22.01.21 г. Теоретическая механика. Лекция
Тема: Статика. Кинематика

1. СТАТИКА

1.1. Основные понятия и аксиомы

Статика – это раздел теоретической механики, в котором изучается методы преобразования системы сил в эквивалентные и устанавливающие условия равновесия сил, приложенных к твердому телу.

Основными объектами исследования в теоретической механике являются:

- *материальная точка* – это материальное тело, размерами которого можно пренебречь;
- *механическая система* – это любая совокупность материальных точек;
- *абсолютно твердое тело* – это механическая система, расстояние между точками которой не изменяется при любых взаимодействиях.

В основе статики лежат ее аксиомы.

1. *Аксиома инерции.* Под действием взаимно уравновешивающихся сил материальная точка находится в состоянии покоя или движется прямолинейно и равномерно.

2. *Аксиома равновесия двух сил.* Две силы, приложенные к твердому телу, взаимно уравновешиваются только в том случае, если их модули равны, и они направлены по одной прямой в противоположные стороны.

3. *Аксиома присоединения и исключения уравновешивающихся сил.* Действие системы сил на твердое тело не изменится, если к ней присоединить или из нее исключить систему взаимно уравновешивающихся сил.

4. *Аксиома параллелограмма сил.* Равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рис. 1.1) и выражается геометрическим равенством: $\overline{R} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2$, а модуль этой силы определяется по формуле:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos\varphi}\,.$$

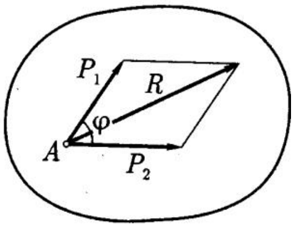


Рис. 1.1

5. *Аксиома равенства действия и противодействия.* Всякому действия соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

6. *Аксиома затвердевания.* Равновесие сил, приложенных деформирующемуся телу, сохраняет при его затвердевании.

В основе разделов статика лежит понятие силы.

Сила – это мера механического взаимодействия тел и определяющая ее интенсивность и направление.

Сила определяется тремя элементами: числовым значением или модулем, направлением и точкой приложения. За единицу измерения силы в системе СИ принимается ньютон (*Н*). Модуль вектора силы можно определить по методу проекций, т.е. по отношению к координатным осям. Проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и оси, определяя знак проекции непосредственно по чертежу. Если направление оси и проекции силы в одну сторону, то проекция положительна, т.е. со знаком (+), если противоположна, то со знаком (-) .

Совокупность нескольких сил, приложенных к твердому телу, является *системой сил.*

Сила, эквивалентная некоторой системе сил называется *равнодействующей*.

Сила, равная по модулю равнодействующей и направленная в противоположную сторону, называется *уравновешивающей силой.*

С понятием силы связано важное определение момент силы относительно точки и оси.

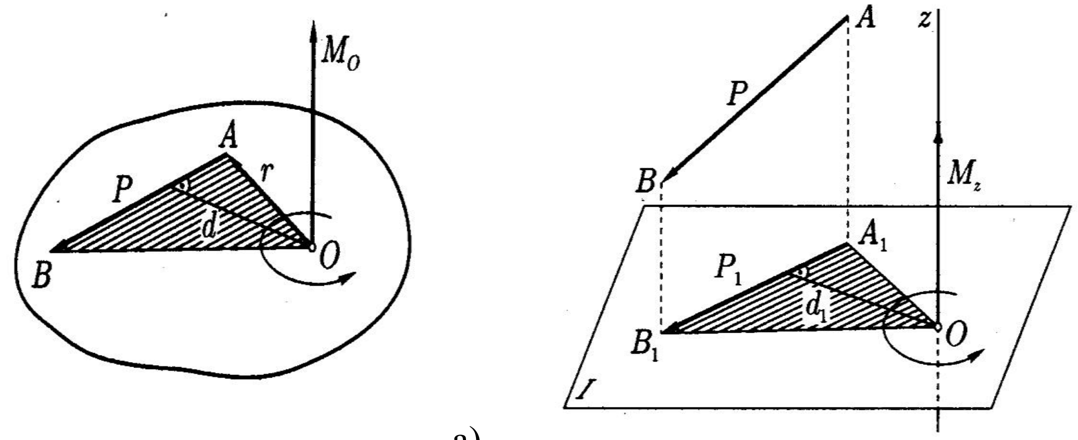
Моментом силы относительно точки О (рис. 1.2, а) называется вектор, приложенный в этой точке и направленный перпендикулярно к плоскости, содержащей силу и точку, в такую сторону, чтобы смотря на встречу этому вектору, видеть силу стремящейся вращать плоскость в сторону, обратную вращению часовой стрелки. В векторной форме получаем $\overline{M}_o(\overline{P}) = \overline{P} \times \overline{r}$, а модуль этого вектора равен произведению модуля силы *P* на ее плечо *d* относительно точки *O*: $M_o = Pd$.

