Дисциплина: Математика
Преподаватель: Мурзина Н.В.
Вид занятия: лекция
Группа: ГМУс-20

Указания к выполнению:

1. Изучить лекционный материал и сделать конпект.
2. Выпонить контрольную работу, которая находится в разделе Установочные материаы на сайте ЗабГУ по вариантам в отдельной тетради.
3. Решение загрузить в личный кабинет.

По всем вопросам отвечу на почте murzinanv@mail.ru.

Элементы линейной алгебры. Матрицы и определители.

Матрицей A размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из m строк и n столбцов, состоящая из чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Квадратной матрицей n*-го порядка* называется матрица размера $n \times n$.

Диагональной называется квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю.

Единичной называется диагональная матрица с единицами на главной диагонали.

Нулевой называется матрица, все элементы которой равны нулю.

Матрица A^T называется транспонированной к матрице А, если в матрице А столбцы заменены строками и наоборот.

<u>Операции над матрицами</u>.

1. Умножение матрицы на число.

Произведением матрицы A на число k является матрица kA, каждый элемент которой умножен на число k.

2. Сложение матриц.

Суммой матриц A и B, имеющих n строк и m столбцов, называется матрица $C=A+B$, элементы которой равны сумме соответствующих элементов этих матриц.

Пример: $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad k=3$

Найти: $kA+B$.

Решение.

$$kA+B=3\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 6 & 9 \\ -15 & 3 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 9 & 13 \\ -13 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Умножение матриц.

Произведение матрицы A на матрицу B определено только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. В результате умножения получим матрицу AB, у которой столько же строк, сколько их в матрице A, и столько же столбцов, сколько их в матрице B.

Умножение двух матриц A и B называется новая матрица C, элемент которой c_{ij}, стоящий в i-строке, j-столбце, равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Пример . Найти произведение матриц.

Решение. $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Типа (3x2) типа (2x4) = типа(3x4)

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}=$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} -3\cdot 3+2\cdot 5 & -3\cdot 1+2\cdot 1 & -3\cdot(-2)+2\cdot 0 & -3\cdot 4+2(-3) \\ 1\cdot 3+0\cdot 5 & 1\cdot 1+0\cdot 1 & 1\cdot(-2)+0\cdot 0 & 1\cdot 4+0\cdot(-3) \\ 2\cdot 3+(-4)\cdot 5 & 2\cdot 1+(-4)\cdot 1 & 2\cdot(-2)+(-4)\cdot 0 & 2\cdot 4+(-4)\cdot(-3) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & -18 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ -14 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

<u>Определители.</u>

Любой квадратной матрице *n*-го порядка можно поставить в соответствие выражение, которое называется *определителем* (детерминантом) матрицы A, и обозначается так:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ или } |A| \text{ или } det(A)$$

Определитель второго порядка задается равенством:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Элементы a_{11}, a_{22} образуют (или лежат) главную диагональ, a_{12}, a_{21} - побочную диагональ. Таким образом, определитель второго порядка равен разности между произведениями элементов, лежащих на главной и побочной диагоналях.

<u>Определитель третьего порядка.</u>

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} -$$

$$- a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

<u>Свойства определителей.</u>

1. Величина определителя не изменится, если все его строки заменить столбцами с теми же номерами.

2. Перестановка двух строк или двух столбцов определителя равносильно умножению его на минус единицу.

3. Умножение всех элементов одной строки или одного столбца на любое число *k* равносильно умножению определителя на это число *k*.

4. Если определитель имеет два одинаковых столбца или одинаковые строки, то он равен нулю.

5. Если все элементы некоторого столбца или некоторой строки равны нулю, то определитель равен нулю.

6. Если соответствующие элементы двух столбцов или двух строк определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

7. Если к элементам некоторого столбца (или некоторой строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (или строки), умноженные на любой общий множитель, то величина определителя при этом не изменится.

Системы линейных уравнений с n неизвестными

Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера.

Дана система линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Правило Крамера относится только к решению квадратных систем, т.е. когда число уравнений совпадает с числом неизвестных.

Решением системы называется совокупность n чисел $\overline{X_1};\overline{X_2};\ldots;\overline{X_n}$, которые будучи подставлены вместо неизвестных в уравнения, обращают эти уравнения в тождества.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Если же система не имеет ни одного решения, то она называется *не совместной*.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет только одно решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Правило Крамера заключается в следующем:

Составляем определитель из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ Если определитель $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение.

Решение системы находим следующим образом:

$x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta}; x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta}; \dots; x_n = \dfrac{\Delta x_n}{\Delta}$ или в общем виде $x_i = \dfrac{\Delta x_i}{\Delta}$ где $i = 1, 2, \dots, n$.

Определитель Δx_i получаем из основного определителя Δ заменой i – го столбца на столбец свободных коэффициентов.

Например: $$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Если определитель $\Delta = 0$, то система является либо несовместной (когда $\Delta x_i \neq 0$), либо неопределенной (когда $\Delta x_i = 0$).

Пример. Решить систему: $$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 4x + 3y - 2z = 4 \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14 \quad \Delta x = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14 \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 28$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 42$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{14}{14} = 1; y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2; z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3$$

Ответ: (1; 2; 3)

<u>Системы линейных уравнений в матричной форме.</u>

Рассмотрим систему линейных неоднородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Данную систему уравнений можно записать в матричной форме:

$$A \cdot X = B, \text{ где } \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Матрицей обратной квадратичной матрице А называется матрица, обозначаемая A^{-1}, такая что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$ где A_{ij} - алгебраические дополнения элементов a_{ij} в матрице.

Если $det(A)$ не равен нулю, то система совместна и определена, ее решение задается формулой: $X = A^{-1} \cdot B$

Пример. Найти решение системы матричным методом:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$$

Решение. $det\,(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33 \neq 0$

Найдем $A^{-1} = \dfrac{1}{33} \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix}$

Искомая матрица: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} 33 \\ 33 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Следовательно, $x=1, y=1, z=1$ – решение системы.

<u>Метод Гаусса</u>.

Пример. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_3 = 16 \end{cases}$$

Решение. Составляем матрицу их коэффициентов системы (матрица A) и дополняем ее столбцом свободных членов (расширенная матрица B). Приводим матрицу к ступенчатому виду используя элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Выписываем решение системы:

$$x_2 = 4 + 2x_3; x_1 + x_2 - x_3 = -4; x_1 = -x_2 + x_3 - 4 = -4 - 2x_3 + x_3 - 4 = -x_3 - 8$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - 8 \\ x_2 = 2x_3 + 4 \end{cases}$$

Выражая базисные переменные через все остальные (их называют свободными переменными), получим общее решение системы.

Давая свободным переменным произвольные значения, получаем множество частных решений, например:

$$\begin{cases} x_3 = 3 \\ x_2 = 10 \\ x_1 = -11 \end{cases}$$

Частное решение, в котором все свободные переменные равны нулю, называют базисным решением:

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 4 \\ x_1 = -8 \end{cases}$$

Введение в математический анализ. Функции одной переменной.

Если некоторому числу x из множества X поставлено в соответствие согласно некоторому правилу f единственное число $y = f(x)$, то говорят, что на множестве X задана функциональная зависимость или функция. При этом величину y называют зависимой переменной, а величину x - независимой переменной или аргументом. Множество X, для которых определяются значения функции называют областью определения функции и обозначают $D(f)=X$, а множество чисел $y = f(x)$ объединяют в множество Y и называют множеством значений функции. Это множество обозначают $E(f)=Y$.

Функциональная зависимость считается заданной, если известно правило для определения значения функции, соответствующего данному значению аргумента. Такое правило может быть представлено различными способами, важнейшими являются:

1) Аналитический с помощью формулы, например, $y = x^3, y = \cos x$;

2) Графический – задан график;

3) Табличный – заданы таблицы (таблицы логарифмов, квадратных корней и так далее).

Функция называется *возрастающей*, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Соответственно для убывающей – большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Возрастающие и убывающие функции называются монотонными.

Функция $f(x)$ называется *четной*, если для всех допустимых значений x выполняется $f(-x) = f(x)$, а если выполняется правило $f(-x) = -f(x)$, то $f(x)$ называется *нечетной*. Если ни одно из этих двух соотношений не имеет место, то функция называется функцией общего вида.

График четной функции симметричен относительно оси Oy, нечетной относительно начала координат.

Функция $f(x)$ называется *периодической* с периодом T, если для любого x справедливо равенство: $f(x+T) = f(x)$.

Классификация функций.

Функции, заданные аналитически, подразделяются на два класса: алгебраические и трансцендентные. Алгебраическими называются функции, значения которых получаются в результате выполнения над значениями аргумента конечного числа алгебраических действий (сложения, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня). Функция, не являющаяся алгебраической, называется трансцендентной.

Основные элементарные функции.

1. Степенная функция: $y = x^{\alpha}, \alpha$ – действительное число.

2. Показательная функция $y = a^x$,

$a > 0, a \neq 1, D(y) = \{x \in R\}, \quad E(y) = \{y > 0\}$

3. Логарифмическая функция $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1, D(y)\{x > 0\}$ $E(y) = \{y \in R\}$

4. Тригонометрические функции: $y = \sin x, y = \cos x, y = tgx$, $y = ctgx$

5. Обратные тригонометрические функции: $y = arcsinx$, $y = arccosx, y = arctgx,\ y = arcctgx$.

Предел функции в точке.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 кроме, быть может, самой точки x_0.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x таких, что $|x - x_0| < \delta\ x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Кроме предела, связанного с произвольным стремлением аргумента x к x_0, рассматривают так называемые односторонние пределы функции (пределы слева и справа).

Предел $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$=$C'$ называется *пределом функции* $f(x)$при x, стремящемся к x_0 *слева*, а предел $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$=$C''$ - пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к x_0 *справа*.

Основные теоремы о пределах.

Теорема 1: предел алгебраической суммы конечного числа переменных равен алгебраической сумме пределов этих переменных.

$$\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x);$$

Теорема 2: предел произведения конечного числа переменных равен произведению пределов этих переменных.

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)\,;$$

Теорема 3: предел частного двух переменных равен частному этих переменных, если предел знаменателя отличен от нуля.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

Два замечательных предела.

В курсе математического анализа важное значение имеют два предела, нахождение которых выполняется специальными приемами.

1) *Первый замечательный предел:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Пример 13.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1$$

Пример 14.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-\sin x}{x+3\cos x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}\sin x}{1+\frac{3}{x}\cos x} = \frac{2-0}{1+0} = 2$$

(произведение бесконечно малой на ограниченную функцию есть бесконечно малая).

2) *Второй замечательный предел:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

$$\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{e^x}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot e^{x\cdot\frac{1}{x}} = e\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{e^x}\right)^{\frac{e^x}{x}\cdot\frac{1}{e^x}} = e\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{e^x}} =$$

$$= e\cdot e = e^2.$$

Бесконечно малые функции и их сравнения.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой в точке* x_0, если $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x\to x_0$. Бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *сравнимыми*, если существует хотя бы один из пределов: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ или $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – сравнимые бесконечно малые при $x\to x_0$, и пусть существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$, тогда:

1) если $c\neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка*. В частности, если $c=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* и пишут $\alpha(x)\approx\beta(x)$.

2) Если $c=0$, то $\alpha(x)$ называют *бесконечно малой более высокого порядка*, чем $\beta(x)$, и пишут $\alpha=0(\beta)$. Если существует действительное число $k>0$ такое, что $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}\neq 0$, то $\alpha(x)$ называют *бесконечно малой порядка k* относительно $\beta(x)$.

3) Если $c=\infty$, то это означает, что $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$. Тогда $\beta(x)$ называется *бесконечно малой высшего порядка* по сравнению с $\alpha(x)$, и пишут $\beta=0(\alpha)$.

Свойства бесконечно малых функций.

1) алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

2) Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

3) Произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть функция бесконечно малая.

При вычислении пределов можно заменять бесконечно малые величины их эквивалентами в произведении и в отношении, но не в алгебраической сумме, т.к. это может привести к ошибке.

Теорема 4. Предел отношения бесконечно малых величин не изменится, если одну из них (или обе) заменить эквивалентной бесконечно малой величиной.

Таблица эквивалентных бесконечно малых.

$\sin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$	$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$	$\log_a(1+\alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}$
$tg(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$	$\frac{\log_a(1+\alpha(x))}{\alpha(x)} \sim \frac{1}{\ln a}$
$\arcsin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$	$(1+\alpha(x))^n - 1 \sim \alpha(x) \cdot n$	$\frac{a^{\alpha(x)} - 1}{\alpha(x)} \sim \ln a$
$arctg(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$	$1 - \cos(\alpha(x)) \sim \frac{(\alpha(x))^2}{2}$	$(1+\alpha(x))^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}$
$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$	$\frac{(1+\alpha(x))^n - 1}{\alpha(x)} \sim n$	

При вычислении пределов функций часто приходится рассматривать различного вида неопределенности: главные неопределенности – $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$; второстепенные – $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0, 0^{∞}.

1. *Неопределенность вида* $0/0$. Рассмотрим несколько примеров, в которых встречаются неопределенности вида $0/0$.

Пример. Найти $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3x^2 - 7x + 2}{2x^2 - x - 6}$

Решение. Разложим числитель и знаменатель на простые множители:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-7x+2}{2x^2-x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-2)}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x-1}{2x+3}=\frac{3\cdot 2-1}{2\cdot 2+3}=\frac{5}{7}$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{5x-4}-\sqrt{3x}}$.

Решение. Для нахождения предела устраним иррациональные разности в числителе и знаменателе.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{5x-4}-\sqrt{3x}}=\lim_{x\to 2}\quad\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{5x-4}-\sqrt{3x}}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}}{\sqrt{5x-4}+\sqrt{3x}}\cdot\frac{\sqrt{5x-4}+\sqrt{3x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)\cdot\left(\sqrt{5x-4}+\sqrt{3x}\right)}{(2x-4)\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)\cdot\left(\sqrt{5x-4}+\sqrt{3x}\right)}{2(x-2)\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}\right)}=\frac{-\left(\sqrt{6}+\sqrt{6}\right)}{2\cdot(2+2)}=-\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Пример 18. Найти: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{tg^2x-\sin^2 x}$

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{tg^2x-\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{(tgx+\sin x)tgx(1-\cos x)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(tgx+\sin x)tgx}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{(x+x)x}=\frac{1}{4}$$

2. *Неопределенность вида* ∞/∞.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень x, т.е. на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+2/x+3/x^2+4/x^3}{4+3/x+2/x^2+1/x^3}=\frac{1}{4},$$

так как при $x\to\infty$ каждая из дробей $2/x$, $3/x^2$, $4/x^3$, $3/x$, $2/x^2$ и $1/x^3$ стремится к нулю.

3. *Неопределенность вида* $\infty-\infty$. Неопределенность этого вида можно привести к неопределенности вида ∞/∞ или $0/0$.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{2}{x(1+e^{x})}\right]$.

Решение. Приведем дроби к общему знаменателю, имеем неопределенность вида $0/0$, затем воспользуясь таблицей эквивалентности, получим:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{2}{x(1+e^{x})}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x(1+e^{x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x(1+1+x)}=\frac{1}{2}$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[4]{x^4+12x^3}-\sqrt[3]{x^3+3x^2}\right)$.

Решение. Вынесем общий множитель x за скобку, далее используя таблицу эквивалентности получим:

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[4]{x^4+12x^3}-\sqrt[3]{x^3+3x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(x\sqrt[4]{1+\frac{12}{x}}-x\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}x\left[1+\frac{3}{x}-\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{2}{x}=2.$$

4. *Неопределенность вида* $0\cdot\infty$. Неопределенность этого вида также приводится к неопределенности ∞/∞ или $0/0$.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)tgx$.

Решение. Сделаем замену $x-\frac{\pi}{2}=t$ $t\to 0$ при $x\to\frac{\pi}{2}$ и учитывая что $tg\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-ctgx=-\frac{1}{tgx}$ получим:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)tgx=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}t(-ctgt)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-t}{tgt}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-t}{t}=-1.$$

5. *Раскрытие неопределенности* 1^{∞}.

Пример. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^{x}$$

Решение. Делением числителя на знаменатель выделим целую часть:

$$\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}=1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}$$

Таким образом, при $x \to \infty$ данная функция представляет собой степень, основание которой стремится к единице, а показатель – к бесконечности (неопределенность вида 1^∞). Используя второй замечательный предел, имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right]^{\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\cdot x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(e)^{\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2-3x}{x^2-3x+7}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8-3/x}{1-3/x+7/x^2}}=e^8$$

Непрерывность функции.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если эта функция определена в некоторой окрестности точки x_0 и существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, равный $f(x_0)$.

Если при каком либо значении x_0 не выполняется указанные условия, то точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

Если функция непрерывна в каждой точке некоторого промежутка, то она непрерывна на этом промежутке.

Различают точки разрыва I и II рода. Точка x_0 называется *точкой разрыва I рода*, если для нее существуют конечные пределы

$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ причем не все три числа $f(x_0)$, $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ равны между собой.

Точки разрыва I рода подразделяются на точки *устранимого разрыва*, когда $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$, т.е. когда левый и правый пределы функции в точке x_0 равны между собой, но не равны значению функции в этой точке, и на точки *скачка*, когда $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, т.е. когда левый и правый пределы функции в точке различны x_0.

Точки разрыва не являющиеся точками разрыва I рода, называются *точками разрыва II рода.* В точках разрыва IIрода не существует хотя бы один из односторонних пределов.

Пример. Исследовать на непрерывность функцию $y=arctg\frac{1}{x-4}$

Решение. В точке $x=4$ функция не определена, значит в этой точке она имеет разрыв. Найдем односторонние пределы функции.

$\lim\limits_{x\to 4-0} arctg\frac{1}{x-4}=-\frac{\pi}{2}$ т.к. $\frac{1}{x-4}\to-\infty$

$\lim\limits_{x\to 4+0} arctg\frac{1}{x-4}=\frac{\pi}{2}$ т.к. $\frac{1}{x-4}\to+\infty$

При $x\to 4$ функция имеет как левый, так и правый конечный предел, причем эти пределы различны. Следовательно, $x=4$ является точкой разрыва I рода – точкой скачка.

Пример. Исследовать на непрерывность

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{при } x\le-\pi,\\ sinx & \text{при } -\pi<x<\dfrac{\pi}{2},\\ 1 & \text{при } x\ge\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

Решение. Функции $y=x, y=sin\,x$ и $y=1$ непрерывны на всей числовой прямой, поэтому данная функция может иметь разрывы только в точках, где меняется ее аналитическое выражение, т.е. в точках $x_1 = -\pi$ и $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Исследуем функцию на непрерывность в этих точках, для чего найдем соответствующие односторонние пределы и значения функции.

В точке $x_1 = -\pi$ имеем:

$$\lim_{x \to -\pi - 0} f(x) = \lim_{x \to -\pi - 0} x = -\pi,$$

$$\lim_{x \to -\pi + 0} f(x) = \lim_{x \to -\pi + 0} \sin x = \sin \pi = 0$$

$$f(-\pi) = -\pi.$$

Таким образом, в этой точке функция имеет разрыв I рода – скачок.

Для точки $x_2 = \frac{\pi}{2}$:

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to -\pi} \sin x = \sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\lim\limits_{x \to -\pi + 0} f(x) = \lim\limits_{x \to -\pi} 1 = 1$, а значение $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ не определено. Значит, точка $x_2 = \frac{\pi}{2}$ – точка устранимого разрыва.

Дифференцирование функций одной переменной

Производная функции в точке.

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в данной точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего произвольным образом к нулю и обозначается одним из символов y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Правила дифференцирования:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + uv'$;

3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad (v \neq 0)$.

Производная сложной функции.

Если задана функция $y = F(u)$, а u есть функция от x, т.е. $u = f(x)$, то функция $y = F(u) = F[f(x)]$ называется сложной функцией от аргумента x.

Пусть функция $u = f(x)$ имеет в точке x производную $f'(x)$, а функция $y = F(u)$ имеет в точке $u = f(x)$ производную $y'_u = F'_u(u)$. Тогда сложная функция $y = F(u)$ в точке x имеет производную, равную произведению производной данной функции по промежуточному аргументу u на производную промежуточного аргумента по x, т.е. если $y = F(u)$, $u = f(x)$, то $y'_x = F'_u \cdot u'_x$.

Таблица основных производных:

1. $c' = 0, c = const$	2. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$
3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, $a > 0$	4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u', a > 0$
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
7. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	8. $(ctgu)' = \frac{-1}{\sin^2 u} \cdot u'$
9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	10. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
11. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$	12. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Пример: Найти производную функции: $y = log_2(7x^2 + 5x)$.

Решение. Данная функция является сложной функцией. В соответствии с правилом дифференцирования сложной функции получаем:

$$y' = \frac{1}{(7x^2 + 5x)ln2} \cdot (7x^2 + 5x)' = \frac{1}{(7x^2 + 5x)ln2} \cdot (14x + 5)$$

Производные высших порядков.

Производной второго порядка функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной, т.е. $y'' = \left(f'(x)\right)' = f''(x)$.

Дифференцируя вторую производную, получаем производную третьего порядка, и т.д.

Пример: найти производную третьего порядка $y = ln\,(3x + 5)$

Решение .

$$y' = \frac{1}{3x + 5} \cdot (3x + 5)' = \frac{1}{3x + 5} \cdot 3 = \frac{3}{3x + 5}$$

$$y'' = \left(\frac{3}{3x+5}\right)' = 3 \cdot \left[(3x+5)^{-1}\right]' = 3 \cdot (-1)(3x+5)^{-2}$$

$$y'' = \left(\frac{3}{3x + 5}\right)' = 3 \cdot [(3x + 5)^{-1}]' = 3 \cdot (-1) \cdot (3x + 5)^{-2} \cdot 3 = \frac{-9}{(3x + 5)^2}$$

$$y''' = \left(\frac{-9}{(3x + 5)^2}\right)' = -9 \cdot (-2) \cdot \frac{1}{(3x + 5)^3} \cdot 3 = \frac{54}{(3x + 5)^3}$$

Производная функции, заданной неявно.

Функция называется неявной, если она задана уравнением $F(x, y) = 0$. Например: $y^2 - x + 3lny = 0$. Для нахождения производной функции, заданной неявно, нужно продифференцировать обе части уравнения $F(x,y)=0$ по x, считая что y есть функция от x, и найти y' из уравнения $\frac{d}{dx}F(x,y)=0$.

Пример: $y^2-x+3lny=0$.

Решение. Дифференцируя это уравнение по x, пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, т.е. $(y^2)=2y\cdot y',(lny)'=\frac{1}{y}\cdot y'$, получим: $2y\cdot y'-1+3\frac{1}{y}\cdot y'=0$;

$$y'=\frac{y}{2y^2+3}$$

<u>*Производная функции, заданной параметрически.*</u>

Пусть x и y заданы как функции некоторого параметра t: $x=x(t),\quad y=y(t)$. В этом случае функция $y=y(x)$ задана параметрически. Производная параметрически заданной функции первого порядка находится по формуле: $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$. Второго порядка:

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'}{x'_t}$$

Пример: Найти y_x' и y_{xx}'', если $\begin{cases} x=3\cos 2t \\ y=\sin t \end{cases}$

Решение. $x_t'=-6\sin 2t\quad y_t'=\cos t$

Подставим в формулу для первой производной:

$$y_x'=\frac{\cos t}{-6\sin 2t}=\frac{\cos t}{-6\cdot 2\sin t\cdot\cos t}=-\frac{1}{12\sin t}$$

Для второй производной:

$$y_{xx}''=\frac{\left(-\frac{1}{12\sin t}\right)'}{-6\sin 2t}=-\frac{-\frac{1}{12}\sin^{-2}t\cdot\cos t}{-6\sin 2t}$$

$$=\frac{\cos t}{72\sin^2 t\cdot 2\cdot\sin t\cdot\cos t}=-\frac{1}{144\sin^3 t}$$

Дифференциал функции.

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x, то в этой точке существует предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего произвольным образом к нулю, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$. Тогда можно записать $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$ или $\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$, где α - бесконечно малая при $\Delta x\to 0$. Таким образом, приращение функции Δy состоит из двух слагаемых, первое из которых называется дифференциалом функции и обозначается через dy или $df(x)$.

Выражение для дифференциала имеет вид: $dy=f'(x)\cdot dx$, где $dx=\Delta x$, отсюда следует, что: $f'(x)=\frac{dy}{dx}$, т.е. производная функции $y=f(x)$ в точке x равна отношению дифференциала функции в этой точки к дифференциалу независимой переменной x.

Свойства дифференциала функции.

Пусть функции $u=u(x)$, $v=v(x)$ дифференцируемы в некоторых промежутках, тогда справедливы формулы:

1. $d(C\,u(x))=C\cdot du(x)$ – постоянный множитель можно выносить за знак дифференциала.

2. $d(u\pm v)=du\pm dv$ – дифференциал алгебраической суммы равен алгебраической сумме дифференциалов.

3. $d(uv)=vdu+udv$

4. $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$.

Правило Лопиталя.

Терема 1: (теорема Коши). Если каждая из двух функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка, причём φ' нигде внутри отрезка не обращается в нуль, то внутри этого отрезка найдётся точка C такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(C)}{\varphi'(C)}$$

Теорема 2: (теорема Лопиталя). Пусть функция $f(x)$ и $\varphi(x)$ на отрезке $[a,b]$ удовлетворяет условиям Коши и $f(a)=\ \varphi(a)=0$. Тогда, если существует предел отношения $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x\to a$, то существует и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Замечание 1: теорема справедлива и в том случае, если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ не определены при $x=a$, но $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ или $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$.

Замечание 2: Если $f'(a)=\varphi'(a)=0$ и производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют тем же условиям, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$, и так далее.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to a}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-sinx}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-sinx}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-cosx}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{sinx}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{cosx} = 2$$

Пример 7. Найти $\lim_{x\to\infty}\frac{x+10}{2^x+3^x}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+10}{2^x+3^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^x ln2 + 3^x ln3} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Пример 8. Найти $\lim_{x\to 0} x\cdot lnx$

$$\lim_{x\to 0} x\cdot lnx = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{lnx}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} x = 0$$

Исследование функций с помощью производных.

Условия возрастания и убывания функции.

