

Дисциплина: Математика

Преподаватель: Мурзина Наталья Валерьевна

Группа: ГМУс-20

По всем вопросам ответчу по почте murzinanv@mail.ru.

Курс математики заканчивается экзаменом. Для успешной сдачи которого необходимо переработать лекционный материал и закрепить его на практических задачах.

Допуском к экзамену является зачтенная контрольная работа. Задание к контрольной работе находится в разделе Установочные материалы на сайте ЗабГУ. Контрольная работа выполняется по вариантам в отдельной тетради. Решение прикрепляете в личный кабинет одним файлом.

20.01. Изучаете лекционный материал и делайте конспект. (Материал прилагается ниже).

21.01. в 8.30 выходим на занятие в системе Zoom

22.01. в 8.30 выходим на занятие в системе Zoom

25.01. в 9.00 выходим на экзамен в системе Zoom

Занятия в системе Zoom по ссылке:

<https://us04web.zoom.us/j/76446336920?pwd=N1ExYjVEdlZHV0I3STA4MjE3ZURsZz09>

Идентификатор конференции: 764 4633 6920

Код доступа: ivNJ66

ЛЕКЦИОННЫЙ МАТЕРИАЛ

Элементы линейной алгебры.

Матрицы и определители.

Матрицей A размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из m строк и n столбцов, состоящая из чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Квадратной матрицей n -го порядка называется матрица размера $n \times n$.

Диагональной называется квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю.

Единичной называется диагональная матрица с единицами на главной диагонали.

Нулевой называется матрица, все элементы которой равны нулю.

Матрица A^T называется транспонированной к матрице A , если в матрице A столбцы заменены строками и наоборот.

Операции над матрицами.

1. Умножение матрицы на число.

Произведением матрицы A на число k является матрица kA , каждый элемент которой умножен на число k .

2. Сложение матриц.

Суммой матриц A и B , имеющих n строк и m столбцов, называется матрица $C=A+B$, элементы которой равны сумме соответствующих элементов этих матриц.

$$\text{Пример: } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad k=3$$

Найти: $kA+B$.

Решение.

$$\begin{aligned} kA+B &= 3 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 9 \\ -15 & 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 9 & 13 \\ -13 & 3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Умножение матриц.

Произведение матрицы A на матрицу B определено только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B . В результате умножения получим матрицу AB , у которой столько

же строк, сколько их в матрице A , и столько же столбцов, сколько их в матрице B .

Умножение двух матриц A и B называется новая матрица C , элемент которой c_{ij} , стоящий в i -строке, j -столбце, равен сумме произведений элементов i -ой строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Пример . Найти произведение матриц.

Решение. $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Типа (3x2) типа (2x4) = типа(3x4)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} =$$

=

$$\begin{pmatrix} -3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 & -3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & -3 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 & -3 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 3 + (-4) \cdot 5 & 2 \cdot 1 + (-4) \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + (-4) \cdot 0 & 2 \cdot 4 + (-4) \cdot (-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & -18 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ -14 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Определители.

Любой квадратной матрице n -го порядка можно поставить в соответствие выражение, которое называется *определителем* (детерминантом) матрицы A , и обозначается так:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ или } |A| \text{ или } \det(A)$$

Определитель второго порядка задается равенством:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Элементы a_{11}, a_{22} образуют (или лежат) главную диагональ, a_{12}, a_{21} - побочную диагональ. Таким образом, определитель второго порядка равен разности между произведениями элементов, лежащих на главной и побочной диагоналях.

Определитель третьего

порядка.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} -$$

$$- a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Свойства определителей.

1. Величина определителя не изменится, если все его строки заменить столбцами с теми же номерами.

7. Если к элементам некоторого столбца (или некоторой строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (или строки), умноженные на любой общий множитель, то величина определителя при этом не изменится.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Если же система не имеет ни одного решения, то она называется *не совместной*.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет только одно решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Правило Крамера заключается в следующем:

Составляем определитель из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{Если определитель } \Delta \neq 0, \text{ то система}$$

имеет единственное решение.

Решение системы находим следующим образом:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}; \dots; x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta} \quad \text{или в общем виде } x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta} \quad \text{где}$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Определитель Δx_i получаем из основного определителя Δ заменой i – го столбца на столбец свободных коэффициентов.

$$\text{Например: } \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Если определитель $\Delta = 0$, то система является либо несовместной (когда $\Delta x_i \neq 0$), либо неопределенной (когда $\Delta x_i = 0$).

$$\text{Пример. Решить систему: } \begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 4x + 3y - 2z = 4 \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14 \quad \Delta x = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14 \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 28$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 42$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{14}{14} = 1; y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2; z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3$$

Ответ: (1; 2; 3)

Системы линейных уравнений в матричной форме.

Рассмотрим систему линейных неоднородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Данную систему уравнений можно записать в матричной форме:

$$A \cdot X = B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Матрицей обратной квадратичной матрице A называется матрица, обозначаемая A^{-1} , такая что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \text{ где } A_{ij} - \text{алгебраические дополнения}$$

элементов a_{ij} в матрице.

