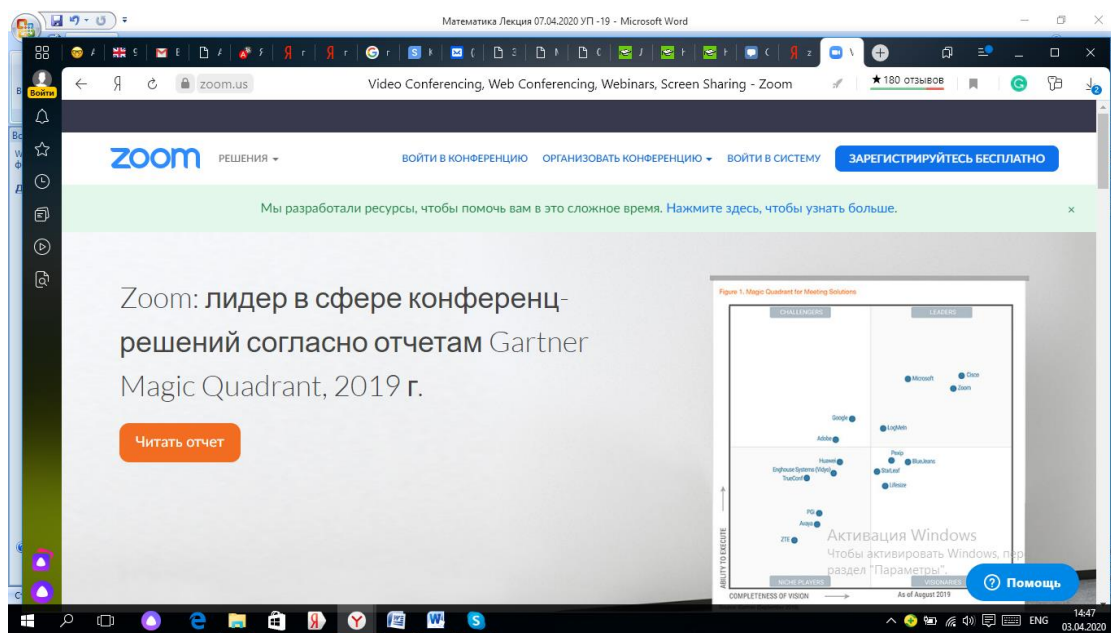


УПЗ-20 Математика

Практические занятия будут проходить в режиме онлайн в программе <https://zoom.us/>



В понедельник 25.01 и 27.01 в 8.30, на почту группы придет приглашение для входа в конференцию.

Ссылка для входа:

<https://us04web.zoom.us/j/73094952010?pwd=bTZob0ZrbzdNa081dGVZOVAwVk5FQT09>

В ходе практических занятий будут разобраны основные задания по темам матрицы, системы линейных алгебраических уравнений, векторы, прямая и плоскость. Также в ходе практических занятий будет организован прием установочной контрольной работы.

Крайний срок сдачи установочной контрольной работы 27.01.2020

Лекционный материал представлен ниже.

Зачет будет проходить в формате тестирования и состоять из 2х промежуточных тестов и 1 итогового.

Перечень контрольных точек, после сдачи которых студент получает зачет:

1. Конспект лекций, сформированных в 1 файл, в названии файла написать ФИО и группу. Необходимо прикрепить в личный кабинет.

2. Установочные задания необходимо собрать в 1 файл и отправить личным сообщением в ВК или на почту einclub@mail.ru. Также обязательно прикрепить в личный кабинет. В названии файла написать ФИО и группу. Для допуска к зачету необходимо не просто сдать задания, но и защитить их.
3. Также необходимо сдать 2 промежуточных тестирования на сайте i-exam.ru. Минимальный процент выполненных заданий не менее 50%. Если результат ниже, необходимо переписывать.

ООП (НП): 38.03.03 - Управление персоналом

Дисциплина: Математика

Группа: УПз-20

N	Идентификатор студента	Группа	Логин	Пароль
1	Анпилогова Татьяна Сергеевна	УПз-20	22ps711717	asey48j2ty
2	Бурдинский Дмитрий Владимирович	УПз-20	22ps711718	nvnadfjkvr
3	Куликова Валерия Михайловна	УПз-20	22ps711719	r7nynxtpxd
4	Наделяева Виктория Семеновна	УПз-20	22ps711720	vicr4ci7zd
5	Тюкавкин Роман Владимирович	УПз-20	22ps711721	9kbvef4n2z
6	Этух Людмила Владимировна	УПз-20	22ps711722	nihymxan87
7	Яппарова Ирина Георгиевна	УПз-20	22ps711723	xa4utedp7c

ООП (НП): 38.03.03 - Управление персоналом

Дисциплина: Математика

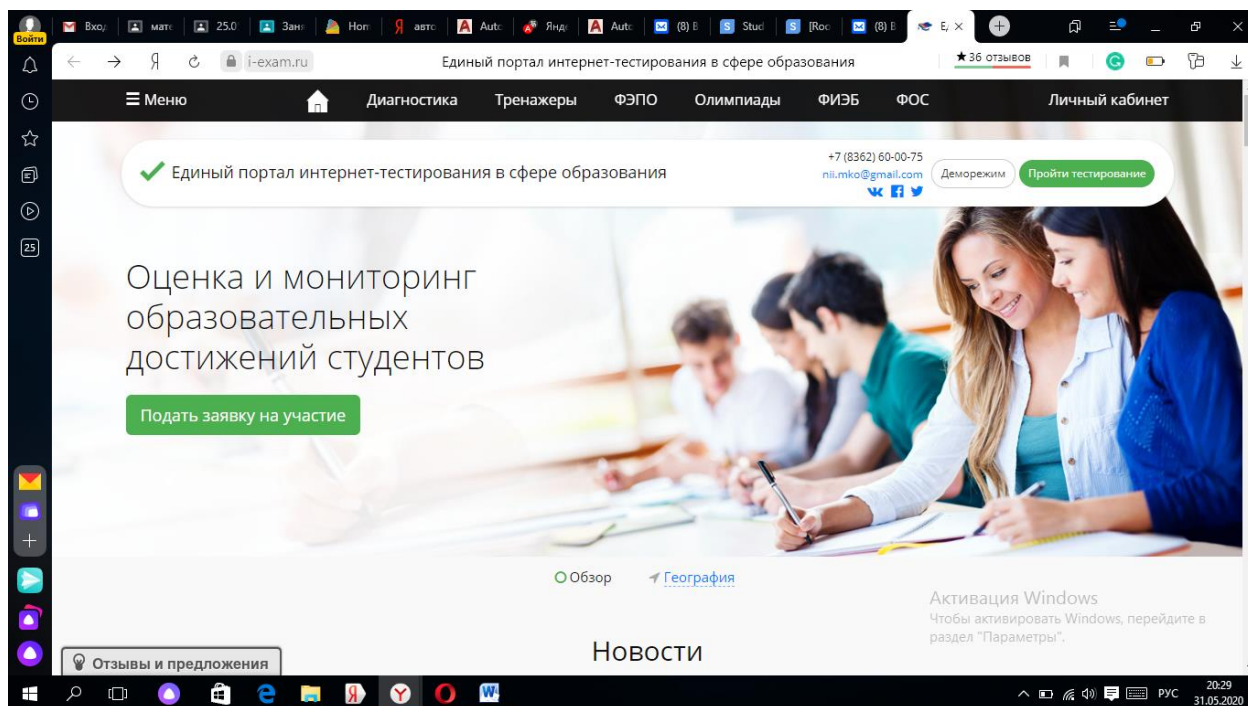
Группа: УПз-20

N	Идентификатор студента	Группа	Логин	Пароль
1	Анпилогова Татьяна Сергеевна	УПз-20	22ps711774	ucsbm73629
2	Бурдинский Дмитрий Владимирович	УПз-20	22ps711775	dhave4t6dd
3	Куликова Валерия Михайловна	УПз-20	22ps711776	h7xhn7fr8b
4	Наделяева Виктория Семеновна	УПз-20	22ps711777	e73tcvjkkd
5	Тюкавкин Роман Владимирович	УПз-20	22ps711778	vddbr8yeus
6	Этух Людмила Владимировна	УПз-20	22ps711779	unzaejdbkm
7	Яппарова Ирина Георгиевна	УПз-20	22ps711780	kfpbbxhkf7

Зачет будет приниматься в форме тестирования на сайте i-exam.ru по пройденным темам. Минимальный процент выполненных заданий не менее 50%. Если результат ниже, необходимо переписывать.

Варианты итогового тестирования будут отправлены в день зачета на почту группы.

Для прохождения тестирований необходимо зайти на сайт <https://i-exam.ru/> . В верхнем правом углу нажать кнопку пройти тестирование. Ввести логин и пароль в соответствии с вариантом. Тестирование можно пройти только 1 раз.



В случае если ваш процент ниже 50%, напишите на почту einclub@mail.ru или в ВК. Обязательно укажите ФИО и группу, а также укажите в заголовке, что переписываете 1 или 2 тестирование.

Всем удачи!

По вопросам пишите на почту einclub@mail.ru или звоните +7 914 356 3777

МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

1.1. Матрицы и действия над ними

Таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m,n}, \quad (1.1.)$$

называется *матрицей* порядка $m \times n$. Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы.

1.1.1. Виды матриц

1. Матрица порядка $n \times n$ называется *квадратной* матрицей порядка n ($A = (a_{ij})_n$).

2. Матрица порядка $m \times 1$ называется *матрица столбец*.

3. Матрица порядка $1 \times n$ называется *матрица строка*.

Элементы матрицы a_{ij} , у которых номер столбца равен номеру строки ($i = j$), называются диагональными и образуют главную диагональ матрицы. Для квадратной матрицы главную диагональ образуют элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

4. Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется диагональной. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \text{диагональная матрица третьего порядка.}$$

5. Если у диагональной матрицы n -го порядка все диагональные элементы равны единице, то матрица называется единичной.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{единичная матрица третьего порядка}$$

6. Матрица любого размера называется нулевой, или нуль матрицей, если все ее элементы равны нулю.

1.1.2. Операции над матрицами

Две матрицы $A = (a_{ij})_{m,n}$ и $B = (b_{ij})_{m,n}$ называются *равными* ($A=B$), если равны их соответствующие элементы, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$).

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})_{m,n}$ и $B = (b_{ij})_{m,n}$ одинакового порядка называется матрица $C = (c_{ij})_{m,n}$ ($C=A+B$), элементы которой определяются равенствами: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$).

Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{m,n}$ на число α называется матрица $B = (b_{ij})_{m,n}$ ($B = \alpha A$ или $B = A \alpha$), элементы которой определяются равенствами: $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$ ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$).

Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{m,p}$ на матрицу $B = (b_{ij})_{p,n}$ называется матрица $C = (c_{ij})_{m,n}$ ($C = AB$), элементы которой определяются равенствами:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ip} b_{pj} \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n).$$

Заметим, что умножение матрицы A на матрицу B определяется только при условии, что число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B .

Пример 1. Выполнить действия над матрицами A и B : $(2A-B) \cdot (A+3B)$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Данное выражение содержит следующие операции над матрицами:

- 1) произведение матрицы на число.
- 2) сумма двух матриц;
- 3) произведение двух матриц.

Используя определения, данные выше, получим:

$$2A - B = 2A + (-1)B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$A + 3B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 6 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 5 & -3 & 10 \\ 10 & 8 & 6 \end{pmatrix};$$

$$(2A - B) \cdot (A + 3B) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 5 & -3 & 10 \\ 10 & 8 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \cdot 7 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 10 & 0 \cdot 6 + 5 \cdot (-3) + 2 \cdot 8 & 0 \cdot 1 + 5 \cdot 10 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 7 + 1 \cdot 5 + 6 \cdot 10 & 3 \cdot 6 + 1 \cdot (-3) + 6 \cdot 8 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 10 + 6 \cdot 6 \\ (-1) \cdot 7 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 10 & (-1) \cdot 6 + 2 \cdot (-3) + 5 \cdot 8 & (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 1 & 62 \\ 86 & 63 & 49 \\ 53 & 28 & 49 \end{pmatrix}.$$

Многие свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций над матрицами (что следует из определений этих операций):

1. $A + B = B + A.$
2. $(A + B) + C = A + (B + C).$
3. $(A + B)\alpha = \alpha A + \alpha B.$
4. $A(B + C) = AB + AC.$
5. $(A + B)C = AC + AB.$
6. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$
7. $\alpha(A(BC)) = (AB)C$

Однако имеются и специфические свойства матриц. Так, операция умножения матриц имеет некоторые отличия от умножения чисел:

а) Если произведение матриц $A \cdot B$ существует, то после перестановки сомножителей местами произведения матриц $B \cdot A$ может и не существовать.

Примером может послужить умножение матриц $A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 3}$ произведение этих двух матриц существует, тогда как $B_{3 \times 3} \cdot A_{2 \times 3}$ не существует, так как число столбцов первой матрицы не совпадает с числом строк второй матрицы.

б) Если даже произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ существуют, то они могут быть матрицами разных размеров.

в) В случае, когда оба произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ существуют и обе матрицы одинакового размера (это возможно только при умножении квадратных матриц A и B одного порядка), коммутативный (переместительный) закон умножения, вообще говоря, не выполняется, т.е. $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Возведение в степень. Целой положительной степенью

A^m ($m > 1$) квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A , т.е. $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{m \text{ раз}}$.

Заметим, что операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц.

Транспонирование матрицы — переход от матрицы A к матрице A' (A^T), в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка. Матрица A' , называется транспонированной относительно матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Свойства операции транспонирования:

1. $(A')' = A$.
2. $(\alpha A)' = \alpha A'$
3. $(A + B)' = A' + B'$
4. $(AB)' = B'A'$.

1.2. Определитель матрицы

1.2.1. Определители квадратных матриц

Определителем матрицы первого порядка, соответствующим матрице $A = (a_{11})$, или определителем первого порядка, называется элемент a_{11} . Этот определитель обозначают $|a_{11}|$ или Δ .

Определителем второго порядка, соответствующим матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ называется число } a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Этот определитель обозначают $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ или Δ .

Следовательно, согласно определению $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определителем третьего порядка, соответствующим матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ называется число, обозначаемое } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ или } \Delta \text{ и}$$

определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для запоминания этого определения существует простое правило, которое называется «правилом треугольников». Каждое слагаемое, стоящее в правой части со знаком плюс, представляет собой произведение трех элементов определителя, взятых, как показано на схеме 1. Каждое слагаемое, стоящее со знаком минус, представляет собой произведение трех элементов определителя, взятых, как показано на схеме 2.

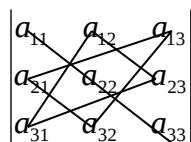


Схема 1

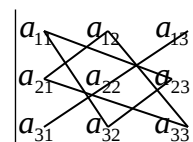


Схема 2

Определитель n-ого порядка

Минором элемента a_{ij} ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$) определителя n- порядка называется определитель второго порядка, получающийся из данного

определителя третьего порядка вычеркиванием i -той строки j -того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij} . Минор элемента a_{ij} обозначают M_{ij} .

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя n -порядка называется произведение минора M_{ij} этого элемента на число $(-1)^{i+j}$, где i - номер строки, j - номер столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij} . Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначают A_{ij} .

Таким образом, $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

Справедлива следующая **теорема**. Частный случай теоремы Лапласа.

Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^n a_{is}A_{is}$$

(разложение по элементам i -й строки; $i = 1, 2, \dots, n$);

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^n a_{sj}A_{sj}$$

(разложение по элементам j -го столбца; $j = 1, 2, \dots, n$).

Значение теоремы Лапласа состоит в том, что позволяет свести вычисление определителей n -го порядка к вычислению более простых определителей $(n-1)$ -го порядка.

1.2.2. Свойства определителей

1. Если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен 0.

2. Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число α , то ее определитель умножится на это число α .

3. При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется:
 $|A'| = |A|$.

4. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.

5. Если квадратная матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен 0.

6. Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен 0.

7. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна 0, т.е.

$$\sum_{s=1}^n a_{is}A_{js} = 0 \text{ при } i \neq j.$$

8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число.

9. Сумма произведений произвольных чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ на алгебраические дополнения элементов любой строки (столбца) равна определителю матрицы, полученной из данной заменой элементов этой строки (столбца) на числа $b_1, b_2, \dots, b_n$.

10. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей: $|C| = |A| \cdot |B|$, где $C = A \cdot B$; A и B - матрицы n -го порядка.

Замечание. Из свойства 10 следует, что даже если $AB \neq BA$, то $|AB| = |BA|$.

Перечисленные свойства определителей позволяют существенно упростить их вычисление, особенно для определителей высоких порядков. При вычислении определителей целесообразно так преобразовать исходную матрицу с помощью свойств 1—9, чтобы преобразованная матрица имела строку (или столбец), содержащую как можно больше нулей, а потом найти определитель разложением по этой строке (столбцу).

Пример 2. Вычислить определитель четвертого порядка:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Решение. Преобразуем матрицу так, чтобы в 3-й строке все элементы, кроме одного, обращались в 0. Для этого умножим, например, элементы 3-го столбца на (-4) и на 2 и прибавим их соответственно к элементам 1-го и 2-го столбцов. Раскладывая полученный определитель по элементам третьей строки, найдем

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 2 & -2 & 4 \\ 13 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 12 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix}$$

Полученный определитель третьего порядка можно вычислить по правилу треугольников или с помощью теоремы Лапласа, однако можно продолжить упрощение матрицы. «Обнулим» в матрице третьего порядка элементы 2-й строки (кроме одного). Для этого элементы 3-го столбца матрицы, предварительно умножив на (-13) и на 4, сложим с элементами 1-го и 2-го столбцов соответственно:

$$|A| = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -88 & 36 & 6 \end{vmatrix}$$

Раскладывая по элементам второй строки и вынося общие множители, получаем:

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -40 & 18 \\ -88 & 36 \end{vmatrix} = (-1)(-8) \cdot 18 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -144.$$

1.3. Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется *обратной матрицей* по отношению к матрице $A = (a_{ij})$, если выполняется условие: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{единичная матрица.}$$

Если определитель матрицы A отличен от нуля, то такая матрица называется невырожденной, в противном случае матрица называется вырожденной.

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы).

Обратная матрица A^{-1} существует (и единственна) тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная.

Необходимость.

Пусть матрица A имеет обратную $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. По свойству 10 определителей имеем $|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$, т.е. $|A| \neq 0, |A^{-1}| \neq 0$.

Достаточность.

Пусть $|A| \neq 0$. Рассмотрим квадратную матрицу n -го порядка $\tilde{A}$ – присоединительная матрица, элементы которой являются алгебраическими дополнениями элементов матрицы A' , транспонированной к A : $\widetilde{a_{ij}} = A'_{ij} = A_{ji}$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$). Тогда элементы произведения матриц $\tilde{A} \cdot A = B$ определяются по правилу умножения матриц:

$$b_{ij} = \sum_{s=1}^n \widetilde{a_{is}} a_{sj} = \sum_{s=1}^n A_{si} a_{sj} = \begin{cases} |A| & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

Поэтому матрица B является диагональной, элементы ее главной диагонали равны определителю исходной матрицы:

$$B = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}$$

Аналогично доказывается, что произведение A на $\tilde{A}$ равно той же матрице B : $A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = B$. Отсюда следует, что если в качестве обратной матрицы взять матрицу $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$, ($|A| \neq 0$), то произведения $A^{-1} \cdot A$ и $A \cdot$

A^{-1} равны единичной матрице E n -го порядка: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot B = E$.

Докажем единственность обратной матрицы. Предположим, что существуют еще матрицы X и Y такие, что $X \neq A^{-1}$ и $Y \neq A^{-1}$, и выполняются равенства: $AX=E$ и $YA=E$. Тогда, умножая на A^{-1} слева первое из них, получаем: $A^{-1}AX = A^{-1}E$, откуда $EX = A^{-1}E$, т.е. $X = A^{-1}$. Аналогично, умножая второе равенство на A^{-1} справа, получаем $Y = A^{-1}$. Единственность доказана.

Алгоритм вычисления обратной матрицы:

1. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица A -

вырожденная и обратной матрицы A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$, то матрица A — невырожденная и обратная матрица существует.

2. Находим матрицу A' , транспонированную к A .

3. Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной

матрицы и составляем из них присоединенную матрицу $\tilde{A}$.

4. Вычисляем обратную матрицу по формуле.

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы

$$|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$$

Пример 3. Найти матрицу, обратную к данной матрице A .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1) Вычислим определитель матрицы A :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1 - 5 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 \cdot 1 = 5.$$

$\Delta \neq 0$, следовательно, обратная матрица существует и единственна.

2) Находим алгебраические дополнения элементов определителя матрицы A .

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9, A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1, A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2, A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12, A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1, A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

3) Составим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

4) Проверим правильность нахождения матрицы A^{-1} , исходя из определения обратной матрицы.

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично $A^{-1} \cdot A = E$. Следовательно, обратная матрица найдена верно.

1.4. Ранг матрицы

Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы. Ранг матрицы A обозначается $\text{rang} A$, или $r(A)$.

Из определения следует:

а) ранг матрицы $A_{n \times m}$ не превосходит меньшего из ее размеров, т.е. $r(A) < \min(m; n)$;

б) $r(A) = 0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю, т.е. $A = 0$;

в) для квадратной матрицы n -го порядка $r(A) = n$ тогда и только тогда, когда матрица A — невырожденная.

Пример 4. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -8 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение.

Матрица A имеет четвертый порядок, поэтому $r(A) < 4$. Однако $|A| = 0$, так как матрица A содержит нулевой столбец, поэтому $r(A) < 3$. Все подматрицы третьего порядка тоже содержат нулевой столбец и поэтому имеют нулевые определители, значит $r(A) < 2$. Все подматрицы второго порядка либо имеют нулевой столбец (второй или четвертый), либо имеют пропорциональные столбцы (первый и третий), поэтому тоже имеют нулевые определители; таким образом $r(A) < 1$. Поскольку матрица A содержит ненулевые элементы, т.е. невырожденные подматрицы первого порядка, то $r(A) = 1$.

В общем случае определение ранга матрицы перебором всех миноров достаточно трудоемко. Для облегчения этой задачи используются преобразования, сохраняющие ранг матрицы.

Назовем элементарными преобразованиями матрицы следующие:

- 1) отбрасывание нулевой строки (столбца);
- 2) умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю;
- 3) изменение порядка строк (столбцов) матрицы;
- 4) прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число;
- 5) транспонирование матрицы.

Теорема. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

При изучении свойств определителей было показано, что при преобразованиях квадратных матриц их определители либо сохраняются, либо умножаются на число, не равное нулю. В результате сохраняется

наивысший порядок отличных от нуля миноров исходной матрицы, т.е. ее ранг не изменяется.

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к так называемому ступенчатому виду, когда вычисление ее ранга не представляет труда.

Матрица A называется ступенчатой, если она имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix}, \text{ где } a_{ij} \neq 0, i = 1, 2, \dots, r; r \leq k.$$

Замечание. Условие $r \leq k$ всегда может быть достигнуто транспонированием матрицы.

Очевидно, что ранг ступенчатой матрицы равен r , так как имеется минор r -го порядка, не равный нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{rr} \neq 0.$$

Пример 5. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение.

1. Если $a_{11} = 0$, то при перестановке строк или столбцов добиваемся того, что $a_{11} \neq 0$. В данном примере поменяем местами, например, 1-ю и 2-ю строки матрицы (см. ниже).

2. Если $a_{11} \neq 0$, то умножая элементы 2-й, 3-й и 4-й строк на подходящие числа (именно на $\frac{-a_{21}}{a_{11}} = 0, \frac{-a_{31}}{a_{11}} = 2, \frac{-a_{41}}{a_{11}} = 1$) и прибавляя полученные числа соответственно к элементам 2-й, 3-й и 4-й строк, добьемся того, чтобы все элементы 1-го столбца (кроме a_{11}) равнялись нулю:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Если в полученной матрице $a_{22} \neq 0$ (у нас $a_{22} = -1$), то умножая элементы 3-й и 4-й строк на подходящие числа (а именно, на $\frac{-a_{32}}{a_{22}} = -3, \frac{-a_{42}}{a_{22}} = -3$), добьемся того, чтобы все элементы 2-го столбца (кроме a_{12}, a_{22}) равнялись нулю.

Если в процессе преобразований получаются строки (или столбцы), целиком состоящие из нулей (как в данном примере), то отбрасываем эти строки (или столбцы):

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет ступенчатый вид и содержит миноры второго порядка, не равные нулю, например $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Поэтому ранг полученной ступенчатой, а следовательно, и данной матрицы равен 2.

Для рангов матриц справедливы следующие соотношения:

$$1) r(A + B) \leq r(A) + r(B), \quad 2) r(A + B) \geq |r(A) - r(B)|,$$

$$3) r(AB) \leq \min\{r(A); r(B)\}, \quad 4) r(A'A) = r(A),$$

$$5) r(AB) = r(A), \text{ если } B \text{ — квадратная матрица и } |B| \neq 0,$$

$$6) r(AB) \geq r(A) + r(B) - n, \text{ где } n - \text{число столбцов матрицы } A \text{ или строк матрицы } B.$$

Совместная система уравнений называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если она имеет более одного решения. Например, система уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 20, \\ x_1 - x_2 = 10 \end{cases}$ – совместная и определенная, так как имеет единственное решение (10; 0); система $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 2x_1 + x_2 = 15 \end{cases}$ – несовместная; а система уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 = 20 \end{cases}$ – совместная и неопределенная, так как имеет более одного, а точнее

бесконечное множество решений ($x_1 = c, x_2 = 10 - 2c$), где c — любое число.

Две системы уравнений называются равносильными, или эквивалентными, если они имеют одно и то же множество решений. С помощью элементарных преобразований системы уравнений, рассмотренных в главе 1 применительно к матрицам (например, умножение обеих частей уравнений на числа, не равные нулю; сложение уравнений системы), получается система (2.1), равносильная данной.

Запишем систему (2.1) в матричной форме. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где A — матрица коэффициентов при переменных, или матрица системы, X — матрица-столбец переменных; B — матрица-столбец свободных членов.

Так как число столбцов матрицы $A_{n \times m}$ равно числу строк матрицы $X_{n \times 1}$ то их произведение

[illegible]

есть матрица-столбец. Элементами полученной матрицы являются левые части системы (2.1). На основании определения равенства матриц систему (2.1) можно записать в виде:

$$A \cdot X = B. \quad (2.2)$$

2.2. Система n линейных уравнений с n переменными. Метод обратной матрицы и формулы Крамера

2.2.1. Метод обратной матрицы

Пусть число уравнений системы (2.1) равно числу переменных, т.е. $n=m$. Тогда матрица системы является квадратной, а ее определитель $\Delta = |A|$ называется определителем системы.

Рассмотрим решение системы двух уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \quad (2.3)$$

в которой хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля.

Для решения этой системы исключим переменную x_2 , умножив первое уравнение на a_{22} , второе — на $(-a_{12})$ сложив их. Затем исключим переменную x_1 , умножив первое уравнение на $(-a_{21})$, второе — на a_{11} и также сложив их. В результате получим систему:

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{cases}$$

Выражение в скобках есть определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Обозначив,

$$\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{21} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{21} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = b_1a_{22} - b_2a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

система примет вид: $\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_1; \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_2. \end{cases}$

Из полученной системы следует, что если определитель системы $\Delta \neq 0$, то система (2.3) имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Если $\Delta = 0$, $\Delta_1 \neq 0$ (или $\Delta_2 \neq 0$), то система (2.3) несовместная, так как этом случаи приводится к виду:

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 = \Delta_1; \\ 0 \cdot x_2 = \Delta_2. \end{cases}$$

Если $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то система (2.3) неопределенная и имеет бесконечное множество решений, так как в этом случае приводится к виду:

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 = 0; \\ 0 \cdot x_2 = 0. \end{cases}$$

Для получения решения системы (2.1) при $n = m$ в общем виде предположим, что квадратная матрица системы $A_{n \times m}$ невырожденная, т.е. ее определитель $\Delta = |A| \neq 0$. В этом случае существует обратная матрица A^{-1} .

Умножая слева обе части матричного равенства (2.2) на матрицу A^{-1} , получим $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. Так как $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, то решением системы методом обратной матрицы будет матрица-столбец

$$X = A^{-1}B. \quad (2.4)$$

2.2.1. Формулы Крамера

Теорема Крамера.

Пусть Δ — определитель матрицы системы A , Δ_j — определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j -го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (2.5)$$

Формулы (2.5) получили название формул Крамера.

Обратная матрица вычисляется по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$. $\tilde{A}$ — матрица, присоединенная к матрице A . Так как элементы матрицы $\tilde{A}$ есть алгебраические дополнения элементов матрицы A^T , транспонированной к A , то запишем равенство (2.4) в развернутой форме:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $|A| = \Delta$, получим после умножения матриц

[illegible]

откуда следует, что для любого j ($j = 1, 2, \dots, n$)

$$x_j = \frac{1}{\Delta} (b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots b_n A_{nj}).$$

На основании свойства 9 определителей

$b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj} = \Delta_j$ определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой j -го столбца ($j = 1, 2, \dots, n$) столбцом свободных членов.

Следовательно, $x_j = \frac{\Delta_j}{\lambda}$.

Заметим, что фактически формулы Крамера были получены нами в частном случае при решении системы (2.4) $n = 2$ уравнений с двумя переменными.

Пример 6. Дана система:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 17 \end{cases}$$

Решить ее двумя способами:

- 1) по формулам Крамера
- 2) матричным способом

Решение

1. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5.$$

$\Delta \neq 0$, следовательно, система совместна и имеет единственное решение. Находим его, используя формулы Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 7 \\ 10 & 3 & -3 \\ 17 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 10, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 10 & -3 \\ 3 & 17 & 5 \end{vmatrix} = 15, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & 10 \\ 3 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 5,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1.$$

2. Перепишем систему (2) в виде $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Решение системы ищем в виде $X = A^{-1} \cdot B$, где A^{-1} - матрица, обратная к A . Найдем A^{-1} (см. задание 2):

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 21 & 19 & -18 \\ -19 & -16 & 17 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$X = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 21 & 19 & -18 \\ -19 & -16 & 17 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

T.e. $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 1$.

2.3. Метод Гаусса решения произвольных систем линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим систему t линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

[illegible]

Матрица

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

называется *расширенной матрицей* системы (2.6).

следующие действия:

- 1) перестановка строк (столбцов);
- 2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;
- 3) прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), предварительно умноженных на некоторое число.

С помощью элементарных преобразований любая матрица может быть приведена к трапециевидному виду.

Метод Гаусса заключается в приведении расширенной матрицы системы к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные. Таким образом, расширенная матрица (3.10) может быть приведена к виду:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{rr} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_m \end{array} \right), \quad (2.7)$$

где $r \leq \min(m, n)$.

Матрица (2.7) является расширенной матрицей системы

[illegible]

Система (2.8) эквивалентна исходной системе (2.6).

Если хотя бы одно из чисел $b'_{r+1}, \dots, b'_m$ отлично от нуля, то система (2.8), а, следовательно, и исходная система (2.6) не совместна, то есть *не имеет решений*.

Если же $b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0$, то система (2.8) совместна. Следовательно, совместна и исходная система (2.6).

Очевидно, что после отбрасывания «лишних» уравнений возможны два случая: а) число уравнений системы (2.8) равно числу переменных, т.е. $r = m$ (в этом случае система (2.8) имеет треугольный вид); б) $r < m$ (в этом случае система (2.8) имеет ступенчатый вид).

Переход системы (2.6) к равносильной ей (2.8.) называется прямым ходом метода Гаусса, а нахождение переменных из системы (2.8) — обратным ходом.

Достоинства метода Гаусса по сравнению с другими:

- значительно менее трудоемкий;
- позволяет однозначно установить, совместна система или нет, а в случае совместности найти ее решения (единственное или бесконечное множество);
- дает возможность найти максимальное число линейно независимых уравнений — ранг матрицы системы.

Вопрос о разрешимости системы (2.1) в общем виде рассматривается в следующей теореме.

Теорема Кронекера—Капелли.

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы.

Для совместных систем линейных уравнений верны следующие теоремы.

1. Если ранг матрицы совместной системы равен числу переменных, т.е. $r = m$, то система (3.1) имеет единственное решение.

2. Если ранг матрицы совместной системы меньше числа переменных, т.е. $r < m$, то система (3.1) неопределенная и имеет бесконечное множество решений.

Пример 8. Найти решение системы уравнений методом Гаусса:

А) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array} \right).$$

Шаг 1. Так как $a_{11} = 1 \neq 0$, то умножая первую строку матрицы на числа (-2) , (-3) , (-2) и прибавляя полученные строки соответственно ко второй, третьей, четвертой строкам, исключим переменную x_1 из всех строк, начиная со второй. Заметив, что в новой матрице $a_{22}^{(1)} = 0$, поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 20 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array} \right)$$

Шаг 2. Так как теперь $a_{22}^{(2)} = -4 \neq 0$, то умножая вторую строку на $(-7/4)$ и прибавляя полученную строку к четвертой, исключим переменную x_2 из всех строк, начиная с третьей:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13,5 & 9 & 4,5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{117}{16} & \frac{117}{8} \end{array} \right).$$

Шаг 3. Учитывая, что $a_{33}^{(2)} = -8 \neq 0$, умножаем третью строку на $13,5/8 = 27/16$, и прибавляя полученную строку к четвертой, исключим из нее переменную x_3 .

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -4x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -14, \\ -8x_3 + x_4 = 6, \\ -\frac{117}{16}x_4 = \frac{117}{8}, \end{cases}$$

откуда, используя обратный ход метода Гаусса, найдем из четвертого уравнения $x_4 = -2$; из третьего $x_3 = \frac{6-x_4}{-8} = -1$; из второго

$x_2 = \frac{-14-8x_4+10x_3}{-4} = 2$ и из первого уравнения $x_1 = 6 + 2x_4 - 3x_3 - 2x_2 = 1$, т.е. решение системы (1; 2; -1; 2).

Б) Найти решение системы методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение.

Преобразуем расширенную матрицу системы

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Итак, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво — оно привелось к неверному равенству $0=-1$, следовательно, данная система несовместна.

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

3.1. Векторы на плоскости и в пространстве

Величины, которые встречаются в физике, механике и прикладных науках могут быть поделены на две группы. В первую группу входят величины, которые характеризуются только числовым значением (числом). К ним относятся масса, температура, длина, площадь, объем. Такие величины называются *скалярными*. Ко второй группе относятся величины, которые

характеризуются числовым значением и направлением. Такие величины называются *векторными величинами*. К ним относятся: скорость, ускорение, вес, сила.

Векторную величину можно задать с помощью направленного отрезка, предварительно выбрав линейный масштаб.

Вектор, началом которого является точка A , а концом точка B обозначается $\overrightarrow{AB}$ (рис.1). Вектор можно также обозначать одной буквой, как показано на рис.2.

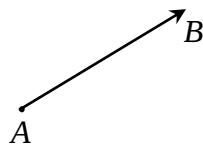


Рис.1

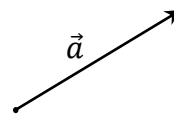


Рис.2

Определение. Длиной или модулем вектора называется длина отрезка, изображающего вектор. Обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\vec{a}|$.

Определение. Нулевым называется вектор, начало и конец которого совпадают. Обозначается $\vec{0}$.

Длина нулевого вектора считается равной нулю. Нулевой вектор не имеет определенного направления.

Определение. Коллинеарными называются векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых. Обозначается $\vec{a} || \vec{b}, \vec{b} || \vec{c}$ (рис.3).

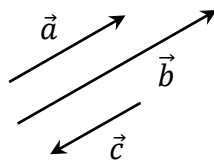


Рис.3

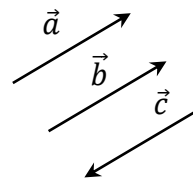


Рис.4

Коллинеарные векторы могут иметь одинаковое направление или противоположное. В первом случае их называют *сонаправленными* векторами, во втором – *противоположно направленными* (на рис.3 векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ противоположно направлены).

Замечание. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Определение. Два ненулевых вектора называются *равными*, если выполнены условия:

- 1) векторы коллинеарны;
- 2) сонаправлены;
- 3) равны по длине.

Равенство записывают так: $\vec{a} = \vec{b}$ (рис.4).

Определение. Два ненулевых вектора называются *противоположными*, если выполнены условия:

- 1) векторы коллинеарны;
- 2) противоположно направлены;
- 3) равны по длине.

Это записывают так: $\vec{c} = -\vec{b}$ (рис.4). Вектор, противоположный вектору $\vec{b}$ обозначается $-\vec{b}$.

Замечание. Любые векторы, в любом количестве можно привести к общему началу, то есть построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало в произвольно выбранной точке O .

В дальнейшем мы будем иметь дело со свободными векторами, то есть векторами, определенными с точностью до параллельного переноса.

3.2. Линейные операции над векторами

К линейным операциям над векторами относятся: сложение векторов, вычитание векторов, умножение вектора на число. Рассмотрим эти операции.

Сложение векторов. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что начало вектора $\vec{b}$ совпадает с концом вектора $\vec{a}$. Такое правило сложения векторов называется *правилом треугольника* (рис.5).

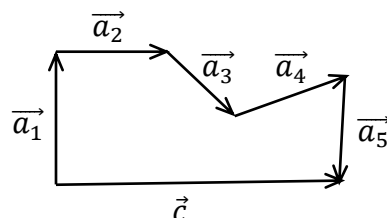
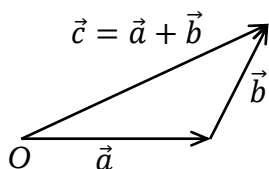


Рис.5

Для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сумма определяется единственным образом.

Рис.6

Сумму любого конечного числа векторов осуществляют с помощью *правила многоугольника*. Сложение пяти векторов показано на рисунке 6. Суммой векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5$ является вектор $\vec{c}$. Таким образом, для сложения конечного числа векторов надо выстроить их последовательно, то есть прикладывая начало каждого следующего вектора к концу предыдущего, тогда вектор суммы будет исходить из начала первого вектора в конец последнего.

Другое важное правило сложения двух векторов называется *правилом параллелограмма*. При сложении векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по правилу параллелограмма, их необходимо отложить от одной точки O , затем достроить конструкцию до параллелограмма. В этом случае говорят, что параллелограмм построен на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда вектор, лежащий на диагонали этого параллелограмма, также выходящий из точки O , является вектором суммы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис.7).

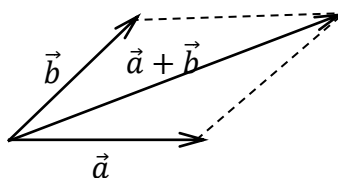


Рис.7

Из определения суммы векторов следует, что сумма двух противоположных векторов равна нулевому вектору: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Сложение векторов подчиняется следующим законам:

- 1) ассоциативности: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;

2) коммутативности: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Вычитание векторов. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$.

Таким образом, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ тогда и только тогда, когда $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$.

Для геометрического построения вектора разности из произвольного начала – точки O строим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, достраиваем конструкцию до треугольника, вектор $\vec{c}$ направляем таким образом, чтобы при сложении с вектором $\vec{b}$ по правилу треугольника, получался бы вектор $\vec{a}$. (рис.8).

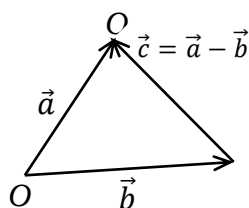


Рис.8

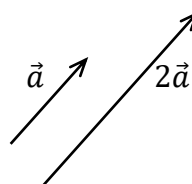


Рис.9

Умножение вектора на число. Произведением вектора $\vec{a}$ на число α называется вектор $\overline{\alpha\vec{a}}$, удовлетворяющий условиям:

- 1) $|\overline{\alpha\vec{a}}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$;
- 2) $\overline{\alpha\vec{a}}$ сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если $\alpha > 0$;
 $\overline{\alpha\vec{a}}$ противоположно направлен с вектором $\vec{a}$, если $\alpha < 0$.
- 3) длина вектора равна $|\overline{\alpha\vec{a}}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$.

Если $\alpha = 0$, то $\overline{\alpha\vec{a}} = \vec{0}$. Геометрическая интерпретация умножения вектора на число показана на рисунке 9.

Операция умножения вектора на число подчиняется следующим законам:

- 1) ассоциативности: $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{a}$;
- 2) дистрибутивности: $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ или $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

Пример. Пусть $ABCD$ - параллелограмм. O – точка пересечения его диагоналей. Полагая, что $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$, выразить векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

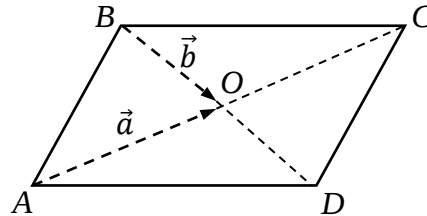


Рис.10

Рассмотрим $\triangle OCD$ (рис.10):

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \vec{a} - \vec{b};$$

$$\text{из } \triangle BOC: \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \vec{b} + \vec{a};$$

Далее заметим, что $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC} = \vec{b} - \vec{a}$ и $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC} = -\vec{a} - \vec{b}$.

3.3. Проекция вектора на ось

Определение. Проекцией точки M на ось l называется основание A перпендикуляра MA на ось l (рис.1).

Определение. Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l называется длина отрезка AB , где точка A – проекция начала вектора на ось, а точка B – проекция конца вектора на ось l . Обозначается так: $\text{пр}_l \vec{a}$ (рис.11).

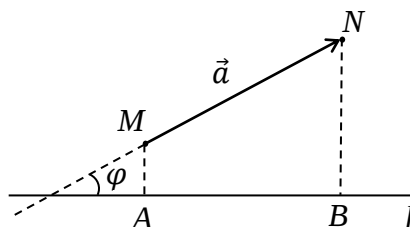


Рис.11

Рассмотрим основные теоремы о проекциях векторов.

Теорема 1. Проекция вектора на какую-либо ось равна произведению модуля этого вектора на косинус угла наклона вектора к оси:

$$\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi.$$

Теорема 2. Проекция суммы векторов на какую-либо ось равна сумме проекций этих векторов на данную ось.

Теорема 3. При умножении вектора на число, его проекция также умножается на это число.

3.4. Прямоугольная декартова система координат в пространстве

Три взаимно перпендикулярные оси Ox, Oy, Oz , проходящие через некоторую точку O , образуют *прямоугольную декартову систему координат в пространстве* (рис.12).

Точка O называется началом координат, прямые Ox, Oy, Oz — координатными осями. Ось Ox называется осью абсцисс, ось Oy — осью ординат, ось Oz — осью аппликат.

Декартова система координат называется *прямоугольной*, если все ее базисные векторы попарно перпендикулярны и их модули равны единице. Часто для векторов такого базиса вводят специальные обозначения: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Направление векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ выбирают совпадающим с направлением осей Ox, Oy, Oz , так что эти базисные векторы являются ортами осей декартовой прямоугольной системы координат.

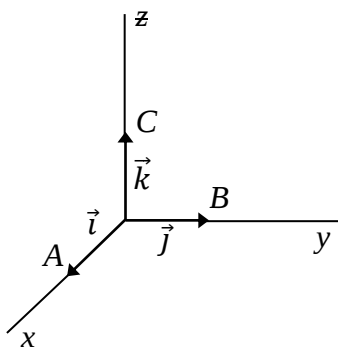


Рис.12

Положение любой точки M пространства можно определить тремя числами (координатами). Вектор $\overrightarrow{OM}$, идущий от начала координат к точке M , называется *радиус-вектором точки M*.



3. Координат точки, делящей отрезок, заданный координатами своих концов, в заданном отношении μ .

$$x = \frac{x_1 + \mu x_2}{1 + \mu}; \quad y = \frac{y_1 + \mu y_2}{1 + \mu}; \quad z = \frac{z_1 + \mu z_2}{1 + \mu}$$

Рассмотрим пример применения формул.

Пример 2. Даны точки $A(3; 3; 3)$ и $B(-1; 5; 7)$. Найти координаты точек C и D , делящих отрезок AB на три равные части.

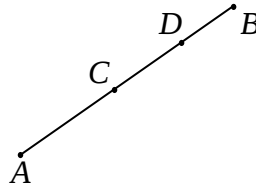


Рис.14

Точка C делит отрезок AB в отношении $\mu = \frac{1}{2}$ (рис.14).

Найдем координаты точки C по формулам:

$$x = \frac{3 + \frac{1}{2}(-1)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{3}; \quad y = \frac{3 + \frac{1}{2} \cdot 5}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{11}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{11}{3}; \quad z = \frac{3 + \frac{1}{2} \cdot 7}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{13}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{13}{3}.$$

Итак, координаты точки C $(\frac{5}{3}; \frac{11}{3}; \frac{13}{3})$.

Точка D делит отрезок AB в отношении $\mu = \frac{2}{1} = 2$.

Найдем координаты точки D :

$$x = \frac{3 + 2 \cdot (-1)}{1 + 2} = \frac{1}{3}; \quad y = \frac{3 + 2 \cdot 5}{3} = \frac{13}{3}; \quad z = \frac{3 + 2 \cdot 7}{3} = \frac{17}{3};$$

Координаты точки $D(\frac{1}{3}; \frac{13}{3}; \frac{17}{3})$.

3.5. Операции над векторами, заданными в координатной форме

Любой вектор равен сумме его геометрических проекций на координатные оси. Так, например, вектор $\overrightarrow{OM}$ равен сумме своих проекций на оси координат:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OK}, \text{ где}$$

$$\overrightarrow{ON} = \text{пр}_{ox} \overrightarrow{OM}, \quad \overrightarrow{OL} = \text{пр}_{oy} \overrightarrow{OM}, \quad \overrightarrow{OK} = \text{пр}_{oz} \overrightarrow{OM}.$$

Так как вектор $\overrightarrow{ON}$ коллинеарен вектору $\vec{i}$ и его длина равна x , то верно равенство $\overrightarrow{ON} = x \cdot \vec{i}$. Аналогично, векторы $\overrightarrow{OL}$ и $\overrightarrow{OK}$ коллинеарны векторам $\vec{j}$ и $\vec{k}$. Выразим их с помощью длин: $\overrightarrow{OL} = y \cdot \vec{j}, \overrightarrow{OK} = z \cdot \vec{k}$.

Подставим найденные выражения в исходное равенство, получим:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}.$$

Данное равенство называется разложением вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Коэффициенты разложения, числа x, y, z называются компонентами или координатами вектора в данном базисе. Представление вектора в виде суммы произведений его компонент на базисные векторы называется *разложением вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$* .

Заметим, что проекция суммы векторов на любую ось равна сумме проекций векторов на эту ось.

Пусть даны векторы: $\vec{a} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + z_1 \cdot \vec{k}$ и $\vec{b} = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} + z_2 \cdot \vec{k}$.

1. Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их координаты. Значит

$$x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2.$$

2. При сложении векторов, заданных в координатной форме, их соответствующие координаты складываются.

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2) \cdot \vec{i} + (y_1 + y_2) \cdot \vec{j} + (z_1 + z_2) \cdot \vec{k}.$$

3. При вычитании векторов, заданных в координатной форме, их соответствующие координаты вычитаются.

Пусть даны векторы

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2) \cdot \vec{i} + (y_1 - y_2) \cdot \vec{j} + (z_1 - z_2) \cdot \vec{k}.$$

4. При умножении вектора на число, необходимо каждую его координату умножить на это число.

$$\overrightarrow{a\alpha} = \alpha x_1 \cdot \vec{i} + \alpha y_1 \cdot \vec{j} + \alpha z_1 \cdot \vec{k}.$$

Для нахождения координат вектора, если заданы координаты его начала $A(x_1, y_1, z_1)$ и конца $B(x_2, y_2, z_2)$, используется формула:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} + (z_2 - z_1) \cdot \vec{k},$$

таким образом, координаты вектора равны разности соответствующих координат конца вектора и его начала.

Рассмотрим пример нахождения координат вектора.

Пример. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если известны координаты точек $A(1; 3; 2)$ и $B(5; 8; -1)$.

$$\overrightarrow{AB} = \{5 - 1; 8 - 3; -1 - 2\} = \{4; 5; -3\}.$$

Рассмотрим пример задачи на выполнение операций над векторами в координатной форме.

Пример. Даны векторы своими координатами $\vec{a}\{1, -2, 3\}$, $\vec{b}\{\frac{1}{2}, 1, 2\}$, $\vec{c}\{2, 0, -1\}$. Найти координаты вектора $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \frac{1}{2}\vec{c}$.

1) Для нахождения координат вектора $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \frac{1}{2}\vec{c}$ последовательно выполним все операции:

$$\vec{a} + \vec{b} = \left\{1 + \frac{1}{2}; -2 + 1; 3 + 2\right\} = \left\{\frac{3}{2}; -1; 5\right\},$$

$$\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \left\{\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right\},$$

$$\frac{1}{2}\vec{c} = \left\{\frac{1}{2} \cdot 2; \frac{1}{2} \cdot 0; \frac{1}{2} \cdot (-1)\right\} = \left\{1; 0; -\frac{1}{2}\right\},$$

$$\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \frac{1}{2}\vec{c} = \left\{\frac{3}{4} - 1; -\frac{1}{2} - 0; \frac{5}{2} - (-\frac{1}{2})\right\} = \left\{-\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; 3\right\}$$

Теперь получим условие коллинеарности двух векторов. Пусть даны два ненулевых, коллинеарных между собой вектора

$$\vec{a} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + z_1 \cdot \vec{k} \text{ и } \vec{b} = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} + z_2 \cdot \vec{k},$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и не равны нулевому вектору, то существует такой постоянный множитель $\alpha \neq 0$, такой что

$\alpha \cdot \vec{b} = \vec{a}$. В координатной форме это равенство выглядит так:

$$\alpha \cdot \vec{b} = \alpha x_2 \cdot \vec{i} + \alpha y_2 \cdot \vec{j} + \alpha z_2 \cdot \vec{k}.$$

Векторы $\alpha \cdot \vec{b}$ и $\vec{a}$ равны, следовательно, равны их соответствующие координаты, то есть $x_1 = \alpha x_2, y_1 = \alpha y_2, z_1 = \alpha z_2$, откуда непосредственно следует, $\alpha = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

Полученное равенство является *условием коллинеарности двух векторов*.

Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}).$$

Скалярное произведение обозначается так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a} \cdot \vec{b})$ или $\vec{a}\vec{b}$.

Свойства:

- 1) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{a})$ - коммутативности;
- 2) $(\vec{a} + \vec{c}) \cdot \vec{b} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{c} \cdot \vec{b})$ - дистрибутивности;
- 3) $\alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\alpha\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \alpha\vec{b})$ - ассоциативности относительно скалярного множителя;

4) $(\vec{a} \cdot \vec{a}) = \vec{a}^2$ - называется скалярным квадратом вектора $\vec{a}$, скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля, так как

$$(\vec{a} \cdot \vec{a}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}|^2;$$

5) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0$, если выполнено одно из условий:

- $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, тогда $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0 \cdot |\vec{b}| = |\vec{a}| \cdot 0 = 0$;
- $\vec{a}$ перпендикулярен $\vec{b}$, тогда $\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = 0$.

Если $\vec{a}$ перпендикулярен $\vec{b}$, то векторы называются *ортогональными*.

Необходимое и достаточное условие ортогональности двух векторов:

Два вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Обратим внимание на следующее: если по определению скалярного произведения имеет место равенство

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}),$$

то произведение $|\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$ является проекцией вектора $\vec{b}$ на ось, определяемую вектором $\vec{a}$, следовательно, можем выразить еще одну формула:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}.$$

$$\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}|}$$

Формулой вычисления скалярного произведения в координатах.

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$$

В частности, $\vec{a}^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$. Теперь можно получить формулу для вычисления длины вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Основным геометрическим приложением скалярного произведения векторов является нахождение косинуса угла между векторами:

$$\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Рассмотрим примеры применения полученной формулы.

Найдем косинусы углов между осями координат и вектором.

Определение. Косинусы углов, образуемых вектором с положительными направлениями осей OX, OY, OZ называются направляющими косинусами вектора.

Пусть задан вектор $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$. Косинусы углов, образованных вектором с положительными направлениями осей координат можно найти следующим образом:

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{i}}) = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{i})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{x}{|\vec{a}|};$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{j}}) = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{j})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{j}|} = \frac{y}{|\vec{a}|};$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{k}}) = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{k})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{z}{|\vec{a}|}.$$

Если вектор $\vec{a}$ единичный, то есть $|\vec{a}| = 1$, то $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{i}}) = x$, $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{j}}) = y$, $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{k}}) = z$.

Получим еще одну важную формулу. Для этого обе части равенств, полученных для направляющих косинусов вектора возведем в квадрат и просуммируем их левые и правые части. Получим:

$$\cos^2(\widehat{\vec{a}, \vec{i}}) + \cos^2(\widehat{\vec{a}, \vec{j}}) + \cos^2(\widehat{\vec{a}, \vec{k}}) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{|\vec{a}|^2},$$

Оставив без изменения левую часть, в правой части равенства сделаем замену, с учетом формулы для вычисления длины вектора:

$$\cos^2(\widehat{\vec{a}, \vec{i}}) + \cos^2(\widehat{\vec{a}, \vec{j}}) + \cos^2(\widehat{\vec{a}, \vec{k}}) = \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2} = 1.$$

Таким образом, получено равенство:

$$\cos^2(\widehat{\vec{a}, \vec{i}}) + \cos^2(\widehat{\vec{a}, \vec{j}}) + \cos^2(\widehat{\vec{a}, \vec{k}}) = 1,$$

которое называется *теоремой о направляющих косинусах вектора*. На естественном языке теорема формулируется следующим образом:

Теорема. Сумма квадратов направляющих косинусов вектора равна единице.

Рассмотрим примеры задач на применение скалярного произведения векторов.

Пример 1. Нормировать вектор $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k}$.

Процедура нормирования вектора сводится к нахождению вектора единичной длины, сонаправленного с данным вектором.

Найдем длину вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2} = 13,$$

Искомый единичный вектор получим делением каждой координаты вектора $\vec{a}$ на его длину:

$$\vec{a}_0 = \frac{3}{13} \cdot \vec{i} + \frac{4}{13} \cdot \vec{j} - \frac{12}{13} \cdot \vec{k}.$$

Пример 2. Даны точки $M_1(1; 2; 3)$ и $M_2(3; -4; 6)$. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{3 - 1; -4 - 2; 6 - 3\} = \{2; -6; 3\},$$

Вычислим длину вектора:

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2} = 7.$$

Найдем направляющие косинусы вектора:

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{i}}) = \frac{2}{7}, \quad \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{j}}) = \frac{-6}{7}, \quad \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{k}}) = \frac{3}{7}.$$

Сделаем проверку с помощью теоремы о направляющих косинусах вектора:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{-6}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 = 1.$$

Рассмотрим пример применения этого факта.

Векторное произведение векторов

Определение. Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) $\vec{c}$ перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- 2) длина вектора $\vec{c}$ вычисляется по формуле:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ после приведения к общему началу ориентированы в отношении друг друга соответственно как орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (говорят, что в правой системе координат образуют так называемую «правую» тройку векторов), то есть ориентированы как большой, указательный и средний пальцы правой руки. В этом же случае говорят, что направление обхода векторов осуществляется против часовой стрелки.

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $[\vec{a}, \vec{b}]$ или $\vec{a} \times \vec{b}$.

Рассмотрим свойства векторного произведения векторов:

$$1) \quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \text{ то есть антикоммутативность;}$$

$$2) \quad \alpha[\vec{a}, \vec{b}] = [\alpha\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \alpha\vec{b}] \quad - \quad \text{ассоциативность относительно скалярного множителя;}$$

$$3) \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad - \quad \text{дистрибутивность;}$$

$$4) \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}, \text{ если выполнено одно из условий:}$$

$$\bullet \quad \vec{a} = \vec{0} \text{ или } \vec{b} = \vec{0};$$

$$\bullet \quad \vec{a} \parallel \vec{b}, \text{ в этом случае, } \sin(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = 0$$

Рассмотрим попарные векторные произведения координатных векторов.

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, \quad \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, \quad \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0},$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}; \quad \vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}; \quad \vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}.$$

Пусть векторы заданы своими координатами:

$$\vec{a} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + z_1 \cdot \vec{k} \text{ и } \vec{b} = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} + z_2 \cdot \vec{k}.$$

Составим определитель

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \text{ используя теорему о разложении определителя по строке}$$

или столбцу, разложим его по первой строке.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{j} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \\ + \vec{k} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}.$$

Полученное выражение является разложением вектора по векторам базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, а коэффициенты этого разложения являются координатами вектора векторного произведения в этом базисе.

Таким образом, координаты вектора векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно записать так:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

Пример. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

Составим матрицу из координат данных векторов:

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, пользуясь алгоритмом для нахождения координат вектора

векторного произведения, составим и найдем значения определителей.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left\{ \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right\} = \{-7; 3; 1\}.$$

Геометрическое приложение векторного произведения векторов.

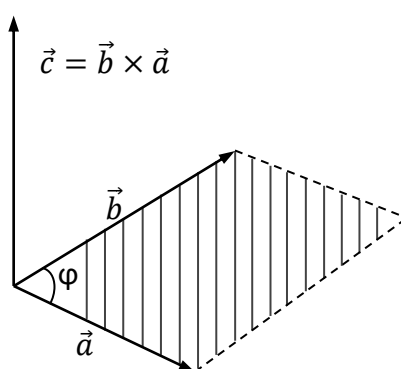


Рис.15

Длина вектора векторного произведения двух векторов равна площади параллелограмма, построенного на данных векторах (рис.15).

Таким образом, верна формула: $S_{\text{парал}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Пример. Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $A(1; 1; 1), B(2; 3; 4), C(4; 3; 2)$.

Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{AB} = \{2 - 1; 3 - 1; 4 - 1\} = \{1; 2; 3\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \{4 - 1; 3 - 1; 2 - 1\} = \{3; 2; 1\}.$$

Искомая площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Найдем вектор векторного произведения этих векторов:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left\{ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right\} = \{-4; 8; -4\}.$$

Найдем площадь треугольника по формуле:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}|,$$

Вычислим длину вектора векторного произведения:

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2 + (-4)^2} = \sqrt{96}, \text{ тогда}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{96} = \sqrt{24} \text{ кв.ед.}$$

3.6. Смешанное произведение векторов

Определение. Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор векторного произведения векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Смешанное произведение обозначается $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ или $\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}]$.

Свойства:

1) Смешанное произведение не изменяется, если переставлять перемножаемые векторы в круговом порядке:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}.$$

2) При перестановке любых двух векторов смешанное произведение меняет только знак:

$$\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}; \vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}; \vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

3) Ассоциативность относительно скалярного множителя:

$$\alpha \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\alpha \vec{b}\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\alpha \vec{c}.$$

4) Смешанное произведение не изменяется, если в нем поменять местами знаки скалярного и векторного произведений:

$$\vec{a}[\vec{b}\vec{c}] = [\vec{a}\vec{b}]\vec{c}.$$

5) Смешанное произведение равно нулю, если выполнено одно из условий:

1. Хотя бы один из множителей равен нулю: $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$ или $\vec{c} = \vec{0}$;

2. Два из перемножаемых векторов коллинеарны (в этом случае, их векторное произведение будет равно нулю, что повлияет на результат смешанного произведения): $\vec{a} \parallel \vec{b}$ или $\vec{a} \parallel \vec{c}$ или $\vec{b} \parallel \vec{c}$;

3. Три ненулевых вектора параллельны одной и той же плоскости, то есть компланарны.

Рассмотрим вычисление смешанного произведения векторов, заданных своими координатами.

Смешанное произведение векторов находится по формуле:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Из свойств смешанного произведения следует, что *необходимым и достаточным условием компланарности тройки векторов* является равенство нулю их смешанного произведения.

Пример. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$,

$$\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}, \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}.$$

Составим определитель третьего порядка из координат данных векторов и вычислим его:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 1 - 1 + 3 + 4 + 2 = 33.$$

Геометрическое приложение смешанного произведения трех векторов состоит в следующем: *модуль смешанного произведения векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах (рис.16).*

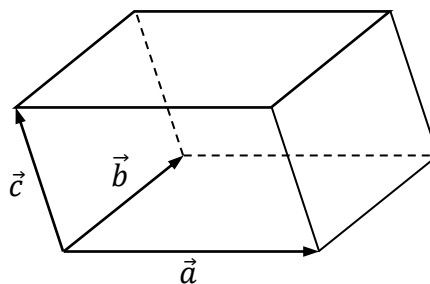


Рис.16

$$V_{\text{парал-да}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Треугольная призма составляет половину параллелепипеда (по объему), следовательно, имеет место формула:

$$V_{\text{призмы}} = \frac{1}{2} V_{\text{парал-да}} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Треугольная пирамида составляет по объему одну шестую часть параллелепипеда, поэтому справедлива формула:

$$V_{\text{пирам}} = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{парал-да}} = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Рассмотрим пример вычисления объемов многогранников.

Пример. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках: $A(2, -1, -1), B(5, -1, 2), C(3, 0, -3), D(6, 0, -1)$.

Рассмотрим тройку векторов, выходящих из одной точки:

$$\overrightarrow{AB}\{3, 0, 3\}; \overrightarrow{AC}\{1, 1, -2\}; \overrightarrow{AD}\{4, 1, 0\}.$$

Вычислим смешанное произведение найденных векторов:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 3 - 12 - 0 + 6 = -3$$

Используем формулу: $V_{\text{пирам}} = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{парал-да}} = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$

$$V_{\text{пирам}} = \frac{1}{6} \cdot |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \frac{1}{6} \cdot |-3| = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Пример. Дан параллелепипед, построенный на векторах $\overrightarrow{AB}\{4, 3, 0\}, \overrightarrow{AD}\{2, 1, 2\}, \overrightarrow{AA_1}\{-3, -2, 5\}$. Найти объем параллелепипеда, площади граней, длину высоты, проведенной из вершины A_1 , косинус угла между ребром AB и диагональю B_1D , косинус угла между гранями $ABCD$ и ADD_1A_1 .

Для нахождения объема параллелепипеда, вычислим смешанное произведение векторов, на которых он построен:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 18 + 0 - 0 - 30 + 16 = -12$$

$$V_{\text{парал-да}} = |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1})| = |-12| = 12.$$

В связи с нахождением площадей граней параллелепипеда, заметим, что его грани попарно равны, поэтому достаточно будет найти площади трех

граней. Будем использовать геометрическое приложение векторного произведения векторов.

Грани верхнего и нижнего оснований определены векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Найдем вектор векторного произведения:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \left\{ \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right\} = \{6, -8, -2\}.$$

Найдем длину полученного вектора:

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2 + (-2)^2} = \sqrt{104}, \text{ следовательно,}$$

$$S_{ABCD} = S_{A_1B_1C_1D_1} = \sqrt{104} \text{ кв.ед.}$$

Боковые грани параллелепипеда определены векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

Найдем координаты и длину вектора векторного произведения:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA_1} = \left\{ \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \right\} = \{15, -20, 1\},$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA_1}| = \sqrt{15^2 + (-20)^2 + 1^2} = \sqrt{526}.$$

$$\text{Таким образом, } S_{ABB_1A_1} = S_{CDD_1C_1} = \sqrt{526} \text{ кв. ед.}$$

Площадь третьей пары граней предлагаем найти самостоятельно.

Для нахождения высоты, проведенной из вершины A_1 , используем формулу объема параллелепипеда, изученную в школьном курсе геометрии: $V_{\text{парал-да}} = S_{\text{осн}} \cdot h$, откуда выразим высоту: $h = \frac{V}{S_{\text{осн}}}$.

Подставив известные величины, найдем длину высоты:

$$h = \frac{12}{\sqrt{104}} = \frac{12}{2\sqrt{26}} = \frac{6}{\sqrt{26}}.$$

Для поиска косинуса угла между ребром и диагональю, необходимо найти координаты вектора $\overrightarrow{B_1D}$. Выразим этот вектор из треугольника AB_1D : $\overrightarrow{B_1D} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB_1}$. В свою очередь вектор $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}$.

Теперь найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{AB_1} = \{4 - 3, 3 - 2, 0 + 5\} = \{1, 1, 5\}, \quad \overrightarrow{B_1D} = \{2 - 1, 1 - 1, 2 - 5\} = \{1, 0, -3\}.$$

Косинус угла между векторами найдем по формуле скалярного произведения векторов:

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B_1D}}) = \frac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B_1D})}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{B_1D}|} = \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot (-3)}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + (-3)^2}} =$$

$$= \frac{4}{5 \cdot \sqrt{10}}$$

Найдем косинус угла между гранями $ABCD$ и ADD_1A_1 . Поскольку угол между гранями параллелепипеда является двугранным углом, то его линейный угол можно искать как угол между нормальными к граням. Нормалью к грани $ABCD$ можно считать вектор векторного произведения векторов, определяющих эту грань, то есть векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$. Этот вектор был найден ранее:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \left\{ \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right\} = \{6, -8, -2\}.$$

Грань ADD_1A_1 определяют векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$. Найдем для них вектор векторного произведения:

$$\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AA_1} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \right\} = \{9, -16, -1\}.$$

Теперь найдем косинус угла между этими векторами:

$$\cos \varphi = \frac{6 \cdot 9 + (-8) \cdot (-16) + (-2) \cdot (-1)}{\sqrt{6^2 + (-8)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{9^2 + (-16)^2 + (-1)^2}} = \frac{184}{\sqrt{104} \cdot \sqrt{338}} =$$

$$= \frac{184}{2\sqrt{26} \cdot 13\sqrt{2}} = \frac{46}{13\sqrt{13}}.$$

Задача решена полностью.

Пример 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(3,5,3)$, $A_2(-2,11,-5)$, $A_3(1,-1,4)$, $A_4(0,6,4)$. Найти: 1) длину ребра A_1A_2 ; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 ; 3) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 4) площадь грани $A_1A_2A_3$; 5) объем пирамиды; 6) уравнения прямой A_1A_2 ; 7) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 8) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$. Сделать чертеж.

Решение. 1) Для определения длины ребра A_1A_2 найдем координаты вектора $\overline{A_1A_2}$: $\overline{A_1A_2} = -5 \cdot \bar{i} + 6 \cdot \bar{j} - 8 \cdot \bar{k} = (-5, 6, -8)$. Тогда длина ребра A_1A_2 будет равна длине вектора $\overline{A_1A_2}$:

$$|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{(-5)^2 + 6^2 + (-8)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}.$$

2) Найдем угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 . Для этого, как и раньше, найдем координаты вектора $\overline{A_1A_4}$, определяющего ребро A_1A_4 . Получим $\overline{A_1A_4} = (-3, 1, 1)$ и $|\overline{A_1A_4}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{11}$.

Тогда угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 можно найти из определения скалярного произведения двух векторов:

$$\cos \varphi = \cos(\overline{A_1A_2} \wedge \overline{A_1A_4}) = \frac{\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_4}}{|\overline{A_1A_2}| \cdot |\overline{A_1A_4}|} = \frac{(-5) \cdot (-3) + 6 \cdot 1 + (-8) \cdot 1}{5\sqrt{5} \cdot \sqrt{11}} = \frac{13}{5\sqrt{55}}.$$

$$\text{Следовательно, } \varphi = \arccos \frac{13}{5\sqrt{55}}.$$

3) Чтобы найти угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$, определим нормальный вектор $\bar{N}$ плоскости $A_1A_2A_3$. Из определения векторного произведения двух векторов имеем:

$$\bar{N} = \overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = -42\bar{i} + 21\bar{j} + 42\bar{k},$$

т.е. $\bar{N} = (-42, 21, 42)$ и $|\bar{N}| = \sqrt{(-42)^2 + 21^2 + 42^2} = 63$. Тогда

$$\cos \psi = \cos(\bar{N} \wedge \overline{A_1A_4}) = \frac{(-3) \cdot (-42) + 1 \cdot 21 + 1 \cdot 42}{\sqrt{11} \cdot 63} = \frac{189}{\sqrt{11} \cdot 63} = \frac{3}{\sqrt{11}}, \quad \psi = \arccos \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

Так как нормальный вектор $\bar{N}$ перпендикулярен плоскости $A_1A_2A_3$, то угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$ определяется как

$$A_1A_4 \wedge A_1A_2A_3 = \left| \frac{\pi}{2} - \psi \right|.$$

4) Площадь грани $A_1A_2A_3$ можем найти по формуле $S = \frac{1}{2} \cdot |\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}| = \frac{1}{2} \cdot |\vec{N}| = \frac{63}{2}$. Следовательно, $S = \frac{63}{2}$ кв. ед.

5) Объем пирамиды, построенной на векторах, равен 1/6 объема параллелепипеда, построенного на этих же векторах. Для определения объема параллелепипеда воспользуемся свойством смешанного произведения векторов. В результате имеем:

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6} V_{\text{пар.}} = \frac{1}{6} \left| \left(\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} \right) \cdot \overline{A_1A_4} \right| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -5 & 6 & -8 \\ -2 & -6 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} |30 - 18 + 16 + 144 + 12 + 5| = \frac{189}{6} = \frac{63}{2}$$

Таким образом, $V = \frac{63}{2}$ куб.ед.

6) Составим уравнения прямой A_1A_2 . Для этого воспользуемся уравнениями прямой, проходящей через две заданные точки A_1 и A_2 :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Получаем:

$$\frac{x - 3}{-5} = \frac{y - 5}{6} = \frac{z - 3}{-8}.$$

7) Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ можно найти по формуле:

$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$, где $\vec{N} = (A, B, C)$, $A_1(x_1, y_1, z_1)$. Следовательно, уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ имеет вид: $-42 \cdot (x - 3) + 21 \cdot (y - 5) + 42(z - 3) = 0$ или после упрощения $2x - y - 2z + 5 = 0$.

8) Чтобы составить уравнение высоты h_{A_4} , опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$, воспользуемся формулой:

$$\frac{x - x_4}{m} = \frac{y - y_4}{n} = \frac{z - z_4}{p},$$

где $A_4(x_4, y_4, z_4)$, $\vec{l}(m, n, p)$ - направляющий вектор высоты h_{A_4} пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Так как вектор $\vec{l}$ перпендикулярен грани $A_1A_2A_3$, то в качестве $\vec{l}$ можно взять вектор $\vec{N}$ - нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$.

Следовательно, имеем: $\frac{x-0}{-42} = \frac{y-6}{21} = \frac{z-4}{42}$ или $\frac{x}{2} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z-4}{-2}$.

9) Сделаем теперь чертеж:

