

1. СТАТИКА

1.1. Основные понятия и аксиомы

Статика – это раздел теоретической механики, в котором изучаются методы преобразования системы сил в эквивалентные и устанавливающие условия равновесия сил, приложенных к твердому телу.

Основными объектами исследования в теоретической механике являются:

- *материальная точка* – это материальное тело, размерами которого можно пренебречь;
- *механическая система* – это любая совокупность материальных точек;
- *абсолютно твердое тело* – это механическая система, расстояние между точками которой не изменяется при любых взаимодействиях.

В основе статики лежат ее аксиомы.

1. *Аксиома инерции.* Под действием взаимно уравновешивающихся сил материальная точка находится в состоянии покоя или движется прямолинейно и равномерно.

2. *Аксиома равновесия двух сил.* Две силы, приложенные к твердому телу, взаимно уравновешиваются только в том случае, если их модули равны, и они направлены по одной прямой в противоположные стороны.

3. *Аксиома присоединения и исключения уравновешивающихся сил.* Действие системы сил на твердое тело не изменится, если к ней присоединить или из нее исключить систему взаимно уравновешивающихся сил.

4. *Аксиома параллелограмма сил.* равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рис. 1.1) и выражается геометрическим равенством:

$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$, а модуль этой силы определяется по формуле:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \varphi}.$$

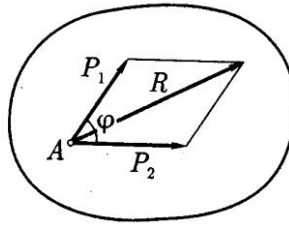


Рис. 1.1

5. *Аксиома равенства действия и противодействия.* Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

6. *Аксиома затвердевания.* Равновесие сил, приложенных деформирующемуся телу, сохраняет при его затвердевании.

В основе разделов статика лежит понятие силы.

Сила – это мера механического взаимодействия тел и определяющая ее интенсивность и направление.

Сила определяется тремя элементами: числовым значением или модулем, направлением и точкой приложения. За единицу измерения силы в системе СИ принимается ньютон (N). Модуль вектора силы можно определить по методу проекций, т.е. по отношению к координатным осям. Проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и оси, определяя знак проекции непосредственно по чертежу. Если направление оси и проекции силы в одну сторону, то проекция положительна, т.е. со знаком (+), если противоположна, то со знаком (-).

Совокупность нескольких сил, приложенных к твердому телу, является *системой сил*.

Сила, эквивалентная некоторой системе сил называется *равнодействующей*.

Сила, равная по модулю равнодействующей и направленная в противоположную сторону, называется *уравновешивающей силой*.

С понятием силы связано важное определение момента силы относительно точки и оси.

Момент силы относительно точки O (рис. 1.2, а) называется вектор, приложенный в этой точке и направленный перпендикулярно к плоскости, содержащей силу и точку, в такую сторону, чтобы смотря на встречу этому вектору, видеть силу стремящейся вращать плоскость в сторону, обратную вращению часовой стрелки. В векторной форме получаем

$\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{P} \times \vec{r}$, а модуль этого вектора равен произведению модуля силы P на ее плечо d относительно точки O : $M_O = Pd$.

Знак выбирается:

- если сила P пытается вращать против часовой стрелки, значит момент положительный;
- если сила P пытается вращать по часовой стрелки, значит момент отрицательный.

Моментом силы относительно оси z (рис. 1.2, б) называется взятое со знаком минус или плюс произведение проекции силы на плоскость перпендикулярную к оси на плечо от точки пересечения оси с плоскости до проекции силы на плоскости: $M_z = P_1 d_1$.

Момент силы в системе СИ имеет единицу размерности – ньютон · метр (Н·м).

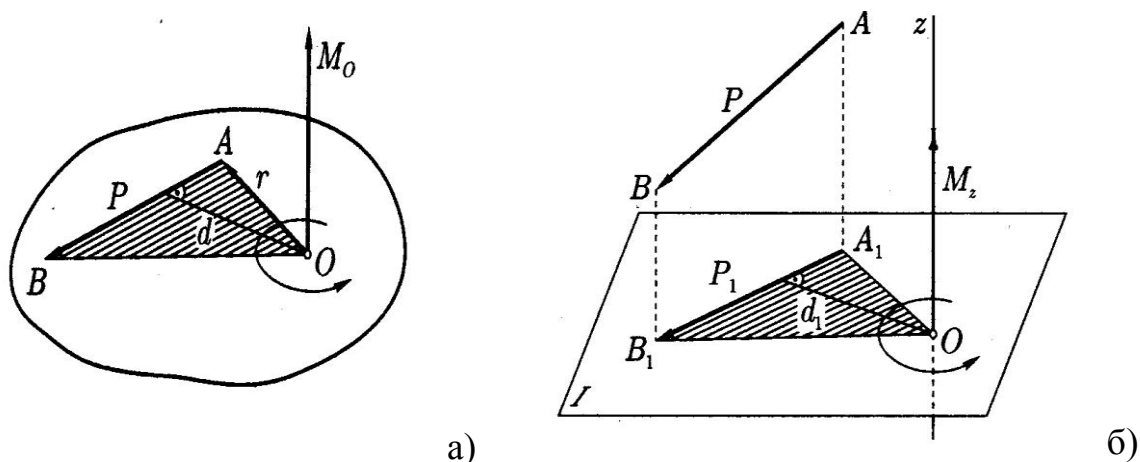


Рис. 1.2

На равновесие тела влияют наложенные на него связи. Связь – это тело, ограничивающее свободу движения рассматриваемого тела. Для того чтобы избавиться от связей необходимо применить принцип освобожденности от связей: «Несвободное твердое тело можно рассмотреть как свободное, на которое кроме задаваемых сил действуют реакции связей»

Задаваемые силы – это силы, определяющие действие на тела других тел, вызывающих или способных вызвать изменение его кинематического состояния.

Реакции связей – это сила или система сил, определяющие действие на тела связи. Основные типы связей и реакций, соответствующих этим связям, показаны на рис. 1.3.

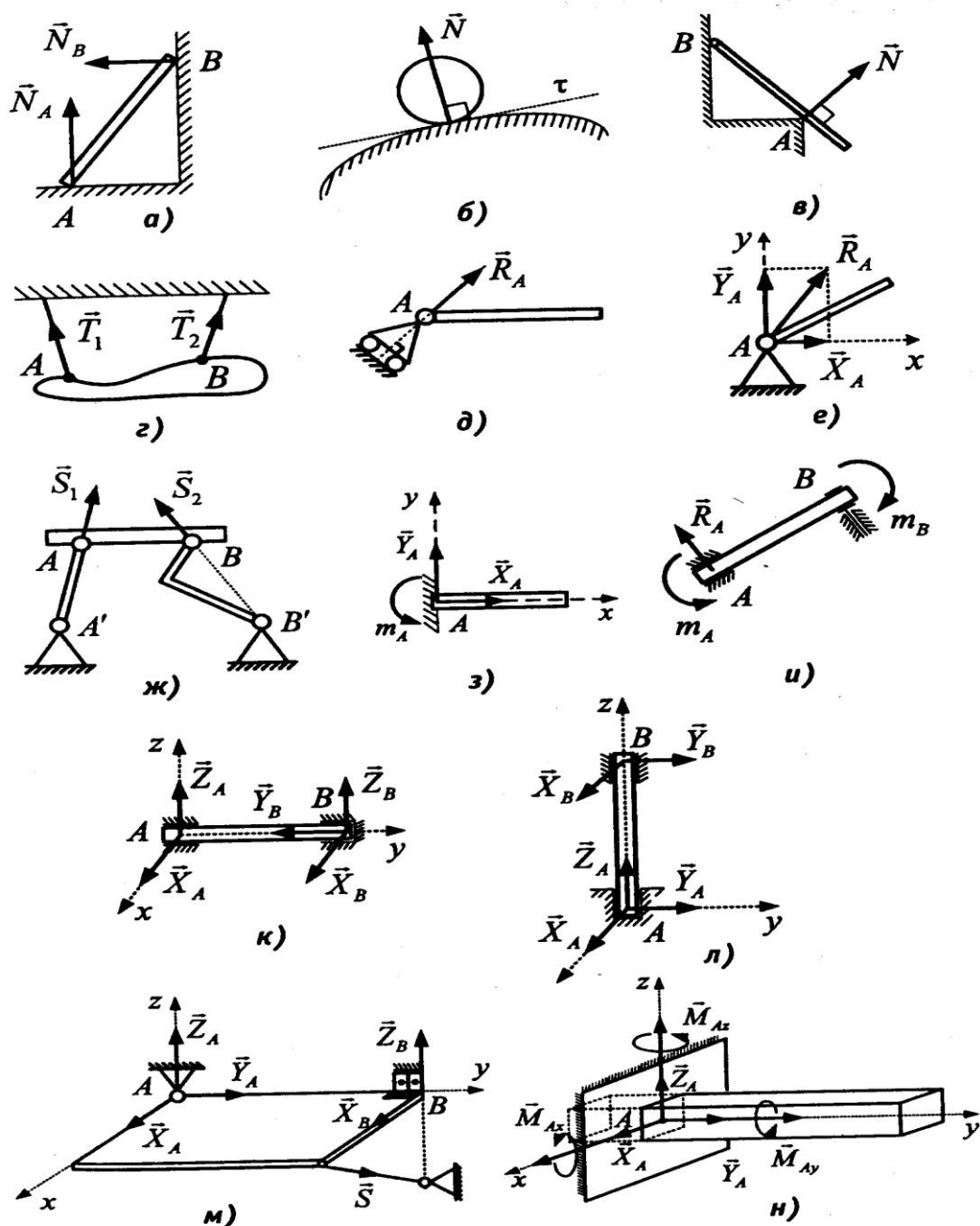


Рис. 1.3

1.2. Система сходящихся сил

Силы называются *сходящимися*, если их линии действия пересекаются в одной точке. Действие сходящихся сил на твердое тело характеризуется равнодействующей. Чтобы система сходящихся сил была уравновешена достаточно выполнение условия: геометрическая сумма сил ($\sum \vec{F} = 0$) или сумма проекций сил на каждую из координатных осей должны быть равны нулю, т. е. $\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$; $\sum F_z = 0$.

1.3. Пара сил

Система равных по модулю, противоположно направленных, параллельных сил называется парой сил.

Действие пары сил на твердое тело характеризуется ее моментом. Моментом пары сил называется вектор, направленный перпендикулярно к плоскости, содержащей силы пары, в такую сторону, чтобы смотря навстречу этому вектору видеть силы, стремящимися вращать против часовой стрелки. *Условие равновесие тела, под действием пар сил:* геометрическая сумма моментов пар сил равна нулю ($\sum \bar{M} = 0$) или проекция этой суммы на координатные оси декартовой системы координат равна нулю $\sum M_x = 0$; $\sum M_y = 0$; $\sum M_z = 0$.

1.4. Произвольная система сил

Произвольная система сил характеризуется действием на твердое тело главным вектором $\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i$ и главным моментом $\bar{M}_O^* = \sum \bar{M}_{Oi}$ произвольной системы сил. Главным вектором произвольной системы сил называется геометрическая сумма произвольных сил. Главным моментом произвольной системы сил относительно центра приведения называется геометрическая сумма моментов сил, действующих на тело относительно центра приведения. Выбор центра приведения не влияет на числовое значение и направление главного вектора, но влияет на модуль и направление главного момента произвольной системы сил.

Условие равновесия произвольной системы сил, действующей на твердое тело – это $\bar{R}^* = 0$ и $\bar{M}_O^* = 0$ или при ориентировании системы в плоскости или в пространстве это соотношения может преобразоваться:

для плоскости: $\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$; $\sum M_O(\bar{F}_i) = 0$; для пространства: $\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$; $\sum F_z = 0$; $\sum M_x(\bar{F}_i) = 0$; $\sum M_y(\bar{F}_i) = 0$; $\sum M_z(\bar{F}_i) = 0$.

2. Кинематика

Кинематикой называют раздел теоретической механики, изучающий движение материальных тел с геометрической точки.

В основе раздела кинематика лежат основные определения:

Законом движения точки (твёрдого тела) называется математическая зависимость, определяющая положение точки (тела) в пространстве от времени.

Траекторией точки называется – любая линия, описанная движущейся точкой.

2.1. Кинематика точки

Существует три основных способа задания движения точки: векторный, координатный, естественный.

