны и установить характер движения точки (ускоренное, замедленное, равномерное).

Дано: $t_1=1$ с, $x = 6\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 2$, $y = 16\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 14$.

Определить: уравнение траектории, V, a, a_τ , a_n, ρ.

Решение. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t. Так как время входит в аргументы тригонометрических функций, то для исключения t, используем формулу

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Первое исходное уравнение представим как

$$\frac{x+2}{6} = \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right), \text{ или } \left(\frac{x+2}{6}\right)^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right),$$

а второе исходное уравнение представим в виде $\frac{y+14}{16} = \sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$.

Складывая правые и левые части этих уравнений, получаем

$$\frac{y+14}{16} + \left(\frac{x+2}{6}\right)^2 = 1.$$

После преобразования находим уравнение траектории

$$y = 16 - 16\left(\frac{x+2}{6}\right)^2 - 14 = 2 - 16\left(\frac{x+2}{6}\right)^2,$$

$$y = 2 - 16\left(\frac{x+2}{6}\right)^2 \text{ - парабола.}$$

Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (6\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 2)' = -\pi\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right),$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = (16\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 14)' = \frac{16\pi}{6}\cdot 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \frac{16\pi}{6}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right),$$

при $t=1$ *с* получаем значения проекций скоростей V_x=-1,57 см/с, V_y=7,25 см/с, а полную скорость, как $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(-1{,}57)^2 + 7{,}25^2} = 7{,}42$ см/с.

Аналогично определим ускорение точки:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \left(-\pi \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right)' = -\frac{\pi^2}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right),$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \left(\frac{16\pi}{6}\cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)\right)' = \frac{16\pi^2}{18}\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right),$$

при $t=1$ *с* получаем a_x=-1,42 см/с^2, a_y=7,58 см/с^2 и полное ускорение $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-1{,}42)^2 + (7{,}58)^2} = 7{,}71 см/с^2.$

Касательное ускорение a_τ определим по формуле

$$a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V},$$

тогда при $t=1$ с, получим: $a_\tau = \dfrac{(-1{,}57)\cdot(-1{,}42) + 7{,}25\cdot 7{,}58}{7{,}42} = 7{,}7$ см/с^2. Знак “+” показывает, что перемещение ускоренное.

Нормальное ускорение определим, используя уже известные значения: $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{7{,}71^2 - 7{,}7^2} = 0{,}39$ см/с^2.

Радиус кривизны траектории ρ определим по формуле:

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{7{,}42^2}{0{,}39} = 1141{,}17 см.$$

Полученную траекторию *y=f(x)* и найденные вектора скоростеи и ускорений изображаем на рис. 2.8 в положении при t=1 с.

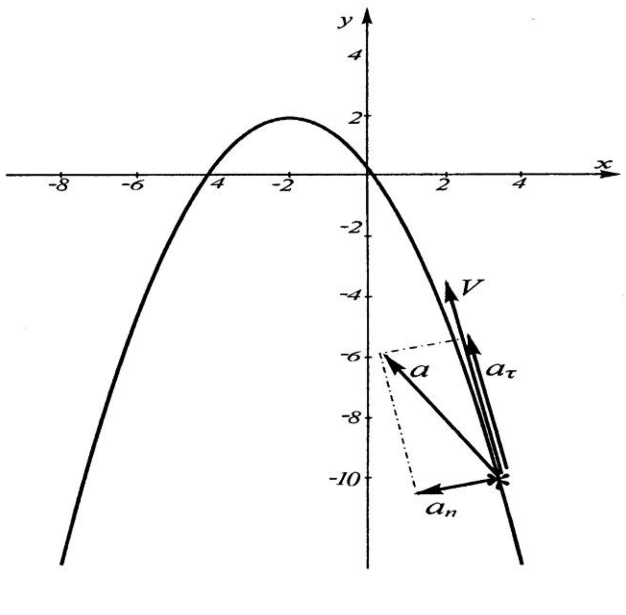

Рис. 2.8

Ответ: V=7,42 см/с, a=7,71 см/с^2, a_τ=7,7 см/с^2, a_n=0,39 см/с^2, ρ=1141 см, перемещение точки ускоренное.