Теорема. Если дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ возрастает, то на этом отрезке её производная не отрицательна, т.е. $f'(x) \geq 0$. Если дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ убывает, то $f'(x) \leq 0$.

Функции, убывающие или возрастающие на отрезке $[a,b]$, называются *монотонными функциями* на отрезке $[a,b]$.

Необходимое и достаточное условия экстремума.

Значение $f(x_0)$ называется *локальным максимумом (локальным минимумом)* функции $y = f(x)$, если при любом достаточно малом δ выполняется условие $f(x_0) > f(x)\big(f(x_0) < f(x)\big)$ $\forall x \in (x_0 - \delta) \cup (x_0 + \delta)$. Точка x_0 называется *точкой максимума (минимума)* функции. Локальные максимумы и минимумы функции называются *экстремумами* функции, а точки максимума или минимума – *точками экстремума*.

Теорема (необходимое условие локального экстремума). Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум, то производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.

Точки, в которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими*. Экстремум в таких точках может быть, а может и не быть.

Теорема (первое достаточное условие экстремума). Пусть x_0 – критическая точка функции $y = f(x)$; если при переходе через точку x_0 слева направо производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет локальный максимум (локальный минимум); если же производная $f'(x)$ не меняет знак в δ – окрестности точки x_0, то данная функция не имеет в точке x_0 локального экстремума.

Теорема (второе достаточное условие экстремума). Пусть $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) \neq 0$, тогда функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, причем x_0 – точка локального максимума (минимума), если $f''(x_0) < 0$ $\quad (f''(x_0) > 0)$.

Схема исследования функции на экстремум.

1) Найти первую производную данной функции $f(x)$.

2) Найти точки, подозреваемые на экстремум, т.е. точки в которых $f'(x)$ либо равна нулю, либо не существует.

3) Исследовать знак производной слева и справа от каждой из критических точек, и решить является ли каждая из этих точек экстремальной или нет.

4) Вычислить значение функции в точках экстремума.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда на этом отрезке функция достигает своего наибольшего и наименьшего значений или в критических точках, или на концах этого отрезка.

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a, b]$ проводится по схеме:

1) Найти все критические точки;

2) Определить значения функции на концах отрезка, т.е. найти $f(a)$ и $f(b)$;

3) Из всех полученных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее значения функции.

Пример: Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 - 2x\sqrt{x} + x - 4$ на отрезке $[0, 4]$.

Решение. Находим экстремумы функции на отрезке $[0, 4]$:

$y' = 2x - 2\sqrt{x} - \sqrt{x} + 1 = 2x - 3\sqrt{x} + 1$

$$y' = 0 \quad 2x - 3\sqrt{x} + 1 = 0 \quad x_1 = 1 \quad x_2 = \frac{1}{4}$$

$$f(1) = -4, \; f\left(\frac{1}{4}\right) = -4$$

Следовательно, максимумов и минимумов на отрезке нет.

$f(a) = f(0) = -4 \quad f(b) = f(4) = 0$

Таким образом, функция на отрезке $[0, 4]$ имеет наибольшее значение: $f(4) = 0$ и наименьшее $f(0) = f\left(\frac{1}{4}\right) = f(1) = -4$.

Направление выпуклости графика функции, точки перегиба.

График функции $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) *выпуклость вверх (вниз)*, если на этом интервале график расположен не выше (не ниже) касательной к графику функции, проведенной в любой точке этого интервала.

Теорема (достаточное условие выпуклости вверх (вниз)). Если функция $y = f(x)$ в каждой точке интервала (a, b) имеет $f''(x) \leq 0$ $(f''(x) \geq 0)$, то график функции имеет на интервале (a, b) выпуклость вверх (вниз).

Если в точке $M\big(x_0, f(x_0)\big)$ графика функции $y = f(x)$ выпуклость вверх меняется на выпуклость вниз и наоборот, то точка $M\big(x_0, f(x_0)\big)$ называется *точкой перегиба*.

Теорема (необходимое условие точки перегиба). Если в точке $M\big(x_0, f(x_0)\big)$ график функции $y = f(x)$ имеет точку перегиба, а сама функция имеет непрерывную вторую производную, тогда $f''(x)$ в точке x_0 обращается в нуль, т.е. $f''(x_0) = 0$.

Точки графика функции, в которых вторая производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками II рода*.

Теорема (достаточное условие точки перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в окрестности точки x_0 и пусть в самой точке $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. Тогда, если в указанной окрестности $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0, график функции имеет перегиб в точке $M\big(x_0, f(x_0)\big)$.

Асимптоты.

Прямая линия L называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки $M(x; y)$, лежащей на кривой, до прямой стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат (т.е. при стремлении хотя бы одной из координат точки к бесконечности).

Существуют вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, то прямая $x=a$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y=f(x)$.

Если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$, то прямая $y=b$ является *горизонтальной асимптотой* графика функции $y=f(x)$.

Прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$, если существуют одновременно пределы:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\,,\quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

Схема исследования графиков функции $y=f(x)$.

1. Определить область существования функции.
2. Исследовать функцию на четность и нечетность.
3. Найти координаты точек пересечения графика функции с осями координат.
4. Исследовать функцию на непрерывность, определить характер точек разрыва функции, если они имеются; найти асимптоты кривой.
5. Найти интервалы возрастания и убывания функции и ее экстремумы.
6. Найти интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз; определить точки перегиба.
7. Построить график функции.

*Пример***.** Построить график функции $y=\dfrac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^2}$.

Решение.

1) Т.к. функция представляет собой рациональную дробь, то она определена и непрерывна на бесконечном интервале, кроме точки

$x = 0$, в которой обращается в нуль знаменатель, т.е. $D(y): x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2) Функция не является четной или нечетной:

$y(-x) = \frac{-2x^3 - 5x^2 - 14x - 6}{4x^2} \neq y(x)$ и $\neq -y(x)$

3) Точки пересечения с осями координат:

С осью Ox:

$y = 0$ при $2x^3 - 5x^2 + 14x - 6 = 0, 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 - 2x + 6) = 0$

$x = \frac{1}{2}$, т.е. точка пересечения $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

С осью Oy точек пересечения нет, т.к. $x = 0$ не входит в область определения.

4) Точка разрыва $x = 0$. Исследуем характер разрыва:

$$\lim_{x \to 0-} \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2} = \lim_{x \to 0+} \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2} = -\infty$$

Таким образом, разрыв бесконечный II рода.

Найдем асимптоты графика функции: $x = 0 -$ вертикальная асимптота; т.к. $\lim_{x \to 0-} \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2} = \lim_{x \to 0+} \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2} = -\infty$.

Рассмотрим: $k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^3} = \frac{1}{2}$

$b = \lim_{x \to \infty}(f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty}\left[\frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2} - \frac{x}{2}\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{-5x^2 + 14x - 6}{4x^2} = -\frac{5}{4}$

Таким образом, график функции имеет наклонную асимптоту:

$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$.

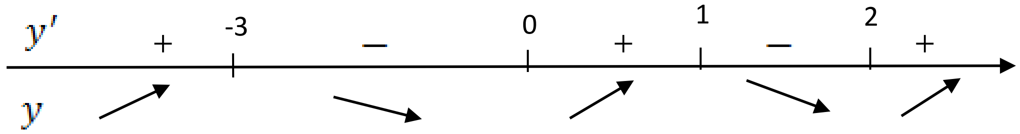
5) Вычислим первую производную и исследуем ее знаки:

$$y' = \frac{\left(2x^{3} - 5x^2 + 14x - 6\right)' \cdot \left(4x^2\right) - \left(2x^3 - 5x^2 + 14x - 6\right) \cdot \left(4x^2\right)'}{\left(4x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{x^3 - 7x + 6}{2x^3} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{2x^3}$$

Т.к. сама функция и первая производная не существуют при $x = 0$, получаем следующие области сохранения знака y':

$(-\infty, -3), (-3;\ 0), (0;\ 1), (1;\ 2), (2;\ +\infty)$

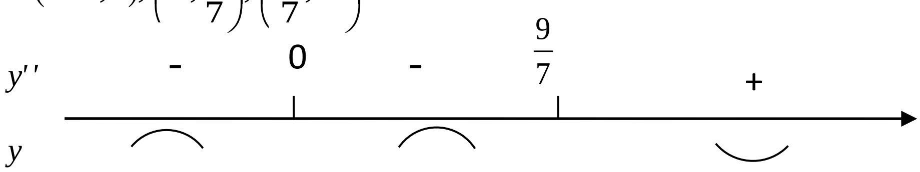


Следовательно: максимум при $x = -3$, причем $y(-3) = -\frac{49}{12}$; максимум при $x = 1$, причем $y(1) = \frac{5}{4}$; минимум при $x = 2$, причем $y(2) = \frac{9}{8}$.

