

Лекция №1

Понятие математической модели, её выбора и показателя эффективности

1. Общие сведения

Модель - это схема, изображение, описание какого-либо явления или процесса в природе и обществе.

В широком смысле модель - любой образ какого-либо объекта, процесса, явления.

Модель может быть мысленной или условной. Модель может быть представлена описанием, графиком, чертежом, планом, картой, математическим выражением (уравнением или системой уравнений).

Модель - один из самых основных инструментов научного познания.

Модель конструируется так, чтобы отобразить характерные черты поведения исследуемого объекта, или те черты поведения, которые важны для данной цели исследования.

Модель имеет практическое значение.

Исследование поведения модели доступно исследователю, а непосредственное изучение объекта бывает либо затруднено, либо оказывается просто невозможным. Модель чаще всего является упрощенным образом объекта или процесса. Именно в силу этого свойства модель более доступна исследованию.

Однако, большое упрощение ведет к искажению поведения, описания реального объекта, процесса.

Поэтому только в известных (заранее определенных) пределах возможно использование модели.

Существует несколько определений и классификаций моделей в зависимости от цели, задач, наук.

Модель называется концептуальной, абстрактной, математической, если представляется в виде математических выражения.

Модель может представляться в виде числовом, логическом, графическом. При этом, соответственно, модель имеет конкретные числовые характеристики, или представлена в виде блок-схемы или программы для ЭВМ, или в виде графиков, рисунков, схем.

В целом сам процесс моделирования состоит из нескольких этапов, среди которых создается конструкция модели. Среди этапов исследования, необходимых в моделировании, необходимо выделить следующие:

- предварительное изучение объекта с целью выделения основных характеристик, необходимых для создания модели;
- создание модели, т.е. математического описания объекта, процесса исследования;
- экспериментальный или теоретический анализ модели;
- сопоставление результатов, полученных по модели с реальными значениями;
- корректировка модели на основе результатов сопоставления реальных и теоретических результатов.

Если углубиться в логические модели, реализуемые с помощью ЭВМ, то можно выделить аналоговые и дискретные модели.

Подразделение моделей, описанное выше, достаточно условно.

Так аналоговые модели, которые исследуются с помощью аналоговой вычислительной техники, можно отнести и к категории материальных моделей (а не абстрактных, математических, как было определено выше). Аналоговые модели основаны на электрическом, механическом образе объекта или процесса.

Модель отражает либо конечные результаты поведения, описания объекта, процесса, либо отношения между его элементами.

Если нет реальной возможности описать отношения между элементами, то модель может отражать зависимость между воздействием на объект, процесс, и ответом объекта, процесса, на это воздействие. Такое исследование носит название черного ящика. Другими словами, черный ящик - термин, определяющий объект, процесс, относительно внутренних связей, элементов, которых исследователь не имеет сведений. Но исследователь может воздействовать на объект в целом и регистрировать результат воздействия. Любая из наук давно пользуется моделями.

2. Модель задачи

При решении задач следует учитывать сложность конкретной производственной ситуации. Это наилучшим образом обеспечивается экспериментированием в реальных условиях. Однако задачи планирования, организации и управления производством решаются в системах, не допускающих экспериментов, так как неудача будет равноценна катастрофе. Например, нельзя выбрать рациональную расстановку экскаваторов или схему вскрытия, пробуя возможные варианты на карьере. Поэтому при исследовании операций широко используют модели задач (прежде всего математические).

Модель - это система, находящаяся в объективном соответствии с исследуемым объектом, отражающая наиболее существенные его свойства и дающая в процессе изучения информацию о самом объекте. Процесс построения и изучения модели называется *моделированием*.

Математические модели описывают закономерности, присущие изучаемому объекту, с помощью математических выражений, обычно систем уравнений и неравенств.

Математические модели подразделяются по назначению, виду моделируемого объекта, методу построения или решения модели. В зависимости от назначения модели укрупнено делятся на оптимизационные и информационные.

Оптимизационные модели занимают ведущее место, так как на их основе непосредственно вырабатываются решения задач. В оптимизационных моделях отражается цель функционирования системы.

Информационные модели предназначены для получения информации, используемой при принятии решения, в том числе при построении оптимизационных моделей. К информационным относятся модели имитации технологических процессов, корреляционные модели технико-экономических показателей, прогнозные модели, а также математические модели месторождений.

По виду объекта различают модели технологических процессов, комплексов работ, предприятий, объединений и отраслей.

В зависимости от метода получения или решения различают корреляционные модели, модели линейного (нелинейного) программирования, сетевые модели, модели массового обслуживания, игровые модели и др.

Процессы принятия решений при всем их многообразии имеют две характерные черты, определяющие структуру математических моделей:

1. Условия задачи допускают большое количество возможных вариантов, из которых надо выбрать оптимальный. Притом с увеличением числа рассматриваемых вариантов увеличивается объем информации, необходимой для решения задачи, и ее описание становится более громоздким.

2. Принятие решения осуществляется для определенной цели, т. е. выбранное решение должно наилучшим образом обеспечивать достижение поставленной цели.

Для сравнения возможных вариантов и оценки их соответствия поставленной цели используются количественные критерии эффективности.

Таким образом, процесс принятия решений можно описать функцией, аргументами которой являются допустимые решения, а значениями - числа, характеризующие меру достижения поставленной цели при различных аргументах. Эта функция называется целе-

вой. Она связывает допустимые решения с показателем эффективности. Задача выбора решения сводится к нахождению экстремального значения функции (показателя эффективности) и аргумента, при котором оно достигается. Решение, максимизирующее (минимизирующее) функцию, называется оптимальным.

Эффективность операции зависит от двух групп факторов: условий проведения операции (наличие ресурсов, погодные условия, плановые задания и т. д.) - $a_1, a_2, \dots, a_n$ и способа организации и параметров операции $x_1, x_2, \dots, x_m$. Выбор способа организации операции и ее параметров представляет решение задачи, а искомые величины $x_1, x_2, \dots, x_m$ - его элементы.

Критерием эффективности операции является функция заданных условий и элементов решения:

$$W = f(a_1, a_2, \dots, a_n; x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (1.1)$$

Заданные условия $a_1, a_2, \dots, a_n$ могут быть функциями и ограничениями элементов решения.

Основная задача исследования операций математически может быть сформулирована следующим образом: при заданных условиях $a_1, a_2, \dots, a_n$ найти такие элементы решения $x_1, x_2, \dots, x_m$ при которых показатель W обращается в максимум (минимум).

Это типичная математическая вариационная задача. Однако решить ее методами классической математики невозможно или затруднительно из-за большого числа переменных, наличия ограничений и иногда из-за дискретности изменения переменных. Для решения таких задач применяют методы математического программирования.

Рассмотренный выше случай представляет собой так называемый детерминированный процесс, который в чистом виде наблюдается редко.

Обычно на исход операции влияют различные случайные факторы, при этом условия проведения операции известны не точно или не полностью. Например, горно-геологические условия залегания месторождения и качественная характеристика полезного ископаемого, а также производительность оборудования являются вероятностными величинами, на работу предприятия влияют природные условия и т. д. В подобных случаях, кроме известных условий выполнения операции $a_1, a_2, \dots, a_n$ и элементов решения $x_1, x_2, \dots, x_m$ показатель эффективности W зависит также от неизвестных факторов $b_1, b_2, \dots, b_l$.

$$W = f(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_l; x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (1.2)$$

Хотя $b_1, b_2, \dots, b_l$ неизвестны вообще или известны неточно, задача принятия решений существует и формулируется следующим образом: при заданных $a_1, a_2, \dots, a_n$ с учетом неизвестных факторов $b_1, b_2, \dots, b_l$ найти элементы решения $x_1, x_2, \dots, x_m$ обращающие по возможности в максимум (минимум) критерий эффективности W . Это уже не чисто математическая задача. Наличие неизвестных факторов $b_1, b_2, \dots, b_l$ переводит ее из разряда детерминированных в разряд *статистических*, которые подразделяются на задачи в условиях риска и неопределенности.

К задачам в условиях риска относятся такие задачи, в которых неизвестные факторы $b_1, b_2, \dots, b_l$ могут быть охарактеризованы статистически, определенными законами распределения. Например, работу оборудования, ошибку подсчета запасов можно охарактеризовать статистическими показателями, закон распределения которых находят методами математической статистики.

Если $b_1, b_2, \dots, b_l$ - случайные величины с известными (определенными) законами распределения, то оптимизация решения может осуществляться двумя способами: сведением к детерминированной задаче или оптимизацией "в среднем".

При первом способе случайные величины $b_1, b_2, \dots, b_l$ заменяются их математическими ожиданиями, т. е. неизвестные факторы переводятся в разряд детерминированных. Этот прием достаточно груб и применим в том случае, если случайные факторы изменяются в небольшом диапазоне.

Второй способ более сложен. Критерий оптимальности выражается статистически, в него вводятся законы распределения случайных факторов и выбирается решение, оптимизирующее математическое ожидание показателя эффективности.

Если задача решается многократно (например, при сменном планировании), то результат будет известен. При разовом решении задачи (например, при проектировании предприятия) случайные величины могут существенно отклоняться от средних значений. Поэтому наряду с расчетом математического ожидания надо оценивать его дисперсию.

Когда неизвестные факторы $b_1, b_2, \dots, b_l$ нельзя охарактеризовать статистически (нельзя получить законов распределения этих факторов), возникает задача выбора решений в условиях неопределенности. В этом случае вместо оптимизации в "среднем" следует рассматривать диапазон изменения факторов $b_1, b_2, \dots, b_l$ для каждого из них находить решение. Будут найдены локально-оптимальные решения, являющиеся оптимальными при определенных значениях неизвестных факторов $b_1, b_2, \dots, b_l$.

Совокупность локально-оптимальных решений дает полную картину для выбора оптимального варианта. Если нет решения, предпочтительного для всех условий (доминирующего), то можно принять решение, которое не является строго оптимальным ни для одного из условий, но приемлемо для целого ряда условий. Такая задача относится к задачам выбора компромиссного решения.

В ряде случаев факторы $b_1, b_2, \dots, b_l$ зависят не от объективных обстоятельств, а являются результатом действия активно противостоящего противника. Математическая теория конфликтных ситуаций достаточно хорошо разработана (теория игр). Она позволяет принимать наименее рискованное решение, дает основания для выбора стратегии поведения.

Математическое моделирование используется при решении как прямых, так и обратных задач исследования операций.

Прямые задачи. При известных условиях $a_1, a_2, \dots, a_n$ неопределенным факторам $b_1, b_2, \dots, b_l$ придается какое-то значение и оценивается результат. Решение прямых задач позволяет оценивать влияние условий и стратегий поведения на результат.

Обратные задачи. Выбор элементов решения $x_1, x_2, \dots, x_m$ оптимизирующих результат при определенных условиях $a_1, a_2, \dots, a_n$ и при наличии неизвестных факторов $b_1, b_2, \dots, b_l$. Эти задачи имеют простое решение, если отсутствуют случайные факторы.

Процесс принятия решения состоит из двух этапов:

выбор показателя эффективности, описание множества допустимых решений и целевой функции;

отыскание экстремального значения целевой функции и соответствующего ему решения.

Первый этап заключается в математическом описании условий, в которых протекает операция, и цели ее осуществления, а второй - в решении полученной экстремальной математической задачи.

Если число возможных вариантов невелико, то оптимум можно найти перебором вариантов вручную. Для сокращения вычислительных работ используются алгоритмы и методы целенаправленного перебора решений.

В зависимости от модели могут применяться классические приемы дифференциального исчисления, метод множителей Лагранжа, вариационное исчисление, градиентный метод и т. д. Для решения многих возникающих задач, отличающихся дискретностью функции и большим количеством возможных вариантов, разработан специальный математический аппарат, называемый оптимальным (математическим) программированием, включающим методы линейного, динамического и нелинейного программирования, теории игр и др.

3. Выбор модели и показателя эффективности задачи

Построение модели задачи и выбор показателя эффективности являются наиболее сложной и главной задачей исследования. Модель и показатель эффективности всегда должны выбираться с учетом конкретно поставленной задачи. Несмотря на разнообразие встречающихся задач, а следовательно, и моделей, их описывающих, оптимизационные модели включают всегда одни и те же составные части:

управляемые и неуправляемые переменные (параметры), показатель эффективности, целевую функцию и ограничения.

К управляемым переменным относят величины, значение которых необходимо найти в процессе решения задачи. Их часто называют также оптимизируемыми величинами. К неуправляемым переменным относят величины, которые в процессе решения данной задачи остаются постоянными (цены, сырье, размещение потребителей, спрос, производительность оборудования).

Возможные значения управляемых переменных часто ограничены условиями задачи; например, средства или количество оборудования, выделяемые для выполнения определенной работы, не могут превышать общей суммы средств или количества оборудования, имеющегося в распоряжении руководителя. Точно так же количество продукции, отправляемой потребителю, не может превышать мощность карьера; может быть ограничена также пропускная способность карьерных транспортных коммуникаций и т. д. Ограничения обычно задаются набором уравнений или неравенств.

Наличие ограничений суживает круг решений задачи и делает ее определенной. Без ограничений, называемых также дисциплинирующими условиями, задача обычно теряет смысл или становится тривиальной. Пример тривиальной задачи. На карьере, вскрытом групповыми траншеями, имеется несколько отвалов. Требуется распределить вывозимые объемы вскрышных пород по отвалам, так чтобы суммарные затраты на транспорт были минимальными. Очевидно, что породу надо вывозить на ближний отвал. Но такое решение не имеет смысла, так как обычно невыполнимо из-за того, что пропускная способность траншей и приемная способность отвалов ограничены. Введение ограничений приемной способности отвалов и пропускной способности траншей придает задаче определенность, дисциплинирует ее, исключает элементарность постановки.

Критерий эффективности выбирается в зависимости от цели задачи, ее природы и условий осуществления. С одной стороны, он должен быть достаточно прост, чтобы его легко было вычислить и анализировать, а с другой стороны, должен быть чувствителен (критичен) по отношению к оптимизируемым величинам (управляемым переменным).

В разных задачах критерий эффективности может быть различным. Например, в задачах наилучшего использования оборудования критерием эффективности является коэффициент использования. При выборе наилучшего типа оборудования или варианта проекта пользуются критерием приведенных затрат; при текущем планировании (когда количество и тип оборудования известны заранее) используется критерий текущих денежных затрат или прибыли. При проектировании горных предприятий в связи с разновременностью вложения средств при эксплуатации удобно пользоваться критерием затрат, приведенных к одному моменту оценки (этим учитывается фактор времени и технического прогресса). Критериями эффективности также могут быть объем работ, время их выполнения, производительность труда, вероятность выполнения задания и др.

Часто одну и ту же задачу можно решать с различным критерием эффективности. Например, в задаче составления наилучшего варианта плана за критерий можно выбрать либо объем выпуска продукции (который требуется максимизировать), либо затраты (которые минимизируют). В первом случае в качестве дисциплинирующего условия (ограничения) вводится наличие оборудования, рабочей силы и других ресурсов. Во втором случае дисциплинирующим условием является объем выпуска продукции. Здесь необходимо найти такое решение, которое минимизировало бы затраты на выполнение данного объе-

ма. Таким образом, иногда роли дисциплинирующих условий и показателя эффективности могут меняться, и выбор последнего производится с учетом специфики задачи и удобства расчетной схемы. Обычно от перемены мест показателя эффективности и ограничения сравнительная ценность решения не меняется.

При решении различных задач иногда приходится иметь дело не с одним, а с несколькими показателями эффективности. Это можно объяснить тем, что задача многоцелевая, а также неопределенностью постановки цели.

Рассмотрим, например, операцию, заключающуюся в строительстве карьера с целью быстрого ввода его в эксплуатацию. В этом случае в качестве критерия можно выбрать срок строительства карьера, который надо минимизировать.