Векторный способ задания движения точки заключается в том, что положение точки определяется радиусом вектором от некоторой неподвижной точки. В каждое новое положение точки можно провести радиус-вектор. Зависимость радиуса вектора от времени является законом движения точки в векторной форме – $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Траектория точки определяется концом радиуса вектора, поэтому траектория точки в векторном способе – это годограф радиуса-вектора $\vec{r}$ или геометрическое место концов радиуса-вектора $\vec{r}$.

Координатный способ задания движения точки заключается в том, что положение точки определяется системой декартовыми координатами. В каждый момент времени точки имеет определенные координаты. Зависимость этих координат от времени – закон движения точки в координатной точке, т. е. $x=f(t)$, $y=f(t)$, $z=f(t)$.

Чтобы определить уравнение траектории в координатном способе нужно выразить параметр независимой переменной t через одну из координат, например через x . Если $t=u(x)$, тогда $y = f_1(u(x))$, $z = f_2(u(x))$.

Естественный способ задания движения точки заключается в том, что положение точки заранее известно. На траектории точки от некоторой неподвижной точки (начало координат) откладывается криволинейная координата s . Изменение криволинейной координаты s от времени является закон движения точки в естественной форме и уравнением траектории – $s=f(t)$.

Самым распространенным способом является координатный способ задания движения точки. Этот способ связан с другими способами соотношениями:

- взаимосвязь векторного и координатного способов задания движения точки: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - единичные орто-вектора координатных осей x, y, z ;

- взаимосвязь естественного и координатного способов задания движения точки: $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$.

Движение точки по траектории характеризует скорость и ускорение точки.

Скорость точки – это векторная величина, характеризующая быстроту изменения положения точки в пространстве от времени.

Скорость точки направлена по касательной к траектории и в системе СИ измеряется в м/с.

Скорость точки в зависимости от способа задания движения точки можно определить:

1. Векторным способом $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.

2. Координатным способом $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$, где $V_x = \frac{dx}{dt}$, $V_y = \frac{dy}{dt}$,

$V_z = \frac{dz}{dt}$ - проекции скорости на координатные оси.

Модуль скорости можно определить по методу проекций $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$.

3. Естественным способом $\vec{V} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau}$, где $V = \frac{ds}{dt}$ - модуль скорости, $\vec{\tau}$ - единичный орто-вектор касательной.

Ускорение точки – это векторная величина, характеризующая быстроту изменения модуля и направления вектора скорости. Ускорение точки в системе СИ измеряется в $м/с^2$. Ускорение точки в зависимости от способа задания движения можно определить:

1. Векторным способом: $\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$.

2. Координатным способом: $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$, где $a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$,

$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$, $a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$ - проекции скорости на координатные оси. Модуль

ускорения точки определяется через проекции $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

3. Естественным способом: $\bar{a} = a_\tau\bar{\tau} + a_n\bar{n}$, где a_τ, a_n - модули касательного и нормального ускорений, $\bar{\tau}, \bar{n}$ - единичный орто-вектора касательной и нормали в естественном трехграннике.

Касательное ускорение – это векторная величина, характеризующая быстроту изменения модуля скорости. По модулю касательное ускорение определяется как $a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$. Это ускорение можно определить,

продифференцировав соотношение $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$, в результате получим:

$$a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y + V_z a_z}{V}.$$

Нормальное ускорение определяется как $a_n = V^2 / \rho$, где ρ – радиус кривизны

траектории точки. Модуль и направление ускорения при естественном способе задания движения определяются соотношениями: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$,

$$\cos(\bar{a}, \bar{\tau}) = \frac{a_\tau}{a}, \cos(\bar{a}, \bar{n}) = \frac{a_n}{a}$$

2.2. Кинематика твердого тела

В зависимости от движения тела кинематику твердого тела можно разделить на пять разделов: поступательное движение твердого тела,

вращательное движение твердого тела, плоское или плоскопараллельное движение твердого тела, сферическое движение твердого тела, общий случай движения твердого тела.

Поступательным движением твердого тела называется такое движение твердого тела, при котором прямая, соединяющая две точки тела, движется параллельно самой себе.

Свойства точек тела, движущегося поступательно, определяется теоремой: Все точки твердого тела, движущегося поступательно, описывают одинаковые (совпадающие при наложении) траектории, и имеют одинаковые скорости и ускорения. На основании этой теоремы, если знать, как движется одна точка такого тела, то аналогично будут двигаться и другие точки тела, поэтому поступательное движение твердого тела сводится к кинематике точки. Закон поступательного движения можно представить выражениями: при векторном способе - $\vec{r}_C = \vec{r}(t)$; при координатном способе - $x_C = f(t)$, $y_C = f(t)$, $z_C = f(t)$; при естественном способе - $s_C = f(t)$, где C – центр тяжести или массы тела.

Вращательным движением твердого тела называется такое движение тела, при котором все точки этого тела остаются неподвижными, находящиеся на некоторой прямой, называемой осью вращения, а остальные точки описывают окружность с центром на этой прямой.

Вращение тела вокруг неподвижной оси определяется углом поворота φ . Угол поворота считается положительным, если вращение тела происходит против часовой стрелки. В системе СИ угол поворота φ измеряется в радианах. Изменение угла поворота от времени - $\varphi = f(t)$ – это закон вращательного движения твердого тела. Угол поворота φ в зависимости от оборотов тела n , совершенных вращение вокруг оси, связаны соотношением: $\varphi = 2\pi n$.

Вращательное движение тела вокруг неподвижной оси характеризуется угловой скоростью и угловым ускорением.

Угловая скорость определяется изменение угла поворота с течением времени и численно равна $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. В системе СИ угловая скорость измеряется в рад/с или c^{-1} .

Угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости с течением времени и численно равна $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$. В системе СИ имеет единицу измерения рад/с^2 или с^{-2} .

Скорость и ускорения точки (например, A) тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяются: $V_A = \omega R$, $a_{A\tau} = \varepsilon R$, $a_{An} = \omega^2 R$, $a_A = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$, где R – радиус вращения точки. Радиус вращения точки – это перпендикуляр от точки тела до оси вращения.

Передаточные механизмы (рис. 2.1) предназначены для передачи вращения от одного вала, называемого ведущим, к другому, называемому ведомым и характеризуются передаточным числом i .