Если $\det(A)$ не равен нулю, то система совместна и определена, ее решение задается формулой: $X = A^{-1} \cdot B$

Пример. Найти решение системы матричным методом:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$$

Решение. $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33 \neq 0$

Найдем $A^{-1} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix}$

Искомая матрица: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 33 \\ 33 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Следовательно, $x=1, y=1, z=1$ – решение системы.

Метод Гаусса.

Пример. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_3 = 16 \end{cases}$$

Решение. Составляем матрицу их коэффициентов системы (матрица A) и дополняем ее столбцом свободных членов (расширенная матрица B). Приводим матрицу к ступенчатому виду используя элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Выписываем решение системы:

$$x_2 = 4 + 2x_3; x_1 + x_2 - x_3 = -4; x_1 = -x_2 + x_3 - 4 = -4 - 2x_3 + x_3 - 4 = -x_3 - 8$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - 8 \\ x_2 = 2x_3 + 4 \end{cases}$$

Выражая базисные переменные через все остальные (их называют свободными переменными), получим общее решение системы.

Давая свободным переменным произвольные значения, получаем множество частных решений, например:

$$\begin{cases} x_3 = 3 \\ x_2 = 10 \\ x_1 = -11 \end{cases}$$

Частное решение, в котором все свободные переменные равны нулю, называют базисным решением:

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 4 \\ x_1 = -8 \end{cases}$$

Введение в математический анализ.

Функции одной переменной.

Если некоторому числу x из множества X поставлено в соответствие согласно некоторому правилу f единственное число $y = f(x)$, то говорят, что на множестве X задана функциональная зависимость или функция. При этом величину y называют зависимой переменной, а величину x - независимой переменной или аргументом. Множество X , для которых определяются значения функции называют областью определения функции и обозначают $D(f)=X$, а

множество чисел $y = f(x)$ объединяют в множество Y и называют множеством значений функции. Это множество обозначают $E(f)=Y$.

Функциональная зависимость считается заданной, если известно правило для определения значения функции, соответствующего данному значению аргумента. Такое правило может быть представлено различными способами, важнейшими являются:

- 1) Аналитический с помощью формулы, например, $y = x^3, y = \cos x$;
- 2) Графический – задан график;
- 3) Табличный – заданы таблицы (таблицы логарифмов, квадратных корней и так далее).

Функция называется *возрастающей*, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Соответственно для убывающей – большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Возрастающие и убывающие функции называются монотонными.

Функция $f(x)$ называется *четной*, если для всех допустимых значений x выполняется $f(-x) = f(x)$, а если выполняется правило $f(-x) = -f(x)$, то $f(x)$ называется *нечетной*. Если ни одно из этих двух соотношений не имеет места, то функция называется функцией общего вида.

График четной функции симметричен относительно оси Oy , нечетной относительно начала координат.

Функция $f(x)$ называется *периодической* с периодом T , если для любого x справедливо равенство: $f(x + T) = f(x)$.

Классификация функций.

Функции, заданные аналитически, подразделяются на два класса: алгебраические и трансцендентные. Алгебраическими называются

функции, значения которых получаются в результате выполнения над значениями аргумента конечного числа алгебраических действий (сложения, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня). Функция, не являющаяся алгебраической, называется трансцендентной.

Основные элементарные функции.

1. Степенная функция: $y = x^a$, a – действительное число.

2. Показательная функция $y = a^x$,

$$a > 0, a \neq 1, D(y) = \{x \in R\}, E(y) = \{y > 0\}$$

3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1, D(y) = \{x > 0\}$
 $E(y) = \{y \in R\}$

4. Тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$,
 $y = \operatorname{ctg} x$

5. Обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$,
 $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Предел функции в точке.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 кроме, быть может, самой точки x_0 .

Число A называется *пределом функции $f(x)$ в точке x_0* , если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x таких, что $|x - x_0| < \delta$ $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Кроме предела, связанного с произвольным стремлением аргумента x к x_0 , рассматривают так называемые односторонние пределы функции (пределы слева и справа).

Предел $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = C'$ называется *пределом функции $f(x)$ при x , стремящемся к x_0 слева*, а предел $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = C''$ - *пределом функции $f(x)$ при x , стремящемся к x_0 справа*.

Основные теоремы о пределах.

Теорема 1: предел алгебраической суммы конечного числа переменных равен алгебраической сумме пределов этих переменных.

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

Теорема 2: предел произведения конечного числа переменных равен произведению пределов этих переменных.

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

Теорема 3: предел частного двух переменных равен частному этих переменных, если предел знаменателя отличен от нуля.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

Два замечательных предела.

В курсе математического анализа важное значение имеют два предела, нахождение которых выполняется специальными приемами.

1) *Первый замечательный предел:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Пример 13.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

Пример 14.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - \sin x}{x + 3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x} \sin x}{1 + \frac{3}{x} \cos x} = \frac{2 - 0}{1 + 0} = 2$$

(произведение бесконечно малой на ограниченную функцию есть бесконечно малая).

2) Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} =$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)^{\frac{1}{x}} \cdot e^{x \cdot \frac{1}{x}} &= e \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)^{\frac{e^x}{x} \cdot \frac{1}{e^x}} = e \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{e^x}} = \\ &= e \cdot e = e^2. \end{aligned}$$

Бесконечно малые функции и их сравнения.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x \rightarrow x_0$.

Бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *сравнимыми*, если существует хотя бы один из пределов: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ или $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – сравнимые бесконечно малые при $x \rightarrow x_0$, и пусть существует $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$, тогда:

1) если $c \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка*. В частности, если $c = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* и пишут $\alpha(x) \approx \beta(x)$.

2) Если $c = 0$, то $\alpha(x)$ называют *бесконечно малой более высокого порядка*, чем $\beta(x)$, и пишут $\alpha = o(\beta)$. Если существует действительное число $k > 0$ такое, что $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} \neq 0$, то $\alpha(x)$ называют *бесконечно малой порядка k относительно $\beta(x)$* .

3) Если $c = \infty$, то это означает, что $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$. Тогда $\beta(x)$

называется *бесконечно малой высшего порядка* по сравнению с $\alpha(x)$, и пишут $\beta = o(\alpha)$.

Свойства бесконечно малых функций.

1) алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

2) Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

3) Произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть функция бесконечно малая.

При вычислении пределов можно заменять бесконечно малые величины их эквивалентами в произведении и в отношении, но не в алгебраической сумме, т.к. это может привести к ошибке.

Теорема 4. Предел отношения бесконечно малых величин не изменится, если одну из них (или обе) заменить эквивалентной бесконечно малой величиной.

Таблица эквивалентных бесконечно малых.

$\sin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$	$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$	$\log_a(1 + \alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}$
$\operatorname{tg}(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$	$\frac{\log_a(1 + \alpha(x))}{\alpha(x)} \sim \frac{1}{\ln a}$
$\arcsin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$	$(1 + \alpha(x))^n - 1 \sim \alpha(x) \cdot n$	$\frac{a^{\alpha(x)} - 1}{\alpha(x)} \sim \ln a$
$\operatorname{arctg}(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$	$1 - \cos(\alpha(x)) \sim \frac{(\alpha(x))^2}{2}$	$(1 + \alpha(x))^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}$

$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$	$\frac{(1 + \alpha(x))^n - 1}{\alpha(x)} \sim n$	
--	--	--

При вычислении пределов функций часто приходится рассматривать различного вида неопределенности: главные

неопределенности – $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$; второстепенные –

$\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0, 0^\infty$.

1. *Неопределенность вида $0/0$.* Рассмотрим несколько примеров, в которых встречаются неопределенности вида $0/0$.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 7x + 2}{2x^2 - x - 6}$

Решение. Разложим числитель и знаменатель на простые множители:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 7x + 2}{2x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x - \frac{1}{3})(x - 2)}{2(x + \frac{3}{2})(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 1}{2x + 3} = \frac{3 \cdot 2 - 1}{2 \cdot 2 + 3} = \frac{5}{7}$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{5x-4} - \sqrt{3x}}$.

Решение. Для нахождения предела устраним иррациональные разности в числителе и знаменателе.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{5x-4} - \sqrt{3x}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{5x-4} - \sqrt{3x}} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}} \cdot \frac{\sqrt{5x-4} + \sqrt{3x}}{\sqrt{5x-4} + \sqrt{3x}} = \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x) \cdot (\sqrt{5x-4} + \sqrt{3x})}{(2x-4) \cdot (\sqrt{x+2} + \sqrt{2x})} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2) \cdot (\sqrt{5x-4} + \sqrt{3x})}{2(x-2) \cdot (\sqrt{x+2} + \sqrt{2x})} = \frac{-(\sqrt{6} + \sqrt{6})}{2 \cdot (2+2)} = -\frac{\sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

Пример 18. Найти: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x}$

$$\text{Решение: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{(\operatorname{tg} x + \sin x) \operatorname{tg} x (1 - \cos x)} =$$

$$=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(tg x + \sin x) tg x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2}{(x+x)x} = \frac{1}{4}$$

2. Неопределенность вида ∞/∞ .

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень x , т.е. на x^3 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2/x + 3/x^2 + 4/x^3}{4 + 3/x + 2/x^2 + 1/x^3} = \frac{1}{4},$$

так как при $x \rightarrow \infty$ каждая из дробей $2/x$, $3/x^2$, $4/x^3$, $3/x$, $2/x^2$ и $1/x^3$ стремится к нулю.

3. Неопределенность вида $\infty - \infty$. Неопределенность этого вида можно привести к неопределенности вида ∞/∞ или $0/0$.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{2}{x(1+e^x)} \right]$.

Решение. Приведем дроби к общему знаменателю, имеем неопределенность вида $0/0$, затем воспользуясь таблицей эквивалентности, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{2}{x(1+e^x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x(1+e^x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{x(1+1+x)} = \frac{1}{2}$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[4]{x^4 + 12x^3} - \sqrt[3]{x^3 + 3x^2})$.

Решение. Вынесем общий множитель x за скобку, далее используя таблицу эквивалентности получим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[4]{x^4 + 12x^3} - \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sqrt[4]{1 + \frac{12}{x}} - x \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \left[1 + \frac{3}{x} - \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{2}{x} = 2. \end{aligned}$$

4. Неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Неопределенность этого вида также приводится к неопределенности ∞/∞ или $0/0$.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x$.

Решение. Сделаем замену $x - \frac{\pi}{2} = t$ $t \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ и учитывая что $\operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\operatorname{tg} x}$ получим:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} t(-\operatorname{ctg} t) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-t}{\operatorname{tg} t} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-t}{t} = -1.$$

5. Раскрытие неопределенности 1^∞ .