Для нахождения выпуклости и вогнутости вычислим вторую производную и исследуем ее знаки:

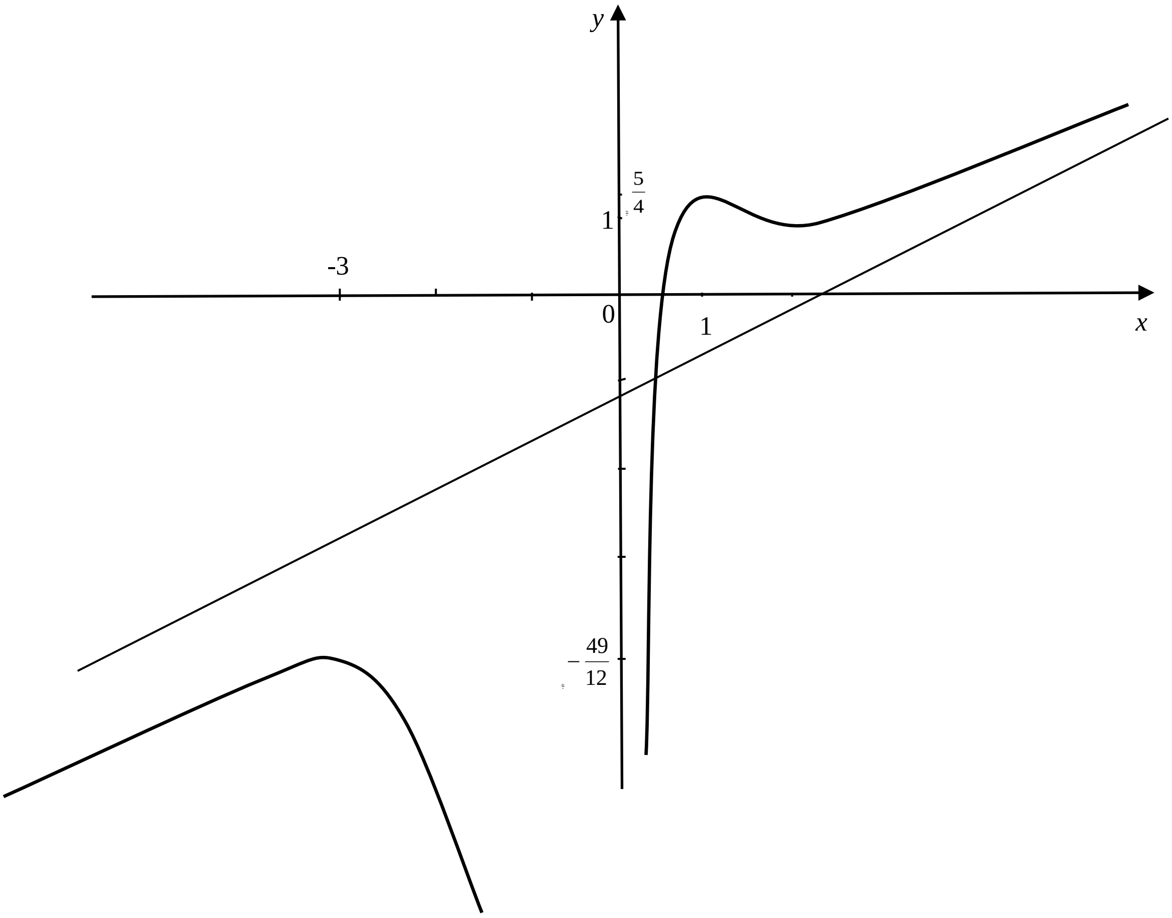
$$y'' = \frac{x^3\left(3x^2 - 7\right) - 3x^2\left(x^3 - 7x + 6\right)}{2x^6} = \frac{7x - 9}{x^4}.$$

Т.к. сама функция и ее производные не существуют в точке $x = 0$, то получаем следующие области сохранения знака второй производной $(-\infty, 0), \left(0, \frac{9}{7}\right), \left(\frac{9}{7}, \infty\right)$.



Следовательно, график имеет перегиб в точке $\left(\frac{9}{7}; \frac{913}{756}\right)$.

Строим график функции.



Интегральное исчисление.

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной от функции $f(x)$ на отрезке от $[a,\ b]$, если во всех точках этого отрезка выполняется равенство: $F'(x)=f(x)$.

Определение. Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то выражение $F(x)+C$ называется неопределённым интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Таким образом, по определению $\int f(x)dx=F(x)+C$, если $F'(x)=f(x)$; $f(x)$ – называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением. Процесс нахождения первообразной от данной функции $f(x)$ называется интегрированием.

Основные свойства неопределённого интеграла.

1. производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции, т.е. если $F'(x) = f(x)$, то $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

2. дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

3. неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

4. неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен сумме их интегралов:

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

5. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, если C – постоянная, то $\int C \cdot f(x)dx = C\int f(x)dx$.

Таблица интегралов.

1. $\int u^n dx = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$; $\int 1 \cdot du = u + C$ $\int 0 \cdot du = C$.

2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$.

3. $\int sin\, udu = -cos\, u + C$.

4. $\int cos\, udu = sin\, u + C$.

5. $\int \dfrac{du}{cos^2 u} = tgu + C$.

6. $\int \dfrac{du}{sin^2 u} = -ctgu + C$.

7. $\int tgudu = -ln|cos u| + C.$

8. $\int ctgudu = ln|sin u| + C.$

9. $\int a^u du = \frac{a^u}{ln a} + C$, $\int e^u du = e^u + C.$

10. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C.$

11. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C.$

12. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsin \frac{u}{a} + C.$

13. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$

Основные методы интегрирования.

Непосредственное интегрирование

Метод непосредственного интегрирования связан с привидением подынтегрального выражения к табличному виду путем элементарных преобразований и применения свойств неопределенного интеграла.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{x} + 2x^2 - 5x^3 + 7}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

Решение.

$$\int \frac{\sqrt{x} + 2x^2 - 5x^3 + 7}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx + \int \frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^2}} dx - \int \frac{5x^3}{\sqrt[3]{x^2}} dx + \int \frac{7}{\sqrt[3]{x^2}} dx =$$

$$\int x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}dx+2\int x^{2-\frac{2}{3}}dx-5\int x^{3-\frac{2}{3}}dx+7\int x^{-\frac{2}{3}}dx=$$

$$\int x^{-\frac{1}{6}}dx+2\int x^{\frac{4}{3}}dx-5\int x^{\frac{7}{3}}dx+7\int x^{-\frac{2}{3}}dx=$$

$$\frac{x^{\frac{5}{6}}}{5/6}+2\frac{x^{\frac{7}{3}}}{7/3}-5\frac{x^{\frac{10}{3}}}{10/3}+7\frac{x^{\frac{5}{3}}}{5/3}+C=$$

$$=\frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{6\sqrt[3]{x^7}}{7}-\frac{3\sqrt[3]{x^{10}}}{2}+\frac{21\sqrt[3]{x^5}}{5}+C$$

Пример. Найти интеграл $\int\frac{dx}{7x^2+9}$

Решение. Данный интеграл приведем к табличному интегралу, для чего коэффициент при x^2 вынесем за знак интеграла:

$$\int\frac{dx}{7x^2+9}=\frac{1}{7}\int\frac{dx}{x^2+(9/7)}=\frac{1}{7}\int\frac{dx}{x^2+\left(3/\sqrt{7}\right)}=\frac{1}{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}arctg\frac{\sqrt{7}x}{3}+C=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{7}}arctg\frac{\sqrt{7}x}{3}+C$$

Пример. Найти интеграл $\int\frac{x^4dx}{x^2+1}$

Решение. Так как подынтегральная функция представляет собой неправильную дробь, то выделим из неё целую часть, для этого используем правило деления многочлена на многочлен.

$$\int\frac{x^4dx}{x^2+1}=\int x^2-1+\frac{1}{x^2+1}dx=\int x^2-1dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{x^3}{3}-x+arctgx+C$$

Введение переменной под знак дифференциала

В основе метода введения переменной под знак дифференциала лежит одно из основных свойств неопределенного интеграла.

Пусть требуется вычислить $\int f(x)dx$. Предположим, что существует дифференцируемая функция $u=\varphi(x)$ и функция $g(u)$

такие, что подынтегральное выражение $f(x)dx$ может быть записано в виде:

$$f(x)dx = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = g(u)du$$

При этом выполняется соотношение:

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int g(u)du \text{, где } u = \varphi(x)$$

Поэтому вычисление $\int f(x)dx$ сводится к вычислению $\int g(u)du$, который может быть проще исходного.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx$

Решение. Здесь под знак дифференциала надо положить $arctgx$, т.к. $d(arctgx) = \frac{1}{1+x^2}dx$. Тогда

$$\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx = \int arctgx(arctgx) = \frac{arctg^2 x}{2} + C.$$

Пример. Найти интеграл $\int e^{-x^2}xdx$.