Знак выбирается:

- если сила *P* пытается вращать против часовой стрелки, значит момент положительный;
- если сила *P* пытается вращать по часовой стрелки, значит момент отрицательный.

Моментом силы относительно оси z (рис. 1.2, б) называется взятое со знаком минус или плюс произведение проекции силы на плоскость перпендикулярную к оси на плечо от точки пересечения оси с плоскости до проекции силы на плоскости: $M_z = P_1 d_1$.

Момент силы в системе СИ имеет единицу размерности – ньютон · метр (*Н·м*).



а) б)

Рис. 1.2

На равновесие тела влияют наложенные на него связи. *Связь* – это тело, ограничивающее свободу движения рассматриваемого тела. Для того чтобы избавиться от связей необходимо применить принцип освобождаемости от связей: «Несвободное твердое тело можно рассмотреть как свободное, на которое кроме задаваемых сил действуют реакции связей»

Задаваемые силы – это силы, определяющие действие на тела других тел, вызывающих или способных вызвать изменение его кинематического состояния.

Реакции связей – это сила или система сил, определяющие действие на тела связи. Основные типы связей и реакций, соответствующих этим связям, показаны на рис. 1.3.

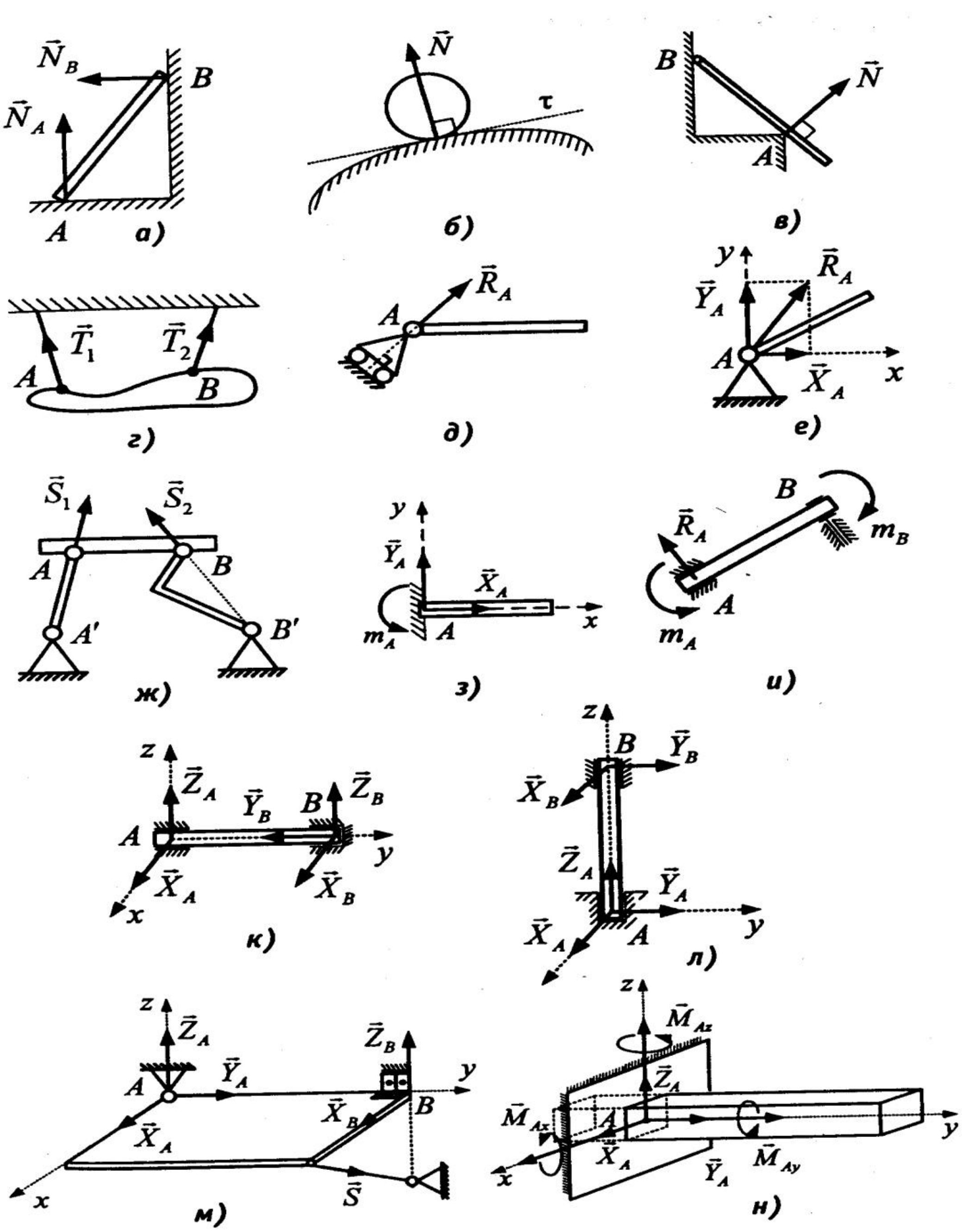


Рис. 1.3

1.2. Система сходящихся сил

Силы называются сходящимися, если их линии действия пересекаются в одной точке. Действие сходящихся сил на твердое тело характеризуется равнодействующей. Чтобы система сходящихся сил была уравновешена достаточно выполнение условия: геометрическая сумма сил ($\sum \overline{F} = 0$) или сумма проекций сил на каждую из координатных осей должны быть равны нулю, т. е. $\sum F_x = 0;\ \sum F_y = 0; \sum F_z = 0.$