Пример. Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} \right)^x$$

Решение. Делением числителя на знаменатель выделим целую часть:

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} = 1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7}$$

Таким образом, при $x \rightarrow \infty$ данная функция представляет собой степень, основание которой стремится к единице, а показатель – к бесконечности (неопределенность вида 1^∞). Используя второй замечательный предел, имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \right)^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \right)^{\frac{x^2 - 3x + 7}{8x - 3}} \right]^{\frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \cdot x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (e)^{\frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \cdot x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 7}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 - 3/x}{1 - 3/x + 7/x^2}} = e^8 \end{aligned}$$

Непрерывность функции.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке x_0* , если эта функция определена в некоторой окрестности точки x_0 и существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, равный $f(x_0)$.

Если при каком либо значении x_0 не выполняется указанные условия, то точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

Если функция непрерывна в каждой точке некоторого промежутка, то она непрерывна на этом промежутке.

Различают точки разрыва *I* и *II* рода. Точка x_0 называется *точкой разрыва I рода*, если для нее существуют конечные пределы

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \text{ и } f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \text{ причем не все}$$

три числа $f(x_0)$, $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ равны между собой.

Точки разрыва *I* рода подразделяются на точки *устранимого разрыва*, когда $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$, т.е. когда левый и правый пределы функции в точке x_0 равны между собой, но не равны значению функции в этой точке, и на точки *скачка*, когда $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, т.е. когда левый и правый пределы функции в точке различны x_0 .

Точки разрыва не являющиеся точками разрыва *I* рода, называются *точками разрыва II рода*. В точках разрыва *II* рода не существует хотя бы один из односторонних пределов.

Пример. Исследовать на непрерывность функцию $y = \arctg \frac{1}{x-4}$

Решение. В точке $x = 4$ функция не определена, значит в этой точке она имеет разрыв. Найдем односторонние пределы функции.

$$\lim_{x \rightarrow 4 - 0} \arctg \frac{1}{x-4} = -\frac{\pi}{2} \text{ т.к. } \frac{1}{x-4} \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-4} = \frac{\pi}{2} \text{ т.к. } \frac{1}{x-4} \rightarrow +\infty$$

При $x \rightarrow 4$ функция имеет как левый, так и правый конечный предел, причем эти пределы различны. Следовательно, $x = 4$ является точкой разрыва I рода – точкой скачка.

Пример. Исследовать на непрерывность

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \leq -\pi, \\ \sin x & \text{при } -\pi < x < \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при } x \geq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

Решение. Функции $y = x$, $y = \sin x$ и $y = 1$ непрерывны на всей числовой прямой, поэтому данная функция может иметь разрывы только в точках, где меняется ее аналитическое выражение, т.е. в точках $x_1 = -\pi$ и $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Исследуем функцию на непрерывность в этих точках, для чего найдем соответствующие односторонние пределы и значения функции.

В точке $x_1 = -\pi$ имеем:

$$\lim_{x \rightarrow -\pi-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi-0} x = -\pi,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\pi+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi+0} \sin x = \sin \pi = 0$$

$$f(-\pi) = -\pi.$$

Таким образом, в этой точке функция имеет разрыв I рода – скачок.

Для точки $x_2 = \frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi} \sin x = \sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\pi+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi} 1 = 1, \text{ а}$$

значение $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ не определено. Значит, точка $x_2 = \frac{\pi}{2}$ – точка устранимого разрыва.

Дифференцирование функций одной переменной

Производная функции в точке.

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в данной точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего произвольным образом к нулю и обозначается одним из символов y' , $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Правила дифференцирования:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + uv'$;
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad (v \neq 0).$

Производная сложной функции.

Если задана функция $y = F(u)$, а u есть функция от x , т.е. $u = f(x)$, то функция $y = F(u) = F[f(x)]$ называется сложной функцией от аргумента x .

Пусть функция $u = f(x)$ имеет в точке x производную $f'(x)$, а функция $y = F(u)$ имеет в точке $u = f(x)$ производную $y'_u = F'_u(u)$. Тогда сложная функция $y = F(u)$ в точке x имеет производную, равную произведению производной данной функции по

промежуточному аргументу u на производную промежуточного аргумента по x , т.е. если $y = F(u)$, $u = f(x)$, то $y'_x = F'_u \cdot u'_x$.

Таблица основных производных:

1. $c' = 0, c = \text{const}$	2. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$
3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u', a > 0$	4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u', a > 0$
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
7. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	8. $(\operatorname{ctg} u)' = \frac{-1}{\sin^2 u} \cdot u'$
9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	10. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
11. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$	12. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Пример: Найти производную функции: $y = \log_2(7x^2 + 5x)$.

Решение. Данная функция является сложной функцией. В соответствии с правилом дифференцирования сложной функции получаем:

$$y' = \frac{1}{(7x^2 + 5x)\ln 2} \cdot (7x^2 + 5x)' = \frac{1}{(7x^2 + 5x)\ln 2} \cdot (14x + 5)$$

Производные высших порядков.

Производной второго порядка функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной, т.е. $y'' = (f'(x))' = f''(x)$.