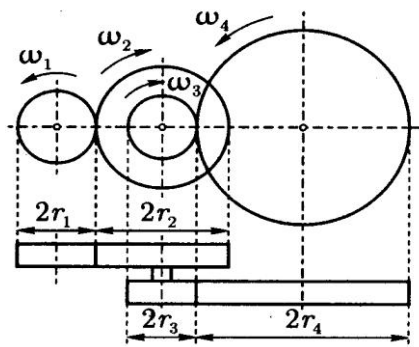


Рис. 2.1

В этом примере передаточные числа i_{1-2} для колес 1-2 и i_{3-4} для колес 3-4:

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}, \quad i_{3-4} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{r_4}{r_3} = \frac{z_4}{z_3}, \text{ где}$$

z – число зубьев колес.

Для всего механизма: $i = i_{1-2} i_{3-4}$.

Плоским движением твердого тела называется такое движение твердого тела, при котором точки движутся в плоскости параллельно некоторой неподвижной плоскости. В результате того, что точки тела движутся в плоскостях, то такое тело называют плоской фигурой.

Движение твердого тела, совершающего плоское движение, можно рассмотреть как совокупность двух перемещений: поступательного перемещения тела с произвольной точкой, называемой полюсом, и вращения тела вокруг полюса. Выбор полюса влияет на поступательную часть движения плоской фигуры, но не влияет на вращение тела вокруг полюса.

Законом плоского движения твердого тела с полюсом в точке A являются следующие уравнения: $x_A = f_1(t)$, $y_A = f_2(t)$, $\varphi = f_3(t)$.

Скорость точки плоской фигуры можно определить несколькими способами.

Первый способ: скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и вращательной скорости точки вокруг полюса $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$, где $\vec{V}_B$ - искомая скорость; $\vec{V}_A$ - скорость полюса A ; $\vec{V}_{BA}$ - вращательная скорость точки B вокруг полюса, которая перпендикулярна расстоянию AB и численно равна $V_{BA} = \omega \cdot AB$; ω – угловая скорость фигуры.

Этот способ имеет следствие о проекции скоростей точек плоской фигуры, которое часто применяется при решении задач: проекции скоростей точек плоской фигуры на ось, проведенную через эти точки, равны.

Второй способ определения скорости точки плоской фигуры через мгновенный центр скоростей (МЦС). Мгновенный центр скоростей – это единственная точка фигуры при плоском движении, которая в каждый момент времени имеет скорость равную нулю. Если у плоской фигуры известен МЦС, то вектор скорости этой точки направлен перпендикулярно к отрезку, соединяющему точку с МЦС, в сторону угловой скорости фигуры, а численно этот вектор равен: $V_B = \omega \cdot BS$, где S - МЦС тела. Тогда при решении задач на основании этого соотношения используют свойства точек плоской фигуры: отношение скоростей точек фигуры прямо пропорционально расстоянию от этих точек до МЦС - $\frac{V_A}{V_B} = \frac{AS}{BS}$.

Существует четыре способа определения МЦС:

1 способ. Известно направление и модуль одной скорости точки и направление другой (рис. 2.2). Чтобы определить МЦС нужно провести перпендикуляры к направлениям скоростей. Точка S их пересечения и есть МЦС.

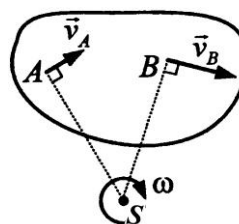


Рис. 2.2

2 способ. Скорости точек известны V_A и V_B , параллельны, а направление скоростей перпендикулярно отрезку AB . Чтобы определить МЦС нужно соединить начало скоростей точек A и B и соединить концы скоростей. Точка

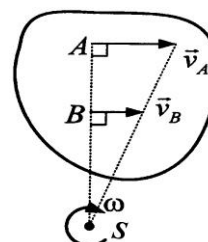


Рис. 2.3

пересечения S есть МЦС. Возможны варианты: скорости направлены в одну сторону (рис. 2.3); скорости направлены в разные стороны (рис. 2.4).

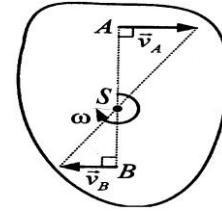


Рис. 2.4

В этих случаях: $\omega = \frac{V_A}{AS}$, $V_B = \omega \cdot BS$.

Если скорости равны между собой $V_A = V_B$, а их направление параллельное, то перпендикуляры тоже параллельны между собой, значит, в движении отсутствует вращательная составляющая плоского движения, т. е. плоское движение переходит в поступательное движение (рис. 2.5).

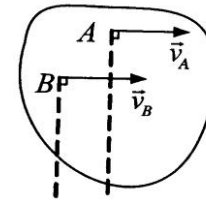


Рис. 2.5

3 способ: через общую точку соприкасающихся тел, одно из которых неподвижно (рис. 2.6). Точка P соприкосновения тел является МЦС.

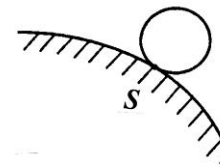


Рис. 2.6

Ускорение точки плоской фигуры можно определить через теорему об ускорении точек плоской фигуры: ускорение точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и вращательного ускорения точки вокруг полюса $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^n$.

3. Динамика

3.1. Основные понятия и законы

Динамикой называют раздел механики, в котором изучается движение материальных тел в зависимости от действующих на них сил.

Система отсчета. При многих технических расчетах можно принимать за неподвижную всякую, неизменно связанную с Землей. Систему отсчета, по отношению к которой всякая материальная частица под действием взаимно уравновешенных сил совершает прямолинейное и равномерное движение, называют инерционной системой отсчета.

Основные законы динамики.

1. *Закон инерции.* Материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действие других тел не изменит это состояние.

2. *Закон пропорциональности силы и ускорения.* Ускорение ($\bar{a}$) материальной точки массой m пропорционально приложенной к ней силе ($\bar{P}$) и имеет одинаковое с ней направление: $m\bar{a} = \bar{P}$.

3. *Закон равенства действия и противодействия.* Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

4. *Закон независимости действия сил.* Несколько одновременно действующих на материальную точку сил сообщают точке такое ускорение, какое сообщила бы ей одна сила, равная их геометрической сумме: $m\bar{a} = \sum \bar{P}_i$.