Однако при анализе операции, помимо этого главного критерия, можно выявить и ряд других вспомогательных критериев. Так, далеко не безразлично, какими средствами будет достигнуто сокращение срока строительства. Этот критерий не является основным (так как цель операции не минимизация расходов на строительство), хотя и должен приниматься во внимание, поскольку возможное ускорение ввода карьера в эксплуатацию за счет приобретения излишнего оборудования и перерасхода средств не будет экономически оправдано.

Так обстоит дело во многих операционных задачах. Поэтому наряду с основным критерием эффективности следует учитывать и вспомогательные критерии.

В многоцелевых задачах (например, отгрузить определенный объем руды в заданный срок, обеспечив соблюдение кондиций, минимальное количество вредных примесей, равномерную загрузку оборудования и минимальные транспортные расходы) приходится принимать решение не по одному критерию, а по совокупности критериев.

Подобные задачи можно решать двумя способами:

- объединением нескольких показателей в один;
- сведением многоцелевых задач к одноцелевым.

В первом случае определяют составной (комплексный) критерий. Для этого за критерий эффективности принимают дробь, в числителе которой даются показатели, увеличение которых желательно, а в знаменателе - такие показатели, увеличение которых нежелательно. Например, в числителе приводится время, на которое карьер вводится в эксплуатацию раньше плана, а в знаменателе - дополнительные затраты для осуществления этого. Распространен также и другой вид комплексного критерия, в который частные критерии входят в виде слагаемых с некоторыми коэффициентами - удельными весами, определяемыми степенью их важности.

Коэффициенты могут быть положительными и отрицательными. К последним относятся коэффициенты у критериев, увеличение которых нежелательно.

Комплексные критерии имеют серьезные недостатки, заключающиеся в том, что недостатки одного частного критерия могут быть скомпенсированы достоинствами другого. Анализируя критерий, представленный в виде дроби, можно прийти к выводу, что выгодно не ускорять строительство и не вкладывать дополнительные средства. В этом случае вариант будет иметь бесконечно большую ценность.

Многоцелевые задачи можно свести к одноцелевым методами "основного критерия" и "последовательных уступок".

При методе *основного критерия* стремятся оптимизировать один главный критерий, а на остальные критерии накладывают дополнительные ограничительные условия. Так, в задаче отыскания варианта с наименьшим сроком строительства этот срок можно принять за основной критерий (т. е. минимизировать его), но при условии, чтобы стоимость строительства и количество ресурсов не превышали определенных пределов, т. е. в этом случае затраты становятся дисциплинирующим условием.

В более сложных случаях компромиссное решение многоцелевой задачи находится *методом уступок*. Для этого все критерии, характеризующие различные цели, располагают в порядке убывающей важности: сначала основной критерий C , затем вспомога-

тельные K_1 , K_2 , K_3 и т. д. Находят решение, оптимизирующее критерий C . Произвольно назначают уступку ΔC , на которую можно пойти в этом показателе, чтобы улучшить решение относительно критерия K_1 (сократить срок ввода карьера в эксплуатацию не на 100 дней, а на 90 и минимизировать при этом затраты на строительство).

На показатель C накладывают ограничение, чтобы он был не меньше ($C - \Delta C$); при этом находят решение, оптимизирующее критерий K_1 . Затем назначают уступку в критерии K_1 , за счет чего оптимизируют критерий K_2 и т. д.

Иногда вспомогательный критерий ограничивает область решений, найденную по основному критерию. В этом случае можно отыскать область оптимальных решений основной целевой функции и в этой области найти решение, оптимизирующее вторую целевую функцию.

Метод уступок удобен тем, что всегда видно, какой ценой за счет уступки в одном критерии приобретает выигрывает в другом.

Для решения одной и той же задачи можно построить разные модели, отличающиеся сложностью и чувствительностью к управляемым переменным. Может показаться, что более полная, широкая модель лучше соответствует условиям задачи. Однако помимо того, что с усложнением модели увеличиваются расчетные трудности, влияние главных факторов становится мало заметным из-за совокупного влияния большого числа других факторов. Поэтому "точность" широкой модели является кажущейся, обманчивой. Модель задачи должна быть как можно проще и не шире, чем это требуется условиями задачи.

Поэтому при составлении модели следует упрощать реальные условия настолько, чтобы при этом не терялись свойства и параметры, относящиеся к задаче, и достигалось относительно быстрое и простое ее решение.

Лекция №2

Методы решения моделей

1. Математические модели

Среди математических моделей можно выделить модели в виде уравнений. Как часть общего статистического исследования существует регрессионный анализ. Любое статистическое исследование имеет как минимум две цели: представление множества наблюдений в компактной форме и выявление, изучение отношений между наблюдаемыми факторами, признаками. И эти цели достигаются при использовании регрессионного анализа.

Будем называть регрессионной любую функцию, приближенно представляющую статистическую зависимость одной случайной величины от одной или нескольких других случайных величин. Тогда регрессионный анализ будет пониматься как анализ форм зависимостей, которые устанавливают количественные соотношения между случайными величинами изучаемого явления.

Полученная зависимость воспринимается как модель изучаемого явления. Полученная модель используется для решения задач прогнозирования случайной величины по данным эксперимента или наблюдений.

На методах регрессионного анализа основано построение моделей экономических систем.

Метод регрессионного анализа предназначен для создания модели, т.е. для создания аналитической зависимости, учитывающей характерные связи и взаимозависимости между выбранными факторами.

Факторы, вводимые в регрессионный анализ, определяются предыдущим анализом статистической информации.

Вид математической зависимости определяется путем предварительного анализа корреляционных зависимостей.

Регрессионный анализ предполагает и статистический анализ полученной зависимости. Для многих практических задач требуется установить и изучить зависимость случайной величины (Y) от одной или нескольких других величин или факторов ($X_1, X_2, \dots, X_m$), т.е. определить и изучить зависимость вида $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m)$.

Для простоты рассуждений можно рассматривать зависимость (Y) от одного фактора (X_1), хотя те же рассуждения можно распространить на несколько факторов.

Порядок проведения регрессионного анализа следующий.

Вся статистическая информация записывается в ведомость столбцами, где каждая строка - одно наблюдение. Тогда совокупность наблюдений предстанет в виде таблицы, где первый столбец - номер наблюдения, второй - значение Y , третий - значение X , соответственно по номеру наблюдения.

Естественно, при наличии нескольких факторов - таблица будет дополнена соответствующими столбцами.

Факторы Y и X могут быть связаны функциональной зависимостью, корреляционной зависимостью, либо быть независимыми.

При функциональной зависимости одному значению Y соответствует строго одно значение X (и наоборот, одному значению X_1 - одно значение Y).

Если, для примера, рассмотреть линейную зависимость, то все значения Y и X_1 ложатся на прямую. Поэтому задача регрессионного анализа сведется к нахождению параметров этой аналитической зависимости.

Но, как уже отмечалось, строгая функциональная зависимость в реальных условиях практически не существует, так как обе величины, или одна из них, подвержены случайным воздействиям. Тогда зависимость между Y и X_1 (если она вообще существует) можно считать корреляционной.

Изменение одной величины влечет изменение распределения другой, что проявляется в том, что изменение одной величины изменяет среднее значение другой.

Другими словами корреляционной зависимостью можно назвать функциональную зависимость условной средней X_y от Y , т.е. вида $X_y = f(Y)$ или обратную ей функцию $Y_x = f(X)$. При этом уравнение называют уравнением регрессии.

Теснота связи оценивается по критерию Стьюдента (таблицы t - распределения).

Из теории математики известно, что всегда можно определить аналитическую линию, проходящую через все заданные точки. Тогда для N наблюдений надо определить параметры полинома $N + 1$ порядка.

Но в реальных задачах, полином порядка $(N + 1)$ не имеет практического смысла. В теоретическом плане уравнение столь высокого порядка также лишено смысла, т.к. описывает лишь данную конкретную совокупность, а не явление в целом.