Дифференцируя вторую производную, получаем производную третьего порядка, и т.д.

Пример: найти производную третьего порядка $y = \ln(3x + 5)$

Решение .

$$y' = \frac{1}{3x+5} \cdot (3x+5)' = \frac{1}{3x+5} \cdot 3 = \frac{3}{3x+5}$$

$$y'' = \left(\frac{3}{3x+5} \right)' = 3 \cdot [(3x+5)^{-1}]' = 3 \cdot (-1)(3x+5)^{-2}$$

$$y''' = \left(\frac{3}{3x+5} \right)' = 3 \cdot [(3x+5)^{-1}]' = 3 \cdot (-1) \cdot (3x+5)^{-2} \cdot 3 = \frac{-9}{(3x+5)^2}$$

$$y'''' = \left(\frac{-9}{(3x+5)^2} \right)' = -9 \cdot (-2) \cdot \frac{1}{(3x+5)^3} \cdot 3 = \frac{54}{(3x+5)^3}$$

Производная функции, заданной неявно.

Функция называется неявной, если она задана уравнением $F(x, y) = 0$. Например: $y^2 - x + 3\ln y = 0$. Для нахождения производной функции, заданной неявно, нужно продифференцировать обе части уравнения $F(x, y) = 0$ по x , считая что y есть функция от x , и найти y' из уравнения $\frac{d}{dx} F(x, y) = 0$.

Пример: $y^2 - x + 3\ln y = 0$.

Решение. Дифференцируя это уравнение по x , пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, т.е. $(y^2)' = 2y \cdot y'$, $(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'$, получим: $2y \cdot y' - 1 + 3 \frac{1}{y} \cdot y' = 0$;

$$y' = \frac{y}{2y^2 + 3}$$

Производная функции, заданной параметрически.

Пусть x и y заданы как функции некоторого параметра t : $x = x(t)$, $y = y(t)$. В этом случае функция $y = y(x)$ задана параметрически. Производная параметрически заданной функции

первого порядка находится по формуле: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$. Второго порядка:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'}{x'_t}$$

Пример: Найти y'_x и y''_{xx} , если $\begin{cases} x = 3 \cos 2t \\ y = \sin t \end{cases}$

Решение. $x'_t = -6 \sin 2t$ $y'_t = \cos t$

Подставим в формулу для первой производной:

$$y'_x = \frac{\cos t}{-6 \sin 2t} = \frac{\cos t}{-6 \cdot 2 \sin t \cdot \cos t} = -\frac{1}{12 \sin t}$$

Для второй производной:

$$\begin{aligned} y''_{xx} &= \frac{\left(-\frac{1}{12 \sin t} \right)'}{-6 \sin 2t} = -\frac{-\frac{1}{12} \sin^{-2} t \cdot \cos t}{-6 \sin 2t} \\ &= \frac{\cos t}{72 \sin^2 t \cdot 2 \cdot \sin t \cdot \cos t} = -\frac{1}{144 \sin^3 t} \end{aligned}$$

Интегральное исчисление.

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной от функции $f(x)$ на отрезке от $[a, b]$, если во всех точках этого отрезка выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$.

Определение. Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то выражение $F(x) + C$ называется неопределённым интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x) dx$.

Таким образом, по определению $\int f(x) dx = F(x) + C$, если $F'(x) = f(x)$; $f(x)$ – называется подынтегральной функцией, $f(x) dx$ – подынтегральным выражением. Процесс нахождения первообразной от данной функции $f(x)$ называется интегрированием.

Основные свойства неопределённого интеграла.

1. производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции, т.е. если $F'(x) = f(x)$, то

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

2. дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

3. неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

4. неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен сумме их интегралов:

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

5. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, если C – постоянная, то $\int C \cdot f(x)dx = C \int f(x)dx$.

Таблица интегралов.

$$1. \int u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1; \quad \int 1 \cdot du = u + C \quad \int 0 \cdot du = C.$$

$$2. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$$

$$3. \int \sin u du = -\cos u + C.$$

$$4. \int \cos u du = \sin u + C.$$

$$5. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$$

$$6. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$$

$$7. \int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C.$$

$$8. \int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C.$$

$$9. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad \int e^u du = e^u + C.$$

$$10. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C.$$

$$11. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C.$$

$$12. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C.$$

$$13. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C.$$

Основные методы интегрирования.

Непосредственное интегрирование

Метод непосредственного интегрирования связан с приведением подынтегрального выражения к табличному виду путем элементарных преобразований и применения свойств неопределенного интеграла.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{x} + 2x^2 - 5x^3 + 7}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

Решение.

$$\int \frac{\sqrt{x} + 2x^2 - 5x^3 + 7}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx + \int \frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^2}} dx - \int \frac{5x^3}{\sqrt[3]{x^2}} dx + \int \frac{7}{\sqrt[3]{x^2}} dx =$$

$$\begin{aligned}
& \int x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}} dx + 2 \int x^{2-\frac{2}{3}} dx - 5 \int x^{3-\frac{2}{3}} dx + 7 \int x^{\frac{2}{3}} dx = \\
& \int x^{\frac{1}{6}} dx + 2 \int x^{\frac{4}{3}} dx - 5 \int x^{\frac{7}{3}} dx + 7 \int x^{\frac{2}{3}} dx = \\
& \frac{x^{\frac{5}{6}}}{5/6} + 2 \frac{x^{\frac{7}{3}}}{7/3} - 5 \frac{x^{\frac{10}{3}}}{10/3} + 7 \frac{x^{\frac{5}{3}}}{5/3} + C = \\
& = \frac{6\sqrt{x^5}}{5} + \frac{6\sqrt[3]{x^7}}{7} - \frac{3\sqrt[3]{x^{10}}}{2} + \frac{21\sqrt[3]{x^5}}{5} + C
\end{aligned}$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{7x^2 + 9}$