Масса. Массой материальной частицы (тела) называют меру ее инертности, численно выражающуюся, отношением модуля силы, действующей на частицу (тело), и вызванного ею ускорения. Масса материальной точки (тела) (m) численно равна отношению ее веса (G) к ускорению свободного падения (g): $m = G/g$.

Система механических единиц. Существует две системы механических единиц: *техническая* (МКГСС), в которой основными единицами являются метр (м), килограмм силы (кГ) и секунда (с). Единицей измерения массы в этой системе будет $1 \text{ кГ} \cdot \text{с}^2/\text{м}$, т. е. масса, которой сила в 1 кГ сообщает ускорение $1 \text{ м}/\text{с}^2$ и *физическая* (Международная система единиц СИ), в которой основными единицами измерения механических величин являются метр (м), килограмм массы (кг) и секунда (с). Единица измерения силы - производная единица - 1 ньютон (Н). 1 Н - это сила, сообщающая массе в 1 кг ускорение $1 \text{ м}/\text{с}^2$ ($1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$). Соотношение между единицами силы в системах СИ и МКГСС:
 $1 \text{ кГ} = 9,81 \text{ Н}$ или $1 \text{ Н} = 0,102 \text{ кГ}$.

Классификация сил. Силы, действующие в материальной системе, подразделяют на внешние (F^e) и внутренние (F^j) или активные и реакции связей. Кроме того при решении задач динамики рассматривают следующие постоянные или переменные силы:

- *сила тяжести*. Это постоянная сила G , действующая на любое тело, находящееся вблизи земной поверхности. Модуль силы тяжести равен весу тела. Под действием силы G любое тело при свободном падении на Землю (с небольшой высоты и в безвоздушном пространстве) имеет одно и то же ускорение g , называемое ускорением свободного падения, а иногда ускорением силы тяжести. Значение g в разных местах земной поверхности различно; оно зависит от географической широты места и высоты его над уровнем моря. На уровне моря $g = 9,8156 \text{ м/с}^2$. Из второго уравнения динамики следует, что $G = mg$ или $m = G/g$.

- *сила трения*. Так называется сила трения скольжения, действующая (при отсутствии жидкой смазки) на движущееся тело. Ее модуль определяется равенством $F = fN$, где f - коэффициент трения, который считают постоянным; N - нормальная реакция.

- *сила упругости*. Эта сила зависит от положения тела. В частности, для силы упругости пружины $P = c \cdot \lambda$, где λ - удлинение (или сжатие) пружины; c - коэффициент жесткости пружины (в системе СИ измеряется в Н/м).

- *сила вязкого трения*. Такая сила, зависящая от скорости, действует на тело при его медленном движении в очень вязкой среде (или при наличии жидкой смазки) и может быть выражена равенством $R = \mu \cdot V$, где V - скорость тела; μ - коэффициент сопротивления.

- *сила инерции*. Такой силой называют геометрическую сумму сил противодействия движущейся материальной частицы телам, сообщаящим ей ускорение, т. е. $\bar{\Phi} = -m\bar{a}$.

3.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

В зависимости от способов задания движения точки, дифференциальные уравнения могут быть:

– в векторной форме:

$$m\bar{a} = \bar{P} = m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = m \frac{d\bar{V}}{dt}.$$

– в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$m\ddot{x} = m \frac{d\dot{x}}{dt} = P_x; \quad m\ddot{y} = m \frac{d\dot{y}}{dt} = P_y; \quad m\ddot{z} = m \frac{d\dot{z}}{dt} = P_z.$$

– в проекциях на естественные оси координат:

$$ma_n = m \frac{V^2}{\rho} = P_n,$$

$$ma_\tau = m \frac{d^2s}{dt^2} = m \frac{dV}{dt} = P_\tau.$$

Дифференциальные уравнения движения *несвободной точки* в векторной форме:

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{N};$$

в координатной форме:

$$m\ddot{x} = P_x + N_x; \quad m\ddot{y} = P_y + N_y; \quad m\ddot{z} = P_z + N_z,$$

где N – равнодействующая реакций связей.

Дифференциальные уравнения *относительного движения* точки в векторной форме:

$$m\bar{a}_r = \bar{P} - m\bar{a}_e - m\bar{a}_c,$$

где a_e – ускорение переносного движения; a_r – относительное ускорение; a_c – ускорение Кориолиса.

Две основные задачи динамики точки.

Первая задача – зная массу точки и уравнения ее движения, найти равнодействующую приложенных к точке сил. Если известен закон движения точки в векторной форме $\bar{r} = \bar{r}(t)$, тогда $\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$. Из основного уравнения динамики определяем силу $\bar{P} = m\bar{a}$.

Вторая задача – зная приложенные к точке силы, а также ее массу m , начальные положения и скорость, определить закон движения точки. Общий ход решения: составляют дифференциальные уравнения движения, дважды интегрируют, определяют постоянные интегрирования из начальных условий и получают закон движения точки.

3.3. Геометрия масс

Центр масс механической системы. Центр масс системы точек в векторной форме определяется как

$$\bar{r}_C = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{m},$$

в координатной форме:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m}; \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m}; \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m},$$

где $m = \sum m_i$ – масса системы; x_i, y_i, z_i – координаты масс m_i .

Моменты инерции характеризуют распределение масс в телах при их вращательном движении. Выделяют осевые, полярные и центробежные моменты инерции. Более наглядно их можно представить для плоских фигур в системе координат xOy , рис. 3.2:

Осевые моменты инерции:

$$J_x = \sum m_i y_i^2; \quad J_y = \sum m_i x_i^2.$$

Полярный момент инерции:

$$J_O = \sum m_i \bar{r}_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \text{ или } J_O = J_x + J_y.$$

Центробежный момент инерции:

$$J_{xy} = \sum m_i x_i y_i.$$

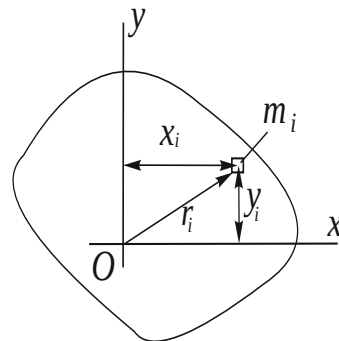


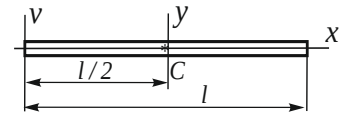
Рис. 3.2

Если центробежные моменты инерции равны нулю, то оси этой системы координат называют главными осями инерции. Если ось проходит через центр масс, то ось называется центральной.