Обычно исследователи останавливаются на уравнении порядка не выше второго, чтобы можно было им пользоваться в практических целях. Наиболее часто используемый метод отыскания параметров уравнения - метод наименьших квадратов.

Линия, определяемая методом наименьших квадратов, представляет линию наилучшего подбора при определенных предпосылках применения этого метода: нормального распределения наблюдений и сведения квадратов остаточных величин к минимуму.

Рассмотрение уравнения регрессии для прогнозирования отдельных факторов правомочно только в пределах изменения самих наблюдений, взятых в анализ при определении линии регрессии.

Таким образом, для нахождения параметров уравнения регрессии требуется минимизировать функцию $F(X, Y)$, а именно

$$F(Y, X) = \sum [Y_i - f(X_i)]^2 /$$

Метод наименьших квадратов требует предварительного выбора вида уравнения регрессии. Если предположить, что выбранный вид уравнения - линейный, т.е. $f_1 = b_0 + b_1 \cdot X_1$, то методом наименьших квадратов будут определены параметры этого уравнения b_0 и b_1 . Частные производные, соответственно по b_0 и b_1 дадут два уравнения, решение которых относительно b_0 и b_1 дает искомый результат.

$$F(Y, X) = \sum_{i=1}^N [Y_i - f(X_1)_i]^2$$

$$\begin{cases} \sum [Y_i - (b_0 + b_1 \cdot X_1)_i] \left(\frac{df}{db_0} \right)_i = 0 \\ \sum [Y_i - (b_0 + b_1 \cdot X_1)_i] \left(\frac{df}{db_1} \right)_i = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{df}{db_0} \right)_i = 1$$

$$\left(\frac{df}{db_1} \right)_i = X_{1i}$$

$$\begin{cases} N \cdot b_0 + b_1 \sum_{i=1}^N X_{1i} = \sum_{i=1}^N Y_i \\ b_0 \cdot \sum_{i=1}^N X_{1i} + b_1 \cdot \sum_{i=1}^N X_{1i}^2 = \sum_{i=1}^N X_{1i} Y_i \end{cases}$$

Чаще всего в практических задачах трудно задаться видом уравнения. Большую помощь оказывает анализ парных зависимостей.

2. Методы решения моделей

Арсенал математических средств, используемых для решения моделей, обширен так же, как и характер решаемых задач. Одни и те же методы могут быть применены для задач разных классов и одна и та же задача или задачи одного класса могут решаться разными методами.

В наиболее простых задачах решение находится с помощью классических математических методов, например, дифференциального и вариационного исчисления. Однако при увеличении числа переменных и появлении дискретных функций эти методы неприменимы. Решением экстремальных задач неклассического типа занимается оптимальное (математическое) программирование.

Суть этих задач сводится к отысканию переменных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, дающих экстремум целевой функции при известных условиях (ограничениях), заданных уравнениями или неравенствами.

Математически задачу можно записать в следующем виде:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$\left. \begin{array}{l} g_1(x_1,x_2,...,x_n) \leq 0 \\ g_2(x_1,x_2,...,x_n) \leq 0 \\ \\ g_n(x_1,x_2,...,x_n) \leq 0 \\ x_i \geq 0(i=1,2,..n) \end{array} \right\}$$

Методы математического программирования подразделяются в зависимости от свойств функции ограничений q .

Задачи, в которых функция и ограничения линейны, решаются методами *линейного программирования*. Основным и универсальным методом линейного программирования является симплекс-метод. Некоторые классы линейных задач (например, широко распространенные транспортные задачи) решаются более простыми специальными методами (распределительным, венгерским, методом потенциалов).

В некоторых линейных задачах переменные x_i могут принимать лишь целочисленные значения. Такие задачи решаются методами *целочисленного программирования*.

Задачи, в которых функции или ограничения (полностью или хотя бы частично) нелинейны, изучаются *нелинейным программированием*. В этот класс входят задачи квадратичного программирования.

Операционные задачи, имеющие случайные параметры, решаются методами *стохастического программирования*, а задачи, в которых переменные и ограничения могут меняться в определенных пределах, - методами *параметрического программирования*.

В ряде случаев задачи имеют большую размерность и их решение требует сложных вычислительных действий. В таких случаях прибегают к *блочному программированию*, для чего задачу разбивают на ряд частных задач меньшей размерности. Блочное программирование в ряде случаев позволяет получить оптимальное или близкое к нему решение.

Динамическое программирование - это метод планирования многоступенчатого процесса, который может быть разделен на ряд последовательных этапов. При использовании этого метода в отличие от классического подхода и линейного программирования решение многомерной многоэтапной задачи производится не сразу, а последовательно, выбором оптимального решения на каждом этапе. Решение на каждом отдельном этапе принимается с учетом всех его последствий в будущем, т. е. чтобы оно вело к максимальному успеху всей операции в целом. Динамическое программирование эффективно используется при оптимизации целевых функций любого типа, при требованиях целочисленности решения, в динамических системах (когда требуется учитывать фактор времени). Этим методом решаются задачи распределения средств, управления запасами, замены и ремонта оборудования, упорядочения ресурсов и др.

На производственные процессы и работу горных предприятий существенно влияют случайные факторы. Поэтому параметры таких систем, критерий эффективности и ограничения задаются или оцениваются только вероятностно. Для решения подобных задач используют методы математической статистики, теории массового обслуживания, теории игр и статистических решений, теории надежности, основанных на теории вероятностей.

Теория массового обслуживания является основным аппаратом решения задач массового обслуживания. С ее помощью находятся количественные характеристики очередей в различных системах обслуживания, т. е. отыскиваются количественные характеристики организации управления процессом.

При моделировании особенно сложных систем, аналитическое описание которых затруднено, применяется *метод статистических испытаний*.

Этот метод математического моделирования производственных процессов, при котором в процесс моделирования в непосредственном виде включаются случайные факторы. Он аналогичен натурному эксперименту, но позволяет получать результаты в более короткие сроки и с меньшими затратами.

Для решения состязательных и некоторых других задач используется *теория игр и статистических решений*. С ее помощью количественно обосновываются решения в конфликтных или вероятностных ситуациях, в том числе и в условиях неопределенности.

В последнее время широкое применение (главным образом, для решения задач упорядочения) получил *метод сетевого планирования и управления* (СПУ), базирующийся на теории графов и сетей. С помощью этого метода координируются усилия многих исполнителей и коллективов при выполнении комплекса работ.

Четко очертить сферу приложения того или иного метода невозможно. Кроме того, границы применения методов построения и решения моделей непрерывно расширяются.

3. Порядок построения и решения моделей

Процесс математического моделирования включает семь этапов:

- уяснение и постановка задачи;
- выбор целевой функции и критерия эффективности;
- сбор исходных материалов, выявление управляемых и неуправляемых переменных;
- построение математической модели операции;
- решение модели, т. е. отыскание оптимума целевой функции;
- логическая или экспериментальная проверка модели и полученного решения;
- выбор рекомендаций по внедрению полученных результатов.

Данная схема не является универсальной, так как построение и решение модели требуют изобретательности. Это принципиальная схема, которая показывает порядок работ и в каждом конкретном случае в зависимости от задачи исследования может быть модифицирована.

На первом этапе определяют характер задачи и цель работы, предварительно оценивают возможные результаты и формулируют условия задачи, при которых они могут быть достигнуты.

На втором этапе устанавливают целевую функцию и критерий эффективности, затем приступают к выявлению управляемых и неуправляемых переменных, сбору материалов для установления зависимости между ними.

На третьем этапе выявляют, возможно большее число переменных, влияющих на решение, и после тщательного их анализа отбирают наиболее важные показатели. Критерий эффективности и значимость управляемых переменных устанавливают совместно с руководством предприятия. Затем производят сбор информации, т. е. определяют числовые значения постоянных коэффициентов (неуправляемых переменных). Причем надо не просто получить числовые значения отдельных величин, но и установить количественную взаимосвязь между ними. Следует отметить, что на сбор информации иногда приходится до трех четвертей всего времени моделирования. Наличие и достоверность информации во многом определяют не только продолжительность, но и успех исследования. При внедрении методов математического моделирования на предприятии улучшается система учета и сбора информации, что не только сокращает время дальнейших исследований, но и упрощает работу руководства.

На третьем этапе некоторые важные факторы могут выпасть из поля зрения и это повлияет на решение задачи. Такое положение может быть исправлено на шестом этапе работы, когда производят проверку модели и полученных результатов и вносят необходимые поправки.

В заключение разрабатывают рекомендации по внедрению результатов моделирования. В рекомендациях указывают производственные ситуации, для которых разработаны модели, эффективность возможных решений и непосредственно даны указания для практического действия.

Рекомендации должны быть написаны языком, понятным для тех, кто будет ими пользоваться. В них следует обстоятельно указывать функции каждого работника, внедряющего результаты моделирования, и порядок их выполнения. Однако на практике могут

возникнуть такие обстоятельства, которые заранее трудно предвидеть. Поэтому специалисты, разрабатывающие математические модели, должны принимать непосредственное участие в реализации своих выводов и рекомендаций.

Использование полученных рекомендаций должно позволить руководителю лучше обосновать принимаемое решение. Причем использование методов математического моделирования не снимает с руководителя обязанности принимать решения и отвечать за них.

Лекция №3 Линейное программирование

1. Основная задача линейного программирования

Основная задача линейного программирования в каноническом виде формулируется следующим образом:

найти неотрицательное решение системы ограничений

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + a_{in}x_{1n} + b_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

обеспечивающее максимум (минимум) целевой функции

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + Q \rightarrow \max(\min) \quad (2)$$

Кроме приведенной формы записи могут использоваться частично развернутая

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j + Q \rightarrow \max ;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m); \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

и матричная формы

$$Z = C \cdot x + Q \rightarrow \max ;$$

$$A \cdot x + B = 0 \quad x \geq 0$$

Все дальнейшие рассуждения будут проводиться только для основной задачи в каноническом виде.

Обычно конкретные задачи линейного программирования имеют отличный от канонического вид, поэтому чтобы решить такие задачи, их следует привести к каноническому виду.

Пусть задана задача линейного программирования с переменными и смешанной системой из m ограничений:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + Q \rightarrow \max ; \quad (3)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + a_{in}x_{1n} + b_i \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kj}x_j + a_{kn}x_{1n} + b_k \geq 0 \quad (k = r + 1, \dots, t)$$

$$a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \dots + a_{lj}x_j + a_{ln}x_{1n} + b_l = 0 \quad (l = r + 1, \dots, t) \quad (4)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s \leq n),$$

Для приведения этой задачи к каноническому виду необходимо заменить переменные, т. е. исключить те переменные, которые могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Система ограничений-неравенств должна быть заменена эквивалентной системой уравнений с неотрицательными переменными.

Замена неравенств уравнениями. Замена системы ограничений-неравенств в (4) эквивалентной системой уравнений осуществляется путем введения искусственных, неотрицательных переменных y_t

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + a_{in}x_{1n} + y_i + b_i = 0$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kj}x_j + a_{kn}x_{1n} - k + b_k = 0$$

$$y_i \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,r), \quad y_k \geq 0 \quad (k=r+1,\dots,t),$$

Такое преобразование увеличивает число переменных, не меняя существа задачи.

Замена неограниченных переменных. Переменные, которые могут принимать отрицательные значения, выражаются через неотрицательные переменные $x_1, x_2, \dots, x_s$ и $y_1, y_2, \dots, y_r$. Замена переменных представляет собой решение системы, относительно заменяемой переменной, и может быть выполнена с помощью жордановых исключений. Для замены одной переменной требуется один шаг исключений, поэтому привести задачу к каноническому виду можно только в случае, если ранг системы больше числа неограниченных переменных.

После замены задача решается в новых переменных. Оптимальное решение в новых переменных подставляется в уравнения связи, в результате чего получается оптимальное решение в исходных переменных.

При решении экономических и технических задач, как правило, переменные могут быть только положительными действительными числами. Если же в задаче какая-либо переменная по своей природе может принимать отрицательные значения, то в большинстве случаев изменение формулировки условий позволяет избавиться от неограниченных переменных.

Минимизация формы Z. В дальнейшем будет рассматриваться только задача максимизации формы Z. Если же необходимо решить задачу минимизации линейной формы, коэффициенты целевой функции следует умножить на (-1) и решать эту новую задачу на максимум. Искомый минимум целевой функции получается умножением найденного максимального значения на (-1), т. е.

$$Z_{\min} = -\max(-Z).$$

Оптимальным решением задачи линейного программирования, приведенной к каноническому виду, является неотрицательное решение системы ограничений (II. 1), обеспечивающее максимум целевой функции (II.2).

При решении системы ограничений могут возникнуть три случая:

1. Система ограничений несовместна и оптимальное решение невозможно. Несовместность системы ограничений обусловлена экономическими и технологическими причинами. Чаще всего несовместность объясняется недостаточным количеством ресурсов, из-за чего не могут быть выполнены ограничения по плановым объемам работ. Кроме того, в задачах планирования добычных работ несовместность системы ограничений часто обусловлена невозможностью выполнения требований к качеству полезного ископаемого при сложившейся производственной ситуации (определенном содержании полезных и вредных компонентов в блоках или забоях). Выявление ограничения, из-за которого вся система несовместна, позволяет уточнить постановку задачи.

2. Система ограничений имеет единственное решение $x_1 = \beta_1 \geq 0$; $x_2 = \beta_2 \geq 0$ $x_n = \beta_n \geq 0$. В этом случае задача линейного программирования сводится к решению системы линейных уравнений и подстановке этого единственного решения в целевую функцию, т. е.

$$Z_{\max} = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_n\beta_n + Q$$

3. Система ограничений имеет бесчисленное множество решений.

2. Линейная форма модели

Простейшая функция регрессии представляется в виде линейной функции:

$$y(x) = b_0 + b_1 \cdot x$$

Существует несколько способов, которыми прямая линия может быть определена для выражения приближенного отношения двух случайных величин Y и X .

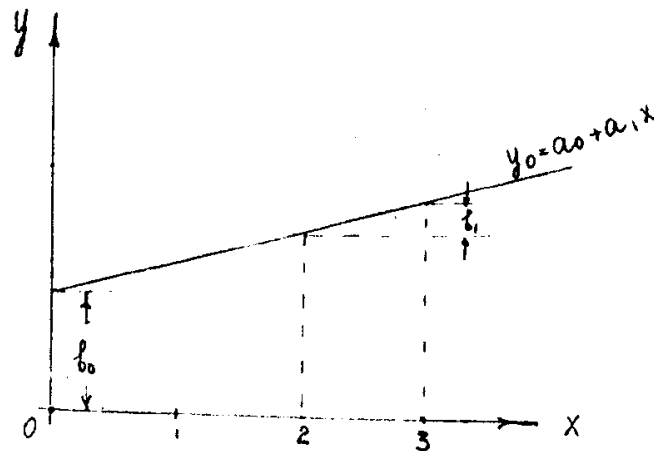
Пусть имеется N наблюдений или экспериментов, в результате которых получены N значений некоторого признака Y и некоторого признака X .

При этом обозначении, только для удобства рассуждений, принимается, что Y есть некоторая функция от X . В общем случае, в регрессионном анализе определяется и обратная зависимость X от Y , то есть $X(Y)$.

Самый простой способ определения прямой линии, пожалуй, графический. Достаточно в прямоугольных координатах нанести точки $(X, Y)_1, (X, Y)_2, \dots (X, Y)_N$ и провести на глазок прямую так, чтобы она расположилась как можно ближе к этим точкам. Или, в тех же координатах, нанести групповые средние, а потом провести линейкой, ниткой или на глазок прямую, близкую к средним. Конечно, не найдется и двух одинаковых вариантов такого подхода, но тем не менее этот подход вполне пригоден как первая прикидка. Но если требовать точное воспроизведение линии, если есть необходимость записи полученной аналитической зависимости, то необходимо определить численно параметры прямой линии. Поэтому требуется применение регрессионного анализа.

Определение любой линии, как уже сказано, состоит в нахождении параметров уравнения этой линии.

Значения параметров a_0 и a_1 для прямой линии можно проиллюстрировать рисунком (рис.1).



Так, значение a_0 определяется как высота линии (в единицах измерения Y) в точке, где значение $X = 0$.

Согласно данному виду уравнения при изменении X на одну единицу значение Y изменяется на значение в b_1 единиц.

Другими словами, разница в высоте линии, измеряемой в Y единицах, между точками, в которых X изменяется на единицу, представляет b_1 единицу Y . И это верно при любом значении X и изменении его на единицу.

Если пользоваться линией, которая получена математически, то эта линия будет единственной для данного математического метода.

Эта линия не будет точно совпадать с наблюдениями, а будет компромиссной, наиболее близко подойдет ко всем наблюдениям.

Выше было определено, что наилучшим способом подбора параметров линии является метод наименьших квадратов. Уравнения, на которых основывается применение этого метода, требуют расчетов.

Так, для получения параметров прямой линии, метод наименьших квадратов приводит к системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} b_0 \sum m + b_1 \sum xm = \sum ym \\ b_0 \sum mx + b_1 \sum x^2 m = \sum yxm \end{cases}$$

По правилам элементарной алгебры всякие два независимые уравнения с двумя неизвестными, если имеют решение, то единственное.

Так, написанная выше система двух уравнений относительно неизвестных b_0 и b_1 дает в итоге единственное решение - значения b_0 и b_1 . Тем самым определяется конкретный вид линейной модели.

О чем же говорит линия, определенная методом наименьших квадратов, что именно представляют параметры этого уравнения?

Если обратиться к рис. 1, то первый параметр - значение представляет собой ординату линии, когда $X=0$, тогда $Y=b_0$. Таким образом, параметр b_0 не имеет значения сам по себе, а представляет начало отсчета тех значений, в которые вложен реальный смысл.

Параметр b_1 всегда имеет смысловое значение.

Параметр b_1 , (рис. 1) показывает, насколько в среднем для всех наблюдений изменяется Y при изменении X на одну единицу в пределах наблюдаемых значений X и Y .

Такая интерпретация параметра a_1 , сохраняется всегда и является наиболее важным результатом при построении модели первого порядка.

Несмотря на то, что модель в виде полинома первого порядка является одной из простейших функций, прямая линия - зависимость большого значения и практической полезности.

Параметры прямой линии достаточно легко определяются, а сама функция легко поддается истолкованию и потому часто используется.

Во многих случаях, однако, теоретическая линия должна быть нелинейной, но линейная форма может в этом случае рассматриваться как эмпирический прием, как первое приближение теоретической линии к наблюдаемым значениям.

Лекция №4

Нелинейное программирование

1. Нелинейная форма модели

Методы, какими можно представить отношения в виде прямой, применимы и в случае кривых различного типа.

Типов кривых - бесконечное множество, однако в практике построения моделей используются кривые нескольких основных видов, таких как параболы второго, третьего порядка, гиперболы.

Для получения количественных значений параметров этих уравнений применяется метод наименьших квадратов.

Однако, вид уравнения заранее невозможно определить. Поэтому определяется несколько видов зависимостей и из них выбирается, согласно критериям, наилучшая, которая и принимается в качестве модели.

Для парных зависимостей исследуется несколько видов уравнений и сравниваются рассеяния результатов около линии регрессии (применяя остаточные дисперсии и критерий Фишера).

Выбранный вид уравнения регрессии служит указанием к выбору вида регрессии для множественных зависимостей. Принято определять параметры множественной ре-

грессии, принимая порядок уравнения не ниже самого высокого из входящих парных зависимостей.

2. Общая характеристика задач нелинейного программирования

Как было показано ранее, общая задача математического программирования состоит в оптимизации целевой функции

$$W = f(a_1, \dots, a_J, \dots, a_n; x_1, \dots, x_J, \dots, x_m)$$

при ограничениях

$$g_i = f_i(a_1, \dots, a_J, \dots, a_n; x_1, \dots, x_J, \dots, x_m) \leq A_i, \\ i=1, l.$$

Когда все ограничения и целевая функция были линейны, задача решалась методами линейного программирования. К линейным моделям сводится задача о расстановке оборудования, планирования добычи в режиме усреднения, распределения ресурсов, транспортная, размещения предприятий и др. Более детальное изучение практических ситуаций показывает, что большинство указанных задач по существу является нелинейными и сводится к линейным с достаточной степенью округления. Нелинейность этих задач прежде всего обусловлена зависимостью затрат или прибыли от объема выпуска продукции (т.е. коэффициентов целевой функции или ограничений c_i $a_{i,j} \neq \text{const}$), а также изменением показателей качества и использования сырья в зависимости от объемов работ (в задачах планирования работы горных предприятий и размещения промышленности).

Когда целевая функция или ограничения нелинейны, то возникает широкий класс задач нелинейного программирования. Общий метод решения нелинейных задач отсутствует. Предложенные алгоритмы позволяют эффективно решать лишь весьма узкий класс задач.

Задачи нелинейного программирования делятся на задачи с ограничениями и без ограничений, выпуклого и невыпуклого программирования (в зависимости от типа целевой функции). Весьма важными в практическом отношении являются задачи, в которых целевая функция квадратичная или сепарабельная (является суммой ряда функций).

Основную трудность при решении нелинейных задач составляет наличие множества экстремальных точек (рис. 1). Большинство же классических методов дают точки локального оптимума и не позволяют установить, является ли он глобальным, так как равенство нулю при всех производных в определенной точке необходимое, но недостаточное условие получения глобального оптимума. Перебор же всех экстремальных точек затруднен.

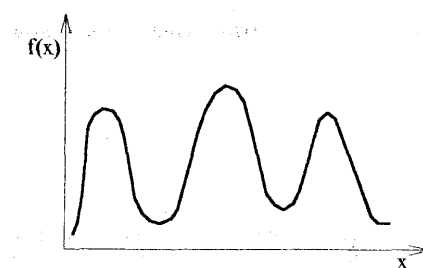


Рис.1. Многоэкстремальность целевой функции

Эффективный симплексный алгоритм решения задач линейного программирования удалось построить, так как доказывается, что область допустимых значений в линейных задачах выпукла, а решение находится в одной из вершин многогранника ограничений. В нелинейных задачах область допустимых решений не всегда выпукла, она может быть и вогнута, и даже разрывна. Кроме того, оптимум целевой функции может достигаться не

только в вершине многогранника, но и на его границе и даже внутри многогранника. Проиллюстрируем это примерами.

Пример 1. Найти экстремальные (минимальное и максимальное) значения сепаральной квадратичной целевой функции

$$Z = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 4)^2$$

при ограничениях:

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12, x_{1,2} \geq 0$$

Построив систему прямых, соответствующих ограничениям, получим область допустимых решений в виде многоугольника $ABCD$ (рис. 2). Целевая функция представляет собой уравнение окружности с центром в точке O (координаты 5,4). С уменьшением (увеличением) квадрата радиуса значение целевой функции уменьшается (увеличивается).

Минимум и максимум целевой функции получим, проводя из точки O окружности различных радиусов. Минимальное значение ($Z=9,32$) целевая функция принимает в точке касания окружностью многогранника ограничений (точка K) с координатами (2,4; 2,4), т.е. минимум не находится в вершине многогранника, а лежит на ребре. Максимальное же значение ($Z=29$) целевая функция достигает в точке A (с координатами 0,2), т.е. в вершине многогранника.

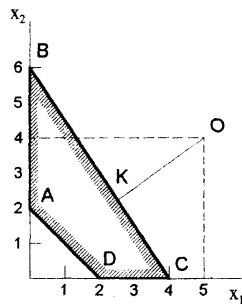


Рис.2 Расположение максимума целевой функции в вершине многоугольника ограничений (A), а минимума на ребре (D).

Лекция №5

Понятие и основные этапы сетевого планирования

1. Основные определения сетевого планирования

Среди методов, предназначенных для составления, планирования и управления реализацией программ производства или исследований, сетевые методы планирования и управления (СПУ), базирующиеся на идее критического пути, занимают ведущее место благодаря простоте, эффективности и большим возможностям.

Под программой понимается совокупность взаимосвязанных операций, которые необходимо выполнить в определенном порядке, чтобы достигнуть поставленной цели. Операции связаны отношением порядка в том смысле, что одни из них нельзя начать, прежде чем не будут завершены другие. Операция программы обычно рассматривается как работа, для выполнения которой требуются затраты времени и ресурсов.

В результате высокой эффективности сетевых методов они нашли широкое применение при составлении и реализации таких программ горного производства, как:

строительство новых и реконструкция действующих горных предприятий;

решение отдельных вопросов эксплуатационной деятельности горнодобывающих предприятий (вскрытие и подготовка новых горизонтов или участков, подготовка отдельных очистных блоков, внедрение новой* техники и технологии, строительно-монтажные и пуско-наладочные работы и капитальный ремонт крупного технологического оборудования, ликвидация аварий и т.д.);

эксплуатационная деятельность горнодобывающего предприятия в целом (отработка блоков; капитальные и подготовительные работы, необходимые для отработки этих блоков; создание резерва подготовленных и готовых к выемке запасов в других блоках); ряд других производственных и научно-исследовательских программ.

Использование сетевых методов дает возможность увязать во времени программу производства работ, планировать последовательность их выполнения, выявлять и устранять возникающие в процессе реализации нарушения. Анализ сетевых моделей позволяет: определить, от каких операций и в какой степени зависит срок выполнения всей программы; предвидеть появление "узких мест"; выделить второстепенные, с точки зрения времени реализации программы, работы, сокращение продолжительности которых не только не приведет к уменьшению времени выполнения всей совокупности операций, но и может привести к увеличению стоимости работ и простоев рабочих и оборудования. Кроме того, сетевые методы позволяют дать обоснованные, в том числе и с экономической точки зрения, ответы на вопросы организации выполнения работ программы.

Основой сетевых методов планирования и управления является представление программы в виде сетевой модели или сети, которая отражает отношение порядка, существующее на множестве операций программы.

Сетью называется ориентированный связанный граф без контура, в котором существует лишь только одна вершина, не имеющая входящих дуг, и только одна вершина, не имеющая выходящих дуг.

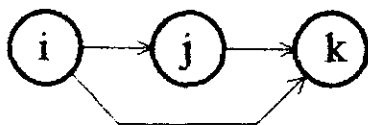


Рис.1. Сетевая модель

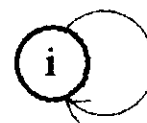


Рис.2. Петля

Следовательно, математической основой сетевых методов служит теория графов, которая, в свою очередь, является важной частью теории множеств. Однако в прикладных методах сетевого планирования принята несколько иная терминология и система обозначений. На ней сконцентрируем основное внимание в этом параграфе.

"Сетевая модель" или "сеть" - это граф, состоящий из вершин - "событий" и направленных дуг - "работ" или "операций" (рис. 1).

Событие в сетевой модели задается индексом и обозначает момент начала или окончания работ. Событие, обозначающее только начальные моменты работы именуется исходным, а событие, состоящее только в окончании работ, - завершающим. На рис. 1 исходное событие - i и завершающее - k . Промежуточное событие, или просто событие, например, на рис. 1 событие j , состоит в окончании одних и начале других работ. Если событие завершает несколько работ, то оно наступает только в момент окончания последней по времени, входящей в него работы.

Каждая работа в модели однозначно определяется начальным и конечным событиями и обозначается через индексы, взятые в круглые скобки. Например, (i, j) - работа с i -м начальным и j -м конечным событием. Из определения сети, а также, условия однозначности отображения и характера описываемого объекта вытекают следующие требования:

в сети не должно быть петель (рис. 2), т.е. одно и то же событие не может быть начальным и конечным событием работы, что соответствует невозможности существования операции (i, i) ;

в сети не должно быть параллельных работ, имеющих общее начальное и общее конечное события (рис. 3,а), от которых избавляются путем введения различных начальных и конечных событий работ (рис. 3,б,в).

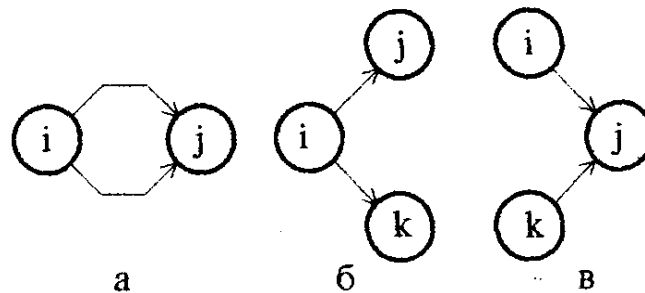


Рис.3. Параллельные работы (а) и способы их представления в сети (б) и (в)

Работа в сетевой модели может означать:

действительную работу - реальный процесс, требующий затрат времени и ресурсов;

ожидание - процесс, имеющий длительность, но не требующий ресурсов;

фиктивную работу, означающую логическую связь между двумя событиями.

Если события i и j связаны фиктивной работой (i, j), то из этого следует, что событие j наступит только после свершения события i . Фиктивные работы имеют нулевые длительность и расход ресурсов.

Графически действительные работы и ожидания обозначаются сплошными, а фиктивные работы - пунктирными стрелками, которые указывают на конечное событие работы.

Последовательность работ, соединяющие два события i и j , образуют путь, обозначаемый $L(i, j, \dots, f)$, где $i, j, \dots, f$ - индексы событий, через которые проходит этот путь.

Сетевая модель отражает последовательность выполнения работ и в комплексе с временными параметрами работ и событий образует план реализаций совокупности операций программы.

В сетевом планировании оперируют следующими временными параметрами:

t_y - длительность работы (i, j); T_{pi} - ранний срок наступления i -го события; T_{ni} - поздний срок наступления i -го события; R_i - резерв времени наступления i -го события; r_y - полный резерв времени выполнения работы (i, j); Δ_{ij} - свободный резерв времени выполнения работы (i, j); $T_L(i, j, \dots, f)$ - продолжительность пути $L(i, j, \dots, f)$; S - продолжительность критического пути.

Порядок расчета и смысл этих величин будет определен ниже.

Сетевое планирование и управление реализацией программ включает три основных этапа:

- структурное планирование;
- календарное планирование;
- оперативное управление.

На этапе структурного планирования выполняются: разбиение программы на операции и определение условий их выполнения; построение сетевой модели и нумерация ее событий. Построение сетевой модели на этапе структурного планирования позволяет детально проанализировать программу и внести улучшения в ее структуру еще до начала реализации.

Целью календарного планирования (планирования во времени) является построение плана, определяющего моменты начала и окончания каждой операции, а также ее взаимосвязь с другими операциями программы. Кроме того, календарный план должен обеспечить возможность выявления критических (по времени) операций (которым необходимо

уделять особое внимание, чтобы выполнить программу в директивный срок), а также резервов времени некритических операций. Этап включает: расчет временных параметров событий и работ сетевой модели и определение критического пути; построение календарного плана и его оптимизацию.

Этап (заключительный) оперативного управления процессом реализации программы включает использование структурного (сетевой модели) и календарного планов для составления периодических отчетов о ходе ее выполнения. Сетевая модель подвергается анализу и, в случае необходимости, корректируется, при этом составляется новый календарный план реализации оставшейся части программы.

2. Сетевое планирование

Исходной информацией для построения сетевой модели являются перечень работ или операций программы, сведения об их технологической последовательности, длительности и необходимых ресурсах для их выполнения. Подготовка такой информации требует знаний технологии, способов и условий ведения работ, основ нормирования, требований техники безопасности и т.д. Эта наиболее творческая и наименее формализованная часть этапа структурного планирования. После сведения информации в таблицу определенного вида все дальнейшие действия выполняются по строгим формальным правилам независимо от характера реализуемой программы.

Исходная информация и результаты последующих расчетов заносятся в специальную форму (форма 1), которая в дальнейшем будет именоваться "таблица работ".

Форма 1

Наименование работы	Номер работы	Номера непосредственно предшествующих работ	Индекс начального события работы i	Индекс конечного события работы j	Длительность работы t_{ij}	Полный резерв времени работы r_{ij}	Свободный резерв времени работы
1	2	3	4	5	6	7	8

В таблице работ исходная информация занимает 1, 2, 3, 6 столбцы, а остальные заполняются по мере построения и расчета временных параметров модели. Число строк должно превышать количество работ в исходном списке примерно в полтора раза, чтобы обеспечить все дальнейшие записи без увеличения таблицы.

Наименования работ заносятся в произвольной последовательности и им присваиваются неповторяющиеся номера. Обычно для нумерации используется последовательный ряд натуральных чисел, начиная с единицы.

Далее, исходя из принятой последовательности работ, в столбце 3 перечисляются номера непосредственно предшествующих работ. Это наиболее ответственная процедура, от которой зависит соответствие сетевой модели реальной последовательности операций. Составление перечня предшествующих работ выполняется по следующим правилам.

1. Для каждой работы в произвольной последовательности указываются номера операций, от которых зависит ее начало. Если предшествующих работ нет, то графа не заполняется.

2. Если нельзя с уверенностью определить, является ли рассматриваемая работа непосредственно предшествующей или влияет через другие операции, ее номер следует

включить в перечень. Избыточные номера предшествующих работ, т.е. влияющих через другие операции, не могут исказить сетевой модели, а лишь увеличивают трудоемкость ее построения.

3. Если две работы могут выполняться частично параллельно, то их части, выполняемые последовательно и параллельно, рассматриваются как самостоятельные операции и им присваиваются собственные названия и номера.

4. Если в процессе выполнения работы есть периоды со значительным колебанием расхода ресурсов, то эта работа разделяется на последовательные операции с постоянными расходами ресурсов, им присваиваются собственные названия и номера.

При составлении "таблицы работ" следует избегать излишней детализации перечня операций и включения избыточной информации о предшествующих работах.

На этом этапе могут быть допущены следующие ошибки.

1. При составлении перечня условий выполнения работы ошибочно включен номер параллельно выполняемой или пропущен номер предшествующей работы. Эта ошибка может быть выявлена только в результате тщательного сравнения записи условий и последовательности работ в программе.

2. В таблицу включен комплекс замкнутых циклических операций. Например, в табл.1 работа В зависит от выполнения работы А, С - от В, а А - от С. Такой комплекс работ выявляется и ликвидируется в процессе построения сетевой модели.

Таблица 1.

Наименование работы	Номер работы	Номера непосредственно предшествующей работы
А	1	3
Б	2	1
В	3	2

Лекция № 6

ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ И КЛАССИФИКАЦИЯ ТИПОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ

В настоящее время все основные технологические процессы на горных предприятиях (подготовка горных пород к выемке, погрузка, транспорт и отвалообразование) механизированы.

К числу основных задач, решаемых при организации технологических процессов, относятся:

- рациональный подбор комплекта оборудования;
- увязка различных процессов во времени;
- определение резервов между отдельными процессами и видами работ.

Работа машин и механизмов подвержена влиянию случайных факторов трех групп.

К первой группе относятся природные факторы (изменения горно-геологических условий, физико-механические свойства пород, климатические условия); ко второй — технические (аварии и поломки оборудования, частота и продолжительность которых определяются надежностью машин), к третьей — социально-психологические факторы.

При решении различных производственных задач надо учитывать влияние случайных факторов, что вызывает необходимость применения вероятностных методов исследования. В последние годы в проектировании, планировании и управлении находит широкое применение метод статистического моделирования, который позволяет учитывать стохастический характер производственного процесса, функциональные и обратные связи между машинами и механизмами, наличие резервирования.

Статистическое моделирование — один из основных методов имитационного моделирования, цель которого состоит в воспроизведении поведения анализируемой производственной системы на основе анализа наиболее существенных связей и взаимодействия отдельных ее элементов.

Перед моделированием производственных процессов необходимо всесторонне проанализировать характер структурных связей и взаимодействий между машинами и механизмами - структуру процессов.

Под термином "структура процесса" будем понимать определенное сочетание тех или иных машин или звеньев с учетом имеющихся связей между ними.

Основным и общим во всех работах, связанных со структурными исследованиями, является стремление очистить объект исследования от всего второстепенного и рассмотреть лишь наиболее характерные его признаки.

Структурный анализ позволяет изучать объект в его наиболее общем и чистом виде. Уделяя основное внимание выявлению взаимных связей между отдельными машинами или звеньями и тем самым выдвигая на первое место структуру процесса, а не состав его отдельных частей, получаем возможность единообразно исследовать и моделировать различные по содержанию процессы.

Анализ взаимодействий между отдельными звеньями (машинами и механизмами) производственного процесса позволил выделить следующие три основных их способа:

непосредственный — обуславливает жесткую зависимость между смежными звеньями комплекса. При непосредственном взаимодействии остановка любого из механизмов, увязанных в последовательной цепочке, вызывает остановку всего комплекса. Примером такого способа может служить взаимодействие роторного экскаватора с забойным конвейером, работа става конвейеров и др.;

взаимодействие через промежуточный склад — при таком способе взаимодействия снимается непосредственная зависимость между смежными звеньями комплекса, и отдельные звенья определенное время могут работать самостоятельно (на склад или со склада). Такой способ взаимодействия часто встречается при кратной перевалке вскрышных пород, когда два экскаватора связаны между собой через промежуточный отвал. К этому же способу следует отнести и взаимодействие буровзрывных и погрузочных работ и др.;

взаимодействие как процесс обслуживания — имеет некоторые черты непосредственного взаимодействия, однако принципиально отличается от него тем, что процесс взаимодействия прерывен и носит характер обслуживания отдельных требований, поступающих через случайные промежутки времени.

Приведенная классификация способов взаимодействия машин и механизмов позволяет осуществить системный подход к проблеме моделирования производственных процессов и свести многообразие методов расчета к сравнительно небольшому числу универсальных вычислительных схем (алгоритмов моделирования), отличающихся простотой и легко реализуемых на ЭВМ.

Поскольку, как уже упоминалось, функционирование производственных процессов в значительной степени определяется вероятностными параметрами, находящимися в сложной взаимосвязи, в качестве основного математического аппарата используется метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) или аналитические методы теории массового обслуживания и теории надежности.

Использование аналитических методов накладывает ряд весьма жестких и существенных требований и ограничений на характер процесса: отсутствие или неучет влияния емкости промежуточных складов, определенный (чаще всего простейший) поток оборудования и требований на обслуживание, показательный закон распределения времени на обслуживание, что идеализирует процесс и ухудшает результаты расчетов.

Метод статистических испытаний заключается в моделировании на ЭВМ производственных процессов по тем же законам, что и в натуре, но в измененном масштабе времени.

Учитывая важность и все возрастающее применение имитационного моделирования для решения различных проектных, организационных и управленческих задач с целью упрощения реализации имитационных моделей на ЭВМ разработаны специальные языки программирования (CPSS, Simula и др.).

Обычно при использовании метода статистических испытаний работа машин и механизмов имитируется определенными блоками программ. Блоки алгоритмов, имитирующие на ЭВМ работу машин и механизмов по определенным законам, характерным для протекания данного процесса, представляют собой датчики (генераторы) случайных чисел. Наибольшее применение нашел программный метод получения случайных чисел, для реализации которого разработаны программы для любых законов распределения. В их основе лежит первоначальное получение случайных чисел с равномерным законом распределения и их последующее преобразование в распределение с требуемым законом и параметрами.