Решение. Данный интеграл приведем к табличному интегралу, для чего коэффициент при x^2 вынесем за знак интеграла:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{7x^2 + 9} &= \frac{1}{7} \int \frac{dx}{x^2 + (9/7)} = \frac{1}{7} \int \frac{dx}{x^2 + (3/\sqrt{7})} = \frac{1}{7} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}x}{3} + C = \\
&= \frac{1}{3\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}x}{3} + C
\end{aligned}$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{x^4 dx}{x^2 + 1}$

Решение. Так как подынтегральная функция представляет собой неправильную дробь, то выделим из неё целую часть, для этого используем правило деления многочлена на многочлен.

$$\int \frac{x^4 dx}{x^2 + 1} = \int x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int x^2 - 1 dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + C$$

Введение переменной под знак дифференциала

В основе метода введения переменной под знак дифференциала лежит одно из основных свойств неопределенного интеграла.

Пусть требуется вычислить $\int f(x) dx$. Предположим, что существует дифференцируемая функция $u = \varphi(x)$ и функция $g(u)$

такие, что подынтегральное выражение $f(x)dx$ может быть записано в виде:

$$f(x)dx = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = g(u)du$$

При этом выполняется соотношение:

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int g(u)du, \text{ где } u = \varphi(x)$$

Поэтому вычисление $\int f(x)dx$ сводится к вычислению $\int g(u)du$, который может быть проще исходного.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$

Решение. Здесь под знак дифференциала надо положить $\arctg x$,

т.к. $d(\arctg x) = \frac{1}{1+x^2} dx$. Тогда

$$\int \frac{\arctg x}{1+x^2} dx = \int \arctg x (d \arctg x) = \frac{\arctg^2 x}{2} + C.$$

Пример. Найти интеграл $\int e^{-x^2} x dx$.

Решение. Для того чтобы вычислить этот интеграл, заметим, что

$d(-x^2) = -2x dx$ или $x dx = -\frac{1}{2} d(-x^2)$. Поэтому

$$\int e^{-x^2} x dx = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(x + \sqrt{x^2 - 1})^2}$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель на $(x - \sqrt{x^2 - 1})^2$ и, учитывая, что

$$\begin{aligned} (x + \sqrt{x^2 - 1})^2 \cdot (x - \sqrt{x^2 - 1})^2 &= [(x + \sqrt{x^2 - 1}) \cdot (x - \sqrt{x^2 - 1})]^2 = \\ &= [x^2 - (x^2 - 1)]^2 = 1, \text{ получим:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^2} &= \int \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^2 dx = \int x^2 - 2x\sqrt{x^2 - 1} + x^2 - 1 dx = \\&= 2 \int x^2 dx - 2 \int x\sqrt{x^2 - 1} dx - \int dx = \frac{2}{3}x^3 - x - \int (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} d(x^2 - 1) = \\&= \frac{2}{3}x^3 - x - \frac{2}{3}(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

Метод подстановки (замена переменной в неопределенном интеграле)

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным. В подынтегральном выражении, в этом случае, нужно произвести замену переменной $x = \varphi(t)$, чтобы интеграл стал табличным или сводился к ним проще, чем первоначальный. Функция $\varphi(t)$ должна быть непрерывной, иметь непрерывную производную и обратную функцию. Т.к. $dx = \varphi'(t)dt$, то $\int f(x)dx = \int \varphi(t) \cdot \varphi'(t)dt$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$.

Решение. Чтобы избавиться от корней надо сделать замену $x = t^S$, где S – наименьшее общее кратное степени корней, т.е. $x = t^6$. Тогда $dx = (t^6)' \cdot dt = 6t^5 dt$.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3 - t^2} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t - 1} = 6 \int t^2 + t + 1 + \frac{1}{t - 1} dt = 2t^3 + 3t^2 + 6t + 6\ln|t - 1| + C = \\&= 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x} - 1| + C.\end{aligned}$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{10 + x^2}}{x} dx$

Решение. Положим $10 + x^2 = t^2$, дифференцируя равенство, получим $2x dx = 2t dt$ или $x dx = t dt$. Тогда имеем: $\frac{dx}{x} = \frac{x dx}{x^2} = \frac{t dt}{t^2 - 10}$ и

$$\int \frac{\sqrt{10+x^2}}{x} dx = \int t \cdot \frac{tdt}{t^2-10} = \int \frac{t^2-10+10}{t^2-10} dt = \int dt + 10 \int \frac{dt}{t^2-10} =$$

$$= t + \frac{10}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{10}}{t+\sqrt{10}} \right| + C = \sqrt{10+x^2} + \frac{\sqrt{10}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{10+x^2}-\sqrt{10}}{\sqrt{10+x^2}+\sqrt{10}} \right| + C$$

Замечание. Если подынтегральная функция содержит радикалы $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, то часто удобны следующие подстановки.