Моменты инерции простейших тонких однородных тел

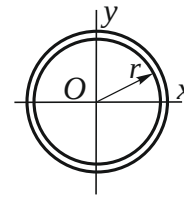
Стержень массой m :

$$J_v = \frac{ml^2}{3}; \quad J_{yC} = \frac{ml^2}{12}.$$



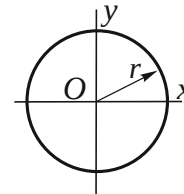
Тонкое кольцо (обруч) массой m :

$$J_o = mr^2; \quad J_x = J_y = \frac{mr^2}{2}.$$



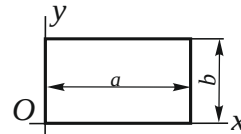
Круглый диск массой m :

$$J_o = \frac{mr^2}{2}; \quad J_x = J_y = \frac{mr^2}{4}.$$



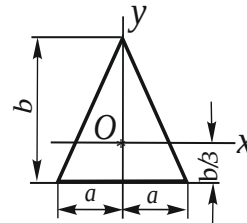
Прямоугольная пластина:

$$J_x = \frac{mb^2}{3}; \quad J_y = \frac{ma^2}{3}.$$



Треугольник:

$$J_x = \frac{mb^2}{18}; \quad J_y = \frac{ma^2}{6}.$$



3.4. Общие теоремы динамики точки и системы

Количество движения точки и системы. Мерой движения материальной точки или механической системы является количество движения. Для точки это вектор, равный произведению массы точки m на вектор ее скорости: $\bar{K} = m\bar{V}$, для механической системы: $\bar{K} = \sum m_i \bar{V}_i$ или через центр масс: $\bar{K} = m\bar{V}_C$, где m – масса механической системы, $\bar{V}_C$ – скорость центра масс.

В проекциях на оси декартовой системы координат эту меру движения можно представить как: $\bar{K} = K_x \bar{i} + K_y \bar{j} + K_z \bar{k}$, где $K_x = m\dot{x}$, $K_y = m\dot{y}$, $K_z = m\dot{z}$.

Импульс силы есть мера ее действия во времени и характеризует передачу материальной точки механического движения со стороны действующих на нее тел за данный промежуток времени. Определяется как вектор, равный

произведению силы на время: для постоянной силы - $\bar{S} = \bar{P}t$, для переменной силы за промежуток времени t_1-t_2 - $\bar{S} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{P} dt$.

Количество движения и импульс силы измеряются в одинаковых единицах, связь между ними устанавливают две теоремы.

Теорема об изменении количества движения материальной точки: изменение количества движения материальной точки за какой-либо промежуток времени (например, от t_1 до t_2) равно импульсу силы, действующей на точку за тот же промежуток времени: $m\bar{V}_2 - m\bar{V}_1 = \bar{S}$, или в проекциях, например, на ось x : $m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 = S_x$.

Теорема об изменении количества движения механической системы: изменение количества движения механической системы ($\bar{K} = \sum m_i \bar{V}_i$) за какой-либо промежуток времени (например, от t_1 до t_2) равно геометрической сумме импульсов внешних сил ($\bar{S}_i^e$), приложенных к системе за тот же промежуток времени: $\bar{K}_2 - \bar{K}_1 = \sum \bar{S}_i^e$. Аналогично предыдущей теореме, эту зависимость можно представить в проекциях.

Следствия из теоремы. Если векторная сумма всех внешних сил (главный вектор) за рассматриваемый промежуток времени равна нулю, то количество движения механической системы постоянно. Подобное заключение справедливо и для проекций на неподвижную ось.

Теорема о движении центра масс. Центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и к которой приложены все внешние силы: $m\ddot{x}_C = \sum P_{xi}^e$; $m\ddot{y}_C = \sum P_{yi}^e$; $m\ddot{z}_C = \sum P_{zi}^e$. В векторной форме: $m\bar{a}_C = \sum \bar{P}_i$.

Следствия из этой теоремы. Если векторная сумма внешних сил все время равна нулю, то центр масс механической системы находится в покое или движется прямолинейно и равномерно. Аналогично и для проекций сил и центра масс на какую-либо неподвижную ось.

Момент количества движения. Это динамическая характеристика механического движения, учитывающая положение материальной точки по

отношению к данному центру и выражается векторным произведением радиуса-вектора и количества движения материальной точки: $\bar{L}_O = \bar{r} \times m\bar{V}$, а модуль вектора $\bar{L}_O$ равен произведению величины mV на плечо h вектора $m\bar{V}$ относительно центра O : $L_O = mVh$ или в координатной форме $L_O = m(y\dot{x} - x\dot{y})$. Момент количества движения относительно оси z равен произведению проекции вектора $m\bar{V}$ на плоскость, перпендикулярную оси z , на плечо h_i этой проекции до оси: $L_z = mV_i h_i$.

Теорема об изменении момента количества движения материальной точки. Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно некоторого неподвижного центра равна геометрической сумме моментов сил, действующих сил, относительно того же центра, т.е. $\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{M}_O$.

Кинетический момент механической системы относительно центра и оси. Кинетическим моментом (или главным моментом количества движения механической системы относительно центра, например точки O) называют вектор, равный геометрической сумме моментов количества движения всех материальных точек системы относительно этого центра: $\bar{L}_O = \sum \bar{L}_{iO} = \sum \bar{r}_i \times m_i \bar{V}_i$, а относительно оси – берется алгебраическая сумма: $L_z = \sum L_{iz}$.

Теорема об изменении кинетического момента механической системы. Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторого неподвижного центра геометрически равна главному моменту внешних сил $\bar{M}_O^e$, действующих на эту систему, относительно того же центра, т.е. $\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \sum \bar{M}_{iO}^e = \bar{M}_O^e$, или в проекциях на оси координат:

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum M_{ix}^e = M_x^e; \quad \frac{dL_y}{dt} = \sum M_{iy}^e = M_y^e; \quad \frac{dL_z}{dt} = \sum M_{iz}^e = M_z^e.$$

Следствие из теоремы. Если главный момент внешних сил относительно некоторого неподвижного центра остается все время равным нулю, то кинетический момент механической системы относительно этого центра остается постоянным.