Раздел 3. ДИНАМИКА

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте основные законы механики.
2. Какое уравнение называется основным уравнением динамики?
3. Какие уравнения динамики называются естественными уравнениями движения материальной точки?
4. Каковы две основные задачи динамики точки?
5. Что называют моментом инерции тела относительно плоскости, оси и точки?
6. Что характеризует импульс силы?
7. Сформулируйте теорему об изменении количества движения материальной точки.
8. Как определяется работа постоянной по модулю и направлению силы на прямолинейном перемещении?
9. Как вычислить работу силы тяжести и работу силы упругости?
10. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии материальной точки и механической системы.
11. Какой вид имеет дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси?
12. В чем заключается сущность принципа Даламбера?
13. Как формулируется принцип возможных перемещений?
14. Как формулируется золотое правило механики?
15. Какой вид имеет общее уравнение динамики?

Разбор типичного примера по динамики точки. Обратить внимание на качество рисунка, обозначения и пояснения по ходу решения.

В результате полученного толчка тело начало скользить по поверхности *AB* из точки *A* с начальной скоростью V_A, расположенной под углом α к горизонту в течении τ секунд (рис. 3.9). Коэффициент трения скольжения тела о поверхность равен *f*. Пройдя по плоскости расстояние *AB=l*, материальная точка покидает поверхность со скоростью V_B и падает на горизонтальную площадку в точку *C* со скоростью V_C, при этом оно находилось в воздухе *T* секунд. При решении задачи не учитывать сопротивление воздуха.

Дано: V_A*=2 м/с,* α*=30°, h=3м,* β*=60°,* τ*=2 с, f=0,4.*

Определить: d, l, уравнение траектории тела на участка *BC*.

Решение. В связи с тем, что при движении материальной точки от *A* к *C*, силы различны на участках *AB* и *BC*, разделим траекторию движения точки на части и рассмотрим ее движение на участке *AB*, под действием сил: силы тяжести $\overline{G} = m\overline{g}$, силы трения $\overline{F}_{тр}$, нормальной реакции опоры $\overline{N}$.

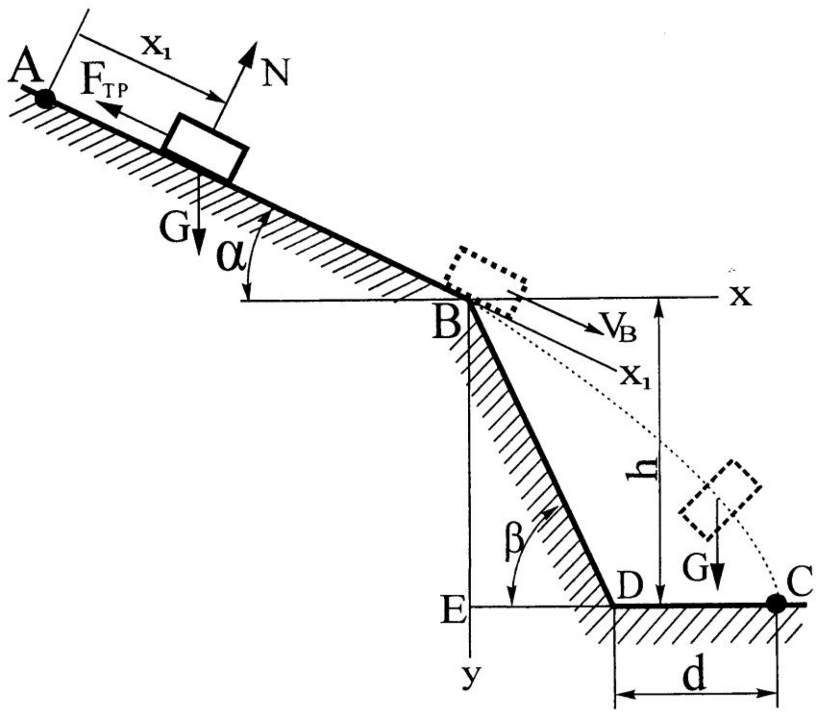

Рис. 3.9

Составим дифференциальное уравнение на ось x_1:

$$m\ddot{x}_1 = \sum F_{xi} = G\sin\alpha - F_{тр},$$

где $G=mg$, $F_{тр}=f\cdot N$, здесь $N = G\cos\alpha = mg\cos\alpha$

Тогда $m\ddot{x}_1 = mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha$ или, разделив на m

$$\ddot{x}_1 = g\sin\alpha - fg\cos\alpha$$

и дважды проинтегрировав дифференциальное уравнение, получим:

$$\dot{x}_1 = (g\sin\alpha - fg\cos\alpha)t + C_1,$$

$$x_1 = (g\sin\alpha - fg\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Определим постоянные интегрирования из начальных условий: когда точка находилась в точке A: при $t=0$ $\dot{x}_1 = V_A = 2$ м/с, $x_1 = 0$. Подставив эти значения в уравнения, полученные при интегрировании, для $t=0$ находим $C_1=2$, $C_2=0$.