1. Для случая $\sqrt{a^2-x^2}$:

$x = a \cdot \sin t$, тогда $\sqrt{a^2-x^2} = a \cdot \cos t$, $dx = a \cdot \cos t \cdot dt$, $t = \arcsin \frac{t}{a}$.

2. Для случая $\sqrt{a^2+x^2}$:

$x = a \cdot \operatorname{tg} t$, тогда $\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2(1+\operatorname{tg}^2 t)} = \frac{a}{\cos t}$, $dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt$,

$t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$.

3. Для случая $\sqrt{x^2-a^2}$:

$x = \frac{a}{\cos t}$, тогда $\sqrt{x^2-a^2} = a \cdot \operatorname{tg} t$, $dx = \frac{a \cdot \sin t}{\cos^2 t} dt$, $t = \arccos \frac{a}{x}$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}}$.

Решение. Положим $x = 3 \sin t$, тогда $dx = 3 \cos t dt$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}} = \int \frac{3 \cos t dt}{\sqrt{(9-9 \sin^2 t)^3}} = \int \frac{3 \cos t}{\sqrt{3^6 \cos^6 t}} dt = \frac{1}{9} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{\operatorname{tg} t}{9} + C.$$

Так как $\sin t = \frac{x}{3}$, $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{9}} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$,

$\operatorname{tg} t = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$, то окончательно имеем: $\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}} = \frac{x}{9\sqrt{9-x^2}} + C$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}}$.

Решение. Заменяем: $x = \frac{2}{\cos t}$. Тогда $dx = \frac{2 \sin t}{\cos^2 t} dt$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} = \int \frac{2 \sin t}{\frac{4}{\cos^2 t} \cdot \sqrt{\frac{4}{\cos^2 t} - 4}} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{4} \int \cos t dt = \frac{1}{4} \sin t + C.$$

Так как $\cot = \frac{2}{x}$, $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}$, то

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{4x} + C.$$

Интегрирование по частям.

Интегрирование по частям называется нахождение интеграла по формуле

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

где $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции от x .

С помощью этой формулы нахождение интеграла $\int u dv$ сводится к отысканию другого интеграла $\int v du$ когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен.

Для интегралов вида $\int P(x)e^{\alpha x} dx$, $\int P(x)\sin \alpha x dx$, $\int P(x)\cos \alpha x dx$, где $P(x)$ – многочлен, за u следует принять $P(x)$, а за dv – соответственно выражение $e^{\alpha x} dx$, $\sin \alpha x dx$, $\cos \alpha x dx$; для интегралов вида $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$ за u принимаются соответственно функции $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, а за dv – выражение $P(x)dx$.

Пример. Найти интеграл $\int x \sin x dx$.

Решение. Положим $u = x$, $dv = \sin x dx$, тогда $du = dx$, $v = -\cos x$.

Следовательно, $\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$.

Пример. Найти интеграл $\int e^x \cos x dx$.

Решение. Положив $u = e^x$, $dv = \cos x dx$, получим $du = e^x dx$, $v = \sin x$;

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

К последнему интегралу снова применим метод интегрирования по частям: $u = e^x$, $dv = \sin x dx$, $du = e^x dx$, $v = -\cos x$. Тогда

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx + C.$$

Решая это уравнение относительно интеграла $\int e^x \cos x dx$, получим

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + C.$$

Интегрирование рациональных функций.

Выражение $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – многочлены m -й и n -й

степени соответственно, называется *рациональной дробью*. Рациональная дробь называется *правильной*, если $m < n$, и *неправильной*, если $m \geq n$. Всякая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы конечного числа простейших дробей следующих четырех типов:

1. $\frac{A}{x - a}$;

$$2. \frac{A}{(x-a)^n}, \text{ где } n - \text{ целое число, большее единицы};$$

$$3. \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \text{ где } \frac{p^2}{4} - q < 0, \text{ т.е. квадратный трехчлен}$$

$x^2 + px + q$ не имеет действительных корней;

$$4. \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, \text{ где } n - \text{ целое число, большее единицы, и}$$

квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней.

Интегрирование простейших дробей первых трех типов.

$$1. \int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C.$$

$$2. \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^n} = A \int (x-a)^{-n} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C$$

$$3. \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx$$

Выделим в числителе дроби производную знаменателя.

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx &= \frac{M}{2} \int \frac{2x + \frac{2N}{M}}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} \int \frac{2x+p + \frac{2N}{M} - p}{x^2+px+q} dx = \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \frac{M}{2} \int \frac{\frac{2N}{M} - p}{x^2+px+q} dx = \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \frac{M}{2} \left(\frac{2N}{M} - p \right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{dx}{x^2+px+q}. \end{aligned}$$

В первом интеграле числитель является производной знаменателя, а во втором интеграле в знаменателе выделяют полный квадрат.

$$\begin{aligned}\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \frac{M}{2} \int \frac{d(x^2 + px + q)}{x^2 + px + q} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + q} = \\ &= \frac{M}{2} \ln|x^2 + px + q| + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4}} = \\ &= \frac{M}{2} \ln|x^2 + px + q| + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)},\end{aligned}$$

$$\text{или } \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \frac{M}{2} \ln|x^2 + px + q| + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2},$$

$$\text{где } t = x + \frac{p}{2}, \quad a = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}.$$

$$\begin{aligned}\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \frac{M}{2} \ln|x^2 + px + q| + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C = \\ &= \frac{M}{2} \ln|x^2 + px + q| + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C.\end{aligned}$$

Интегрирование простейших дробей четвертого типа.

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx, \quad \text{выделим в числителе производную от}$$

квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе:

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x + p) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(x^2 + px + q)^n} dx =$$

$$= \frac{M}{2} \int \frac{(2x+p)}{(x^2+px+q)^n} dx + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

Первый интеграл в правой части равенства легко приводится к табличному, а второй преобразуем:

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4} \right) \right]^n}.$$

Полагая $t = x + \frac{p}{2}$, $a = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$, $dx = dt$, получаем

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

Полученный интеграл находится по рекуррентной формуле:

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot I_{n-1}.$$

Эта формула позволяет после $(n-1)$ – кратного применения свести данный интеграл I_n к табличному интегралу $\int \frac{dt}{t^2+a^2}$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8} dx$

Решение. В знаменателе подынтегральной функции

$\frac{p^2}{4} - q = \frac{(-4)^2}{4} - 8 < 0$, следовательно, интегрируется простейшая дробь третьего типа.

Выделим в числителе дроби производную знаменателя.

$$\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8} dx = \frac{3}{2} \int \frac{(2x-4) - \frac{2}{3} + 4}{x^2-4x+8} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x-4}{x^2-4x+8} dx + 5 \int \frac{dx}{x^2-4x+8} =$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2 - 4x + 8)}{x^2 - 4x + 8} + 5 \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 4} = \frac{3}{2} \ln(x^2 - 4x + 8) + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{2} + C.$$

Интегрирование рациональных дробей с помощью разложения на простейшие дроби.

Перед интегрированием рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ надо сделать следующие алгебраические преобразования и вычисления:

1. если дана неправильная дробь, то выделяют целую часть рациональной дроби, деля числитель $P(x)$ на знаменатель $Q(x)$ по правилу деления многочлена на многочлен. После этого рациональная дробь может быть представлена в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $M(x)$ – многочлен, а $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь.

2. разложить знаменатель дроби на линейные и квадратичные множители: $Q(x) = (x-a)^m \dots (x^2 + px + q)^n \dots$, где $\frac{p^2}{4} - q < 0$, т.е. трехчлен $x^2 + px + q$ имеет комплексные сопряженные корни;

3. правильную рациональную дробь разложить на простейшие дроби:

$$\begin{aligned} \frac{P_1(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)^m} + \dots + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \\ & + \frac{B_nx + C_n}{(x^2 + px + q)^n} + \dots; \end{aligned}$$

4. Вычислить неопределенные коэффициенты $A_1, A_2, \dots, A_m, \dots, B_1, C_1, B_2, C_2, \dots, B_n, C_n, \dots$, для этого все простейшие дроби приводят к общему знаменателю и приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества. Это приводит к системе уравнений, решая которую находят значения интересующих нас коэффициентов.

В результате интегрирования рациональной дроби сведется к нахождению интегралов от многочлена и от простейших рациональных дробей.

Пример. $\int \frac{x^3 - x - 1}{(x-1)(x^2 + x + 2)} dx.$

Решение. Так как подынтегральная функция есть неправильная дробь, то нужно выделить целую часть, разделив числитель на знаменатель,

$$\begin{array}{r} x^3 - x - 1 \quad | \quad x^3 + x - 2 \\ \underline{x^3 + x - 2} \quad 1 \\ -2x + 1 \end{array}$$

где $x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2)$. Следовательно,

$$\frac{x^3 - x - 1}{(x-1)(x^2 + x + 2)} = 1 + \frac{1 - 2x}{(x-1)(x^2 + x + 2)}.$$

Правильную дробь разложим на простейшие:

$$\frac{1 - 2x}{(x-1)(x^2 + x + 2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 2}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и приравнивая числители, получим тождество:

$$1 - 2x = A(x^2 + x + 2) + (x-1)(Bx + C) = x^2(A + B) + x(A - B + C) + (2A - C)$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+B=0 \\ x^1 & A-B+C=-2 \\ x^0 & 2A-C=1 \end{array}$$

Решая эту систему, находим $A=-\frac{1}{4}$, $B\frac{1}{4}$, $C=-\frac{3}{2}$.

Заменяя под знаком интеграла остаточную дробь ее разложением на простейшие дроби (с подставленными в него найденными значениями коэффициентов) и находя нужные интегралы, последовательно получим

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - x - 1}{(x-1)(x^2 + x + 2)} dx &= \int 1 + \frac{-\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}}{x^2 + x + 2} dx = \\ &= \int dx - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4} \int \frac{x-6}{x^2 + x + 2} dx = \\ &= x - \frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{8} \int \frac{2x+1}{x^2 + x + 2} dx - \frac{13}{8} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} = \\ &= x - \frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{8} \ln|x^2 + x + 2| - \frac{13}{4\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C. \end{aligned}$$