Две меры механического движения. В динамике рассматриваются две формы преобразования механического движения материальной точки или системы точек:

1) Механическое движение переносится с одной механической системы на другую в качестве механического движения. В этом случае мерой механического движения является вектор количества движения точки $\vec{K} = m\vec{V}$ или механической системы $\vec{K} = m\vec{V}_C$, а мерой действия силы выступает импульс силы $\vec{S}$.

2) Механическое движение превращается в другую форму движения материи (в форму потенциальной энергии, теплоты, электричества т. д.). Здесь мерой движения выступает кинетическая энергия, а мерой действия силы является работа силы.

Кинетическая энергия точки и системы. Кинетической энергией материальной точки называют половину произведения массы m точки на квадрат ее скорости V : $T = \frac{mV^2}{2}$. Кинетической энергией системы называют сумму

кинетических энергий всех точек механической системы, т. е. $T = \sum T_i = \sum \frac{m_i V_i^2}{2}$.

При поступательном движении тела (рис. 3.3)

скорости всех точек одинаковые, $V_i = V$, поэтому

$$T = \sum \frac{m_i V_i^2}{2} = \frac{V^2}{2} \sum m_i = \frac{mV^2}{2}, \text{ где } m - \text{масса тела.}$$



Рис.3.3

При вращении тела вокруг неподвижной оси

скорость какой-либо точки тела можно выразить как $V_i = \omega r_i$, где r_i – кратчайшее расстояние от точки до оси вращения; ω – угловая скорость тела (рис. 3.4).

Тогда кинетическая энергия тела:

$$T = \sum \frac{m_i V_i^2}{2} = \sum \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2 = \frac{J_C \omega^2}{2},$$

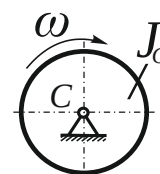


Рис.3.4

где $J_C = \sum m_i r_i^2$ – момент инерции тела относительно центра вращения точки C .

При плоском движении тела (рис.3.5):

$T = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{J_{zC}\omega^2}{2}$, где V_C – скорость центра масс; J_{zC} – момент инерции тела относительно центральной оси z , проходящей через центр масс.

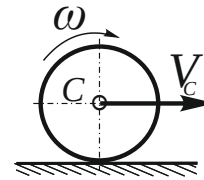


Рис. 3.5

Работа силы. Работу постоянной силы при прямолинейном движении выражают произведением модуля силы на величину перемещения материальной частицы s и на косинус угла между направлением силы и перемещением: $A = Ps \cos \alpha$. Единица работы джоуль (Дж=Н·м).

Работа силы F (рис. 3.6): $A_F = Fs \cos \alpha$,

(F - движущая сила);

Работа силы Q : $A_Q = -Qs \cos \beta$ - (Q - сила сопротивления);

Работа силы N : $A_N = 0$, так как $\alpha = 90^\circ$.

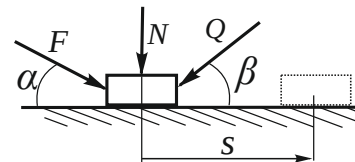


Рис. 3.6

Элементарная работа силы. Если сила переменная, например $P = f(s)$, или движение криволинейное, то вводят понятие элементарной работы: $dA = \bar{P} d\bar{r} = P ds \cos(\bar{P}, \bar{V}) = \bar{P} \bar{V} dt$. Элементарная работа связана с проекциями силы на оси координат как $dA = Xdx + Ydy + Zdz$. Работа на конечном пути от s_1 до s_2 равна сумме элементарных работ $A = \int_{s_1}^{s_2} P \cos(\bar{P}, \bar{V}) \cdot ds = \int_s P_\tau dt$.

Работа силы, приложенной к вращающемуся телу. Элементарная работа силы, приложенной к телу, закрепленному на неподвижной оси, равна произведению момента силы относительно оси вращения на бесконечно малый угол поворота: $dA = Md\varphi$. Работа силы, действующей на тело при его повороте на угол от φ_1 до φ_2 : $A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} Md\varphi$. При $M = \text{const}$: $A = M\varphi$, (угол в радианах).

Работа силы тяжести. Эта работа не зависит от вида траектории центра тяжести, а зависит от изменения его положения по высоте и равна произведению веса тела G на изменение высоты центра тяжести h : $A_G = \pm Gh$.

Работа силы упругости. Работа упругой силы равна половине произведения коэффициента жесткости c на квадрат деформации λ : $A = \frac{c\lambda^2}{2}$.

Работа внутренних сил на любом перемещении тела равна нулю.

Мощность силы. Изменение работы силы, отнесенное к единице времени, называют мощностью силы: $N = \frac{dA}{dt} = \frac{\bar{P}d\bar{r}}{dt} = \bar{P} \cdot \bar{V}$. Если направление силы $\bar{P}$ и скорости $\bar{V}$ совпадают, то $N = PV$. Для момента силы: $N = M\omega$.

За единицу мощности в системе СИ принимают 1 ватт (Вт) = 1 Дж/с = 0,102 кгс·м/с. В системе МКГСС за единицу мощности принимают 1 кгс·м/с. Кроме того, принимают следующие единицы мощности: 1 киловатт (кВт) = 10^3 Вт = 102 кгс·м/с = 1,36 лошадиной силы (л.с.); 1 лошадиная сила = 75 кгс·м/с = 736 Вт.

Сравнение структуры формул динамики для поступательного и вращательного движения твердого тела (табл. 3.1)

Таблица 3.1

Динамические меры	Виды движения	
	Поступательное	Вращательное
Уравнение движения	$P = ma$	$M = J\varepsilon$
Работа	$A = Ps$	$A = M\varphi$
Мощность	$N = PV$	$N = M\omega$
Кинетическая энергия	$T = \frac{mV^2}{2}$	$T = \frac{J\omega^2}{2}$

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки: изменение кинетической энергии материальной точки на некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на эту точку сил на этом же перемещении: $T - T_0 = A$ или $\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = \sum A_i$, где T и T_0 – кинетическая энергия в конце и начале пути; V_1 и V_2 – скорости точки в начале и конце перемещения.

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы:
изменение кинетической энергии механической системы на некотором перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на материальные точки системы на этом перемещении т.е.

$$\left(\sum \frac{m_i V_i^2}{2} \right)_2 - \left(\sum \frac{m_i V_i^2}{2} \right)_1 = \sum A_i^e + \sum A_i^j, \quad \text{где } \left(\sum \frac{m_i V_i^2}{2} \right)_1 - \text{кинетическая энергия}$$

системы в первом ее положении; $\left(\sum \frac{m_i V_i^2}{2} \right)_2$ – кинетическая энергия системы во

втором положении; $\sum A_i^e$ – работа внешних сил; $\sum A_i^j$ – работа внутренних сил.

Таким образом,

$$T_2 - T_1 = \sum A_i^e + \sum A_i^j.$$

Сумма работ внутренних сил твердого тела на любом перемещении равна нулю $\sum A_i^j = 0$, следовательно, для твердого тела последнее уравнение принимает вид $T_2 - T_1 = \sum A_i^e$.

3.5. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Выше показано, что для вращающейся точки вокруг оси z с угловой скоростью ω момент количества движения равен $L_{iz} = m_i V_i \cdot r_i = m_i r_i^2 \omega$, а кинетический момент L_z твердого тела относительно той же оси определяется как $L_z = \sum L_{iz} = \sum m_i r_i^2 \omega = \omega \sum m_i r_i^2 = \omega J_z = \dot{\phi} J_z$, где J_z – момент инерции этого тела относительно оси z . Так как $\frac{dL_z}{dt} = \sum M_{iz}^e = M_z^e$, тогда $\frac{d(J_z \dot{\phi})}{dt} = M_z^e$ или $J_z \ddot{\phi} = M_z^e$.

Здесь $M_z^e = \sum M_{iz}^e$ – главный момент внешних сил относительно оси z .

Уравнение $J_z \ddot{\phi} = M_z^e$ представляет собой дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Сравним это уравнение с дифференциальным уравнением поступательного движения твердого тела, например, вдоль оси x : $m\ddot{x} = X^e$. Очевидно, что момент инерции твердого тела при вращательном движении имеет то же значение, что и масса тела при его

поступательном движении: момент инерции является характеристикой инертности тела при вращательном движении.

По дифференциальному уравнению вращения тела можно решать следующие задачи:

1) по заданному уравнению вращения $\varphi = f(t)$ и его моменту инерции J_z определять главный момент внешних сил, действующих на тело;

2) по заданным внешним силам, приложенным к телу, по начальным условиям φ_0 и ω_0 и по моменту инерции тела J_z находить уравнение вращения тела $\varphi = f(t)$;

3) определять момент инерции тела J_z относительно оси вращения, зная величины M_z^e и $\ddot{\varphi}$.

3.6. Аналитическая механика

Классификация связей:

- *голономные* – это связи, при которых их уравнения могут быть записаны в виде, не содержащих производных от координат;
- в противном случае связи называют *неголономными*;
- если уравнение связи не содержит в явном виде время, то оно называется *стационарной*;
- в противном случае – *нестационарной*;
- связи, которые описываются с помощью уравнения, называются *удерживающими* (двухсторонними);
- связи, которые описываются с помощью неравенств, называются *неудерживающими* (односторонними).

Число независимых между собой вариаций координат точек (возможных перемещений) механической системы называется *числом степеней свободы* системы.

Обобщенные координаты механической системы – это независимые величины, заданием которых однозначно определяются положение всех точек

системы. Для голономных систем число независимых обобщенных координат (j) механической системы равно числу степеней свободы этой системы.

Принципы механики.

Принцип Даламбера для материальной точки: геометрическая сумма всех приложенных к точке сил $\bar{P}_i$ и силы инерции $\bar{\Phi}$ этой точки равны нулю, т. е. $\sum \bar{P}_i + \bar{\Phi} = 0$. Здесь уравнениям динамики по форме придается вид уравнений статики.

Принцип Даламбера для несвободной механической системы: в любой момент времени для всякой механической системы геометрическая сумма всех внешних сил, реакций связей и сил инерции равна нулю, т. е. $\sum \bar{P}_i + \sum \bar{R}_i + \sum \bar{\Phi}_i = 0$. Аналогично и для моментов, например, относительно оси z : $M_{iz}^{(e)} + M_{iz}^{(\phi)} + M_{iz}^{(R)} = 0$.

Принцип возможных перемещений: если механическая система находится в равновесии, то при любом возможном перемещении системы сумма работ всех активных сил равна нулю: $\sum \delta A_i^e = 0$. Здесь считаем, что связи механической системы идеальны, а под возможными перемещениями понимаем воображаемые бесконечно малые перемещения системы, допускаемые в данное мгновение наложенными связями без нарушения их.

Принцип возможных скоростей: для того чтобы механическая система находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы возможная мощность всех активных сил на любых возможных скоростях была равна нулю: $\sum \bar{P}_i \bar{V}_i = 0$.

Принцип Даламбера-Лагранжа (общее уравнение динамики): при движении механической системы сумма возможных работ активных сил и сил инерции на любых возможных перемещениях всегда равна нулю: $\sum (\bar{P}_i + \bar{\Phi}_i) \delta \bar{r}_i = 0$. Также при движении механической системы сумма возможных мощностей активных сил и сил инерции на любых возможных скоростях всегда равна нулю: $\sum (\bar{P}_i + \bar{\Phi}_i) \delta V_i = 0$, или в проекциях на координатные оси $\sum [(X_i + \Phi_{ix}) \delta x_i + (Y_i + \Phi_{iy}) \delta y_i + (Z_i + \Phi_{iz}) \delta z_i] = 0$.

Обобщенная сила Q_j , соответствующая обобщенной координате q_j – это скалярная величина, определяемая отношением элементарной работы действующих сил на перемещение механической системы, вызванном элементарным приращением координаты q_j , к величине этого приращения. Для системы с j числом степеней свободы получаем $Q_j = \sum \bar{P}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}$. Для системы с одной степенью свободы $Q = \delta A / \delta q$.

Уравнение Лагранжа второго рода: разность производной по времени от обобщенного импульса и частной производной от кинетической энергии системы по обобщенной координате равна обобщенной силе: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$.

Уравнение Лагранжа второго рода для консервативных механических систем: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$ или $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, где $L = T - \Pi$ – функция Лагранжа.