Тогда уравнения, характеризующие скорость и уравнение движения тела на участке AB имеют вид:

$$\dot{x}_1 = (g\sin\alpha - fg\cos\alpha)t + 2,$$

$$x_1 = (g\sin\alpha - fg\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + 2t.$$

Для момента $t=\tau=2$ *с*, когда тело находится в точке B имеем $\dot{x}_1 = V_B$, $x_1 = l$, и подставляя их в уравнение движения, получаем

$$V_B = (9{,}8\cdot\sin 30° - 0{,}4\cdot 9{,}8\cdot\cos 30°)\cdot 2 + 2 = 5{,}01 \text{ м/с}.$$

$$l = (9{,}8\cdot\sin 30° - 0{,}4\cdot 9{,}8\cdot\cos 30°)\cdot\frac{2^2}{2} + 2\cdot 2 = 7\,м.$$

Рассмотрим теперь движение груза на участке BC; найденная скорость V_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($V_o=V_B$). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силу тяжести $\overline{G} = m\overline{g}$. Проводим из точки B оси Bx и By и составим дифференциальные уравнения движения тела:

$$m\ddot{x}_1 = \sum F_{xi} = 0; \qquad m\ddot{y} = \sum F_{yi} = G.$$

Разделив обе части на m и дважды проинтегрировав, получим:

$$\ddot{x} = 0; \qquad \ddot{y} = g;$$

$$\dot{x} = C_3; \qquad \dot{y} = gt + C_4;$$

$$x = C_3 t + C_5; \qquad y = g\frac{t^2}{2} + C_4 t + C_6.$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда тело находится в точке B, считая в этот момент $t=0$. Тогда, при $t=0$ $V=V_B=5{,}01$ *м/с* или в проекциях на координатные оси: $\dot{x}_0 = V_B\cos\alpha$, $\dot{y}_0 = V_B\sin\alpha$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Подставляя $t=0$ в уравнения, полученных в результате интегрирования, имеем: $\dot{x}_0 = C_3$; $\dot{y}_0 = C_5$; $x_0 = C_4$; $y_0 = C_6$. Следовательно: $C_3 = V_B\cos\alpha$; $C_4 = V_B\sin\alpha$; $C_5 = 0$; $C_6 = 0$.

В результате находим уравнения проекции скорости тела:

$$\dot{x} = V_B\cos\alpha, \qquad \dot{y} = gt + V_B\sin\alpha$$

и уравнения его движения

$$x = V_B\cos\alpha\cdot t, \qquad y = g\frac{t^2}{2} + V_B\sin\alpha\cdot t.$$

В момент времени $t=T$, тело падает в точку C, для которой характерно, что $x=d+h\cdot ctg\beta= d+3\cdot ctg60°=d+1{,}73$, а $y=h=3$*м*. Подставляя эти данные в уравнения движения, получим:

$$d + 1{,}73 = V_B\cos\alpha\cdot T;$$

$$h = 3 = g\frac{T^2}{2} + V_B\sin\alpha\cdot T.$$

Зная h=3 м и V_B=5,01 м/с, из последнего выражения находим T, решив квадратное уравнение:

$3 = 4{,}9T^2 + 5{,}01 \cdot \sin 30° \cdot T$ или $4{,}9T^2 + 5{,}01 \cdot \sin 30° \cdot T - 3 = 0$,

$T_1 = -1{,}078$ с; T_2=0,56 с.

Время отрицательным быть не может, значит, T=0,56 с. Отсюда $d = 5{,}01 \cdot cos30° \cdot 0{,}56 - 1{,}73 = 2{,}43 - 1{,}73 = 0{,}7$ м.

Для того чтобы определить уравнение траектории нужно исключить время из одного из уравнений движения (сделаем это из первого уравнения), и подставим во второе. Если $t = \dfrac{x}{V_B \cdot \cos\alpha}$, тогда

$$y = \frac{g}{2}\left(\frac{x}{V_B \cos\alpha}\right)^2 + V_B \sin\alpha \frac{x}{V_B \cos\alpha} = \frac{g}{2}\left(\frac{x}{V_B \cos\alpha}\right)^2 + xV_B \cdot tg\alpha.$$

Ответ: $d = 0{,}7$ м, $l = 7$ м, $y = \dfrac{g}{2}\left(\dfrac{x}{V_B \cos\alpha}\right)^2 + xV_B \cdot tg\alpha$.

В контрольной работе ход решения задач давать с пояснениями, как в представленных примерах.