1.3. Пара сил

Система равных по модулю, противоположно направленных, параллельных сил называется парой сил.

Действие пары сил на твердое тело характеризуется ее моментом. Моментом пары сил называется вектор, направленный перпендикулярно к плоскости, содержащей силы пары, в такую сторону, чтобы смотря навстречу этому вектору видеть силы, стремящимися вращать против часовой стрелки. *Условие равновесие тела, под действием пар сил:* геометрическая сумма моментов пар сил равна нулю ($\sum \overline{M} = 0$) или проекция этой суммы на координатные оси декартовой системы координат равна нулю $\sum M_x = 0$; $\sum M_y = 0$; $\sum M_z = 0$.

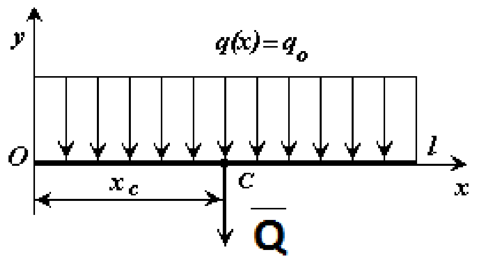
1.4. Произвольная система сил

Произвольная система сил характеризуется действием на твердое тело главным вектором $\overline{R}^* = \sum \overline{F}_i$ и главным моментом $\overline{M}_O{}^* = \sum \overline{M}_{Oi}$ произвольной системы сил. Главным вектором произвольной системы сил называется геометрическая сумма произвольных сил. Главным моментом произвольной системы сил относительно центра приведения называется геометрическая сумма моментов сил, действующих на тело относительно центра приведения. Выбор центра приведения не влияет на числовое значение и направление главного вектора, но влияет на модуль и направление главного момента произвольной системы сил.