Решение. Для того чтобы вычислить этот инетграл, заметим, что $d(-x^2) = -2xdx$ или $xdx = -\frac{1}{2}d(-x^2)$. Поэтому

$$\int e^{-x^2}xdx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель на $\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2$ и, учитывая, что $\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2 \cdot \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2 = \left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\right]^2 =$
$= \left[x^2-\left(x^2-1\right)\right]^2 = 1$, получим:

$$\int \frac{dx}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2} = \int \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2 dx = \int x^2 - 2x\sqrt{x^2-1} + x^2 - 1dx =$$

$$= 2\int x^2 dx - 2\int x\sqrt{x^2-1}dx - \int dx = \frac{2}{3}x^3 - x - \int \left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}} d\left(x^2-1\right) =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - x - \frac{2}{3}\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

Метод подстановки (замена переменной в неопределенном интеграле)

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным. В подынтегральном выражении, в этом случае, нужно произвести замену переменной $x = \varphi(t)$, чтобы инетеграл стал табличным или сводился к ним проще, чем первоначальный. Функция $\varphi(t)$ должна быть непрерывной, иметь непрерывную производную и обратную функцию. Т.к. $dx = \varphi'(t)dt$, то $\int f(x)dx = \int \varphi(t)\cdot\varphi'(t)dt$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Чтобы избавиться от корней надо сделать замену $x = t^s$, где S – наименьшее общее кратное степени корней, т.е $x = t^6$. Тогда $dx = \left(t^6\right)' \cdot dt = \ = 6t^5 dt$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 - t^2} = 6\int \frac{t^3 dt}{t-1} = 6\int t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1}dt = 2t^3 + 3t^2 + 6t + 6ln\left|t-1\right| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right| + C.$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{10+x^2}}{x}dx$

Решение. Положим $10 + x^2 = t^2$, дифференцируя равенство, получим $2xdx = 2tdt$ или $xdx = tdt$. Тогда имеем: $\frac{dx}{x} = \frac{xdx}{x^2} = \frac{tdt}{t^2-10}$ и

$$\int \frac{\sqrt{10+x^2}}{x}dx = \int t \cdot \frac{tdt}{t^2-10} = \int \frac{t^2-10+10}{t^2-10}dt = \int dt + 10\int \frac{dt}{t^2-10} =$$

$$= t + \frac{10}{2\sqrt{10}} ln\left|\frac{t-\sqrt{10}}{t+\sqrt{10}}\right| + C = \sqrt{10+x^2} + \frac{\sqrt{10}}{2} ln\left|\frac{\sqrt{10+x^2}-\sqrt{10}}{\sqrt{10+x^2}+\sqrt{10}}\right| + C$$

Замечание. Если подынтегральная функция содержит радикалы $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, то часто удобны следующие подстановки.

1. Для случая $\sqrt{a^2-x^2}$:

$x = a \cdot sin t$, тогда $\sqrt{a^2-x^2} = a \cdot cos t$, $dx = a \cdot cos t \cdot dt$, $t = arcsin\frac{t}{a}$.

2. Для случая $\sqrt{a^2+x^2}$:

$x = a \cdot tgt$, тогда $\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2(1+tg^2 t)} = \frac{a}{cos t}$, $dx = \frac{a}{cos^2 t}dt$, $t = arctg\frac{x}{a}$.

3. Для случая $\sqrt{x^2-a^2}$:

$x = \frac{a}{cos t}$, тогда $\sqrt{x^2-a^2} = a \cdot tgt$, $dx = \frac{a \cdot sin t}{cos^2 t}dt$, $t = arccos\frac{a}{x}$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}}$.

Решение. Положим $x = 3sin t$, тогда $dx = 3cos tdt$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}} = \int \frac{3cos tdt}{\sqrt{(9-9sin^2 t)^3}} = \int \frac{3cos t}{\sqrt{3^6 cos^6 t}}dt = \frac{1}{9}\int \frac{dt}{cos^2 t} = \frac{tgt}{9} + C.$$

Так как $sin t = \frac{x}{3}$, $cos t = \sqrt{1-sin^2 t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{9}} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$, $tgt = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$, то окончательно имеем: $\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}} = \frac{x}{9\sqrt{9-x^2}} + C$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$.

Решение. Заменим: $x = \frac{2}{cos\,t}$. Тогда $dx = \frac{2\,sin\,t}{cos^2 t}dt$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{2\,sin\,t}{\frac{4}{cos^2 t}\cdot\sqrt{\frac{4}{cos^2 t}-4}}\cdot\frac{dt}{cos^2 t} = \frac{1}{4}\int cos\,tdt = \frac{1}{4}sin\,t + C.$$

Так как $cot = \frac{2}{x}$, $sin\,t = \sqrt{1-cos^2 t} = \sqrt{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$, то

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}} = \frac{\sqrt{x^2-4}}{4x} + C.$$

Интегрирование по частям.

Интегрированеим по частям называется нахождение интеграла по формуле

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

где $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции от *x*. С помощью этой формулы нахождение интеграла $\int udv$ сводится к отысканию другого интеграл $\int vdu$ когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен.

Для интегралов вида $\int P(x)e^{\alpha x}dx$, $\int P(x)sin\,\alpha xdx$, $\int P(x)cos\,\alpha xdx$, где $P(x)$ – многочлен, за *u* следует принять $P(x)$, а за dv – соответственно выражение $e^{\alpha x}dx$, $sin\,\alpha xdx$, $cos\,\alpha xdx$; для инетгралов вида $\int P(x)ln\,xdx$, $\int P(x)arcsin\,xdx$, $\int P(x)arccos\,xdx$ за *u* принимаются соответственно функции $ln\,x$, $arcsin\,x$, $arccos\,x$, а за dv – выражение $P(x)dx$.

Пример . Найти интеграл $\int x\sin xdx$.

Решение. Положим $u = x$, $dv = \sin xdx$, тогда $du = dx$, $v = -\cos x$. Следовательно, $\int x\sin xdx = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + C$.

Пример. Найти интеграл $\int e^x \cos xdx$.

Решение. Положив $u = e^x$, $dv = \cos xdx$, получим $du = e^x dx, v = \sin x$;

$$\int e^x \cos xdx = e^x \sin x - \int e^x \sin xdx$$

К последнему интегралу снова применим метод интегрирования по частям: $u = e^x$, $dv = \sin xdx$, $du = e^x dx, v = -\cos x$. Тогда

$$\int e^x \cos xdx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos xdx + C.$$

Решая это уравнение относительно интеграла $\int e^x \cos xdx$, получим

$$\int e^x \cos xdx = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + C.$$

Интегрирование рациональных функций.

Выражение $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$, $Q_n(x)$– многочлены m-й и n-й степени соответственно, называется *рациональной дробью*. Рациональная дробь называется *правильной*, если $m < n$, и *неправильной*, если $m \ge n$. Всякая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы конечного числа простейших дробей следующих четырех типов:

1. $\frac{A}{x-a}$;

2. $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, где n – целое число, большее единицы;

3. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, где $\dfrac{p^2}{4}-q<0$, т.е. квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней;

4. $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}$, где n – целое число, большее единицы, и квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

Интегрирование простейших дробей первых трех типов.

1. $\int \dfrac{A}{x-a}dx = A\int \dfrac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a|+C$.

2. $\int \dfrac{A}{(x-a)^n}dx = A\int \dfrac{d(x-a)}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n}d(x-a) = A\dfrac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C$

3. $\int \dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$

Выделим в числителе дроби производную знаменателя.

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+\frac{2N}{M}}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p+\frac{2N}{M}-p}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \frac{M}{2}\int \frac{\frac{2N}{M}-p}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \frac{M}{2}\left(\frac{2N}{M}-p\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

В первом интеграле числитель является производной знаменателя, а во втором интеграле в знаменателе выделяют полный квадрат.

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+q}=$$

$$=\frac{M}{2}ln\left|x^2+px+q\right|+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}}=$$

$$=\frac{M}{2}ln\left|x^2+px+q\right|+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)},$$

или $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}ln\left|x^2+px+q\right|+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2}$,

где $t=x+\frac{p}{2}$, $a=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$.

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}ln\left|x^2+px+q\right|+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}arctg\,\frac{t}{a}+C=$$

$$=\frac{M}{2}ln\left|x^2+px+q\right|+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Интегрирование простейших дробей четвертого типа.

$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$, выделим в числителе производную от квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе:

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx=\int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{(2x+p)}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}$$

Первый интеграл в правой части равенства легко приводится к табличному, а второй преобразуем:

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}=\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n}.$$

Полагая $t=x+\frac{p}{2}$, $a=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$, $dx=dt$, получаем

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}.$$

Полученный интеграл находится по рекуррентной формуле:

$$I_n=\frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}.$$

Эта формула позволяет после $(n-1)$ – кратного применения свести данный интеграл I_n к табличному интегралу $\int\frac{dt}{t^2+a^2}$.

Пример. Найти интеграл $\int\frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$

Решение. В знаменателе подынтегральной функции $\frac{p^2}{4}-q=\frac{(-4)^2}{4}-8<0$, следовательно, интегрируется простейшая дробь третьего типа.

Выделим в числителе дроби производную знаменателя.

$$\int\frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx=\frac{3}{2}\int\frac{(2x-4)-\frac{2}{3}+4}{x^2-4x+8}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx+5\int\frac{dx}{x^2-4x+8}=$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d\left(x^2 - 4x + 8\right)}{x^2 - 4x + 8} + 5\int \frac{dx}{(x-2)^2 + 4} = \frac{3}{2}\ln\left(x^2 - 4x + 8\right) + \frac{5}{2} arctg\,\frac{x-2}{2} + C.$$

Интегрирование рациональных дробей с помощью разложения на простейшие дроби.

Перед интегрированием рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ надо сделать следующие алгебраические преобразования и вычисления:

1. если дана неправильная дробь, то выделяют целую часть рациональной дроби, деля числитель $P(x)$ на знаменатель $Q(x)$ по правилу деления многочлена на многочлен. После этого рациональная дробь может быть представлена в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $M(x)$ – многочлен, а $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь.

2. разложить знаменатель дроби на линейные и квадратичные множители: $Q(x) = (x-a)^m \ldots \left(x^2 + px + q\right)^n \ldots$, где $\frac{p^2}{4} - q < 0$, т.е. трехчлен $x^2 + px + q$ имеет комплексные сопряженные корни;

3. правильную рациональную дробь разложить на простейшие дроби:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_m}{(x-a)^m} + \ldots + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{B_2x + C_2}{\left(x^2 + px + q\right)^2} + \ldots +$$

$$+ \frac{B_nx + C_n}{\left(x^2 + px + q\right)^n} + \ldots;$$

4. Вычислить неопределенные коэффициенты A_1, A_2, …, A_m, …, B_1, C_1, B_2, C_2, …,B_n, C_n, …, для этого все простейшие дроби приводят к общему знаменателю и приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества. Это приводит к системе уравнений, решая которую находят значения интересующих нас коэффициентов.

В результате интегрированеи рациональной дроби сведется к нахождению инетгралов от многочлена и от постейших рациональных дробей.

Пример . $\int \frac{x^3 - x - 1}{(x-1)(x^2 + x + 2)} dx$.

Решение. Так как подынтегрльная функция есть неправильная дробь, то нужно выделить целую часть, разделив числитель на знаменатель,

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x - 1 & \underline{x^3 + x - 2} \\ \underline{x^3 + x - 2} & 1 \\ -2x + 1 & \end{array}$$

где $x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2)$. Следовательно,

$$\frac{x^3 - x - 1}{(x-1)(x^2 + x + 2)} = 1 + \frac{1 - 2x}{(x-1)(x^2 + x + 2)}.$$

Правильную дробь разложим на простейшие:

$$\frac{1 - 2x}{(x-1)(x^2 + x + 2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 2}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и приравнивая числители, получим тождество:

$$1 - 2x = A(x^2 + x + 2) + (x-1)(Bx + C) = x^2(A + B) + x(A - B + C) + (2A - C)$$

.

Прирвниваем коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=0 \\ x^1 & A-B+C=-2 \\ x^0 & 2A-C=1 \end{array}$$

Решая эту систему, находим $A=-\frac{1}{4}$, $B\frac{1}{4}$, $C=-\frac{3}{2}$.

Заменяя под знаком интеграла остаточную дробь ее разложением на простейшие дроби (с подставленными в него найденными значениями коэффициентов) и находя нужные интегралы, последовательно получим

$$\int \frac{x^3-x-1}{(x-1)\left(x^2+x+2\right)}dx = \int 1+\frac{-\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}}{x^2+x+2}dx =$$

$$= \int dx-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{4}\int\frac{x-6}{x^2+x+2}dx =$$

$$= x-\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{8}\int\frac{2x+1}{x^2+x+2}dx-\frac{13}{8}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} =$$

$$= x-\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{8}\ln\left|x^2+x+2\right|-\frac{13}{4\sqrt{7}}arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+C.$$

Интегрирование простейших иррациональных функций

1. Интегралы вида $\int R\left(x,(ax+b)^{m_1/n_1},(ax+b)^{m_2/n_2},\ldots\right)dx$, где R – рациональная функция; m_1, n_1, m_2, n_2, … – целые числа. С помощью подстановки $ax+b=t^s$, где s – наименьшее общее кратное чисел n_1, n_2, …, указанный интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)(1+\sqrt[6]{x-1})}dx$

Решение.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)(1+\sqrt[6]{x-1})}dx = \left| \begin{array}{ll} x\text{-}1 = t^{12}, & dx = 12t^{11}\,dt; \\ \sqrt[3]{x-1} = t^4; & \sqrt[6]{x-1} = t^2; \\ \sqrt[4]{x-1} = t^3; & \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(t^4+t^3)}{t^{12}(1+t^2)}\cdot 12t^{11}dt = = 12\int \frac{t^3+t^2}{t^2+1}dt = \left| \begin{array}{r|l} t^3+t^2 & t^2+1 \\ -\ \underline{t^3+t} & t+1 \\ t^2-t & \\ -\ \underline{t^2+1} & \\ -t-1 & \end{array} \right| =$$

$$=12\int\left(t+1-\frac{t+1}{t^2+1}\right)dt = 12\int tdt \ \ +12\int dt - 12\int \frac{tdt}{t^2+1} =$$

$$= 6t^2 + 12t - 6\int\left(t^2+1\right)^{-1}d\left(t^2+1\right) - 12arctg\, t + C =$$

$$= 6t^2 + 12t - 6\ln\left|t^2+1\right| - 12arctg\, t + C =$$

$= |\ x - 1 = t^{12},\ t = \sqrt[12]{x-1}\ | = 6\sqrt[6]{x-1} + 12\sqrt[12]{x-1}$ -6ln$|\sqrt[6]{x-1}+1|$ - 12 arctg($\sqrt[12]{x-1}$) + C;

2. *а*) Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ – выделяют полный квадрат в подкоренном выражении, интеграл приводится к табличному виду.

б) Интегралы вида $\int \frac{Ax+Bdx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ – в числителе выделяют производную подкоренного выражения, интеграл разбивается на два, которые берутся непосредственно.

в) Интегралы вида $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ – с помощью замены $x-\alpha=\frac{1}{t}$, интеграл приводится к табличному виду.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$

Решение.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}=\left|\begin{array}{l} x=\frac{1}{t}, \quad t=\frac{1}{x} \\ dx=-\frac{dt}{t^2}\end{array}\right|=-\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{4}{t}-4}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{1+4t-4t^2}}=$$

$$=-\int \frac{dt}{\sqrt{-\left(4t^2-4t-1\right)}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{-\left(4t^2-4t-1\right)}}=-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{-\left(t^2-t-\frac{1}{4}\right)}}=$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{-\left(t^2-t+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{2}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}}=-\frac{1}{2}\int \frac{d\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\arcsin\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}+C=-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\frac{2}{x}-1}{\sqrt{2}}+C$$

3. Интегралы от дифференцированных биномов (биноминальный дифференциал)

Определение: $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ – называется *дифференциальным биномом.*

Академик Чебышев доказал, что $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ выражается через элементарные функции в трех случаях:

1) если p-целое, то следует сделать подстановку

$\sqrt[\lambda]{x}=t$, где λ – общий знаменатель чисел m и n.

2) p – не целое, $\frac{m+1}{n}$ - целое, тогда вводим $a+bx^n=t^S$, где s – знаменатель Р.

3)если $\frac{m+1}{n}$ -не целое, то проверяем p + $\frac{m+1}{n}$ - целое, тогда замена такая:

$ax^{-n}+b=t^s$, где s – знаменатель p.

В остальных случаях интеграл не берется.

Пример. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$

Решение.

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}=\int x^{-2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx=\left|\begin{array}{l} m=-2 \quad n=2 \quad p=-\frac{3}{2} \\ \frac{m+1}{n}=-\frac{1}{2}-\textit{не целое} \\ p+\frac{m+1}{n}=-1-\textit{целое} \\ x^{-2}+1=t^2 \;\; x=\left(t^2-1\right)^{-\frac{1}{2}} \\ dx=-t\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}dt \\ x^2=\left(t^2-1\right)^{-1}=\frac{1}{t^2-1} \end{array}\right|=$$

$$=$$

$$=\int\left(t^2-1\right)\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)^{-\frac{3}{2}}(-t)\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}dt=-\int\left(t^2-1\right)\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)^{-\frac{3}{2}}t\,\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}dt=$$

$$=-\int\left(t^2-1\right)t^{-2}dt=-\int dt+\int t^{-2}dt=-t-t^{-1}+C=-\sqrt{x^{-2}+1}-\frac{1}{\sqrt{x^{-2}+1}}+C$$

Пример. Найти интеграл $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Запишем интеграл в виде $\int x^3(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$. Здесь m=3, n=2, p=$-\frac{1}{2}$, так что $\frac{m+1}{n}=2$ - целое. В этом случае замена $1-x^2=t^N=t^2$, N- знаменатель дроби p. Тогда $t=\sqrt{1-x^2}, x=\sqrt{1-t^2}, dx=-\frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}$;

$$\int(1-t^2)^{\frac{3}{2}}t^{-1}\frac{(-t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\int(1-t^2)dt=\frac{t^3}{3}-t+C=\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{1-x^2}+C.$$

Интегрирование тригонометрических функций

1. Интегрирование функции R(sin$x$, cos$x$), где символ R означает рациональную функцию своих аргументов. Интеграл от такой функции находится путем замены переменной.

Универсальная подстановка $t=tg\frac{x}{2}, -\pi<x<\pi.$ При этой подстановке имеем

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

x=2arctg$t$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. Тогда $\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$.

Пример. Найти интеграл $\int\frac{dx}{3+2\cos x}$.

Решение. Преобразуем 3+2cos$x$ =3+2$\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\dfrac{5+t^2}{1+t^2}$. Тогда

$$\int\frac{dx}{3+2\cos x}=\int\frac{(1+t^2)2dt}{(5+t^2)(1+t^2)}=2\int\frac{dt}{5+t^2}=\frac{2}{\sqrt5}arctg\,\frac{t}{\sqrt5}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt5}arctg\,\frac{tg\,\frac{x}{2}}{\sqrt5}+C.$$

2. Интегралы вида $\int\sin^m x\cos^k xdx$

а) хотя бы один из показателей m или k есть целое нечетное число, то метод «отщипления» и получают интеграл берущийся непосредственно.

б) оба показателя m и k есть четные положительные числа, тогда степень синуса и косинуса понижается по формулам:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos2x}{2},\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos2x}{2}$$

в) сумма показателей (m+k) есть четное отрицательное число – полууниверсальная подстановка:

$$t=tg\,x,\ x=arctg\,t,\ dx=\frac{dt}{1+t^2},\ \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

Пример. Найти интеграл $\int\sqrt{\sin x}\cos^3 xdx$

$$\int\sqrt{\sin x}\cos^3 xdx=\int\sqrt{\sin x}\cdot\cos^2 x\cdot\cos xdx=\int\sqrt{\sin x}\cdot(1-\sin^2 x)\cdot\cos xdx=$$

$$=\int\sqrt{\sin x}\cdot(1-\sin^2 x)d(\sin x)=\int\sqrt{\sin x}d(\sin x)-\int\sqrt{\sin x}\sin^2 xd(\sin x)=$$

$$=\frac{\sin^{\frac{3}{2}}x}{\frac{3}{2}}-\frac{\sin^{\frac{7}{2}}x}{\frac{7}{2}}+C=\frac{2\sin^{\frac{3}{2}}x}{3}-\frac{2\sin^{\frac{7}{2}}x}{7}+C$$

3. Интегралы вида $\int tg^m x dx$ $\left(\int ctg^m x dx\right)$, где m – целое положительное число. Интеграл находится путем замены $tgx = t,\, x = arctgt,\, dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ $\left(ctgx = t,\, x = arcctgt,\, dx = -\dfrac{dt}{1+t^2}\right)$.

4. Интегралы вида $\int \cos mx \cdot \cos kx\, dx, \int \sin mx \cdot \sin kx\, dx,$ $\int \sin mx \cdot \cos kx\, dx$, где m и k – целые положительные числа, находятся с помощью следующих тригонометрических формул:

$$\cos mx \cdot \cos kx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-k)x + \cos(m+k)x\right)$$

$$\sin mx \cdot \sin kx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-k)x - \cos(m+k)x\right)$$

$$\sin mx \cdot \cos kx = \frac{1}{2}\left(\sin(m-k)x + \sin(m+k)x\right)$$

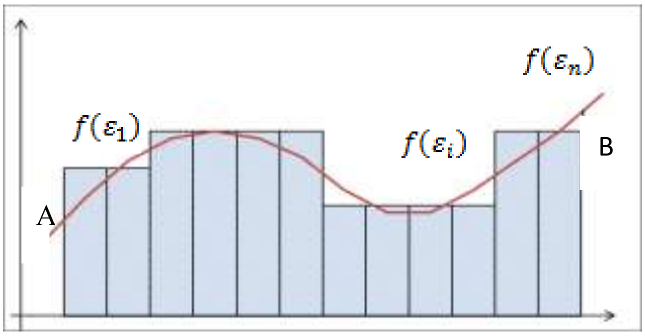
Определенный интеграл

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке, тогда, если существует предел интегральной суммы S_n, не зависящей от способа разбиения и от выбора точек ξ_i, то функция $y = f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a,b]$, а этот предел называется интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается $\int f(x) \cdot dx$, т.е.

$$\int_a^b f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x = S$$

Число a называется нижним пределом интеграла, b - верхним пределом. Отрезок $[a,b]$ называется отрезком интегрирования. При постоянных пределах определенный интеграл представляет собой число.

Геометрического смысла интегральной суммы рассмотрим криволинейную трапецию, т. е. фигуру, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a, x = b$ и осью абсцисс.



Интегральная сумма S_n – численно равна площади заштрихованной ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников, площадь которых равна $f(\xi_i)\Delta x$. Причем, чем уже ступенька, тем ближе площадь ступенчатой фигуры к площади криволинейной трапеции *aABb*, так что предел *S* численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a, x = b$ и осью *Ox,* то эта площадь равна см. рисунок

$$S = \int_a^b f(x)dx,$$

если на отрезке $[a,b]$, функция $y = f(x)$ положительна. Если же на отрезке $[a,b]$ функция $y = f(x)$ отрицательна, то интеграл по абсолютному значению равен площади соответствующей криволинейной трапеции.

Определенный интеграл зависит от вида функции $f(x)$ и значений верхнего и нижнего приделов, но не зависит от переменной интегрирования, которую можно обозначить любой буквой, т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \ldots = \int_a^b f(u)du$$

Свойства определенного интеграла

1. При перестановке пределов определенный интеграл меняет знак.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2. Определенный интеграл с равными пределами равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3. Для любых трех чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^a f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx$$

где С – постоянная.

5. Определенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме интегралов отдельных слагаемых:

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)dx$$

6. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке найдется такая точка ε, что справедлива следующее равенство:

$$\int_a^a f(x)dx = f(x)\cdot(b-a), \qquad a<\xi<b.$$

7. Пусть в каждой точке на отрезке $[a,b]$ выполняется неравенство

$f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$, тогда

$$\int_a^b f_1(x)dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b f_2(x)dx.$$

Вычисление определённого интеграла.

Формула Ньютона-Лейбница.

Теорема об интеграле с переменным верхним пределом. Если функция $f(t)$ непрерывна в окрестности точки $t = x$, то в этой точке функция $\Phi(x)$ дифференцируема, и $\Phi'(x) = f(x)$.

Другими словами, производная определённого интеграла от непрерывной функции по верхнему пределу равна значению подынтегральной функции в этом пределе.

Формула Ньютона-Лейбница. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, и $F(x)$- некоторая первообразная функции $f(x)$, то $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Разность в правой части формулы Ньютона-Лейбница обозначается специальным символом: $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ (здесь $F(x)\Big|_a^b$ читается как «подстановка от a до b»), поэтому формулу Ньютона-Лейбница обычно записывают так: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$.

Пример применения формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin x dx = (-\cos x)\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = -\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6}\right) = -\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Методы интегрирования

Формула интегрирования по частям для определённого интеграла.

Если $u(x), v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции, то $\int_a^b u \cdot dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$.

Пример: Найти определенный интеграл $\int_1^5 \ln x dx$

Решение

$$\int_1^5 \ln x dx = x\ln x\Big|_1^5 - \int_1^5 x d\left(\ln x\right) = \left(5\ln 5 - 1\ln 1\right) - \int_1^5 x\frac{dx}{x} = 5\ln 5 - x\Big|_1^5 =$$
$$= 5\ln 5 - (5-1) = 5\ln 5 - 4.$$

Замена переменной в определённом интеграле.

Теорема. Пусть функция $x = \varphi(t)$

1. определена, непрерывно дифференцируема и монотонна на отрезке $[\alpha, \beta]$,

2. $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$,

3. функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

При решении задач нельзя забывать о том, что при переходе к новой переменной надо обязательно вычислить новые пределы интеграла. Пример:

$$\int\limits_1^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2}dx = \left| \begin{array}{l} x = 2\sin t, \sqrt{4 - x^2} = 2\cos t, dx = 2\cos t dt, \\ 2\sin t = 1 \Rightarrow t = \pi/6, 2\sin t = \sqrt{3} \Rightarrow t = \pi/3 \end{array} \right| =$$

$$= 4\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^2 t \cdot dt = 2\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} (1 + \cos 2t) \cdot dt =$$

$$= 2\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} (1 + \cos 2t) \cdot dt = 2\left[t\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} + \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} \right] =$$

$$= 2\left[\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} \right) \right] = \frac{\pi}{3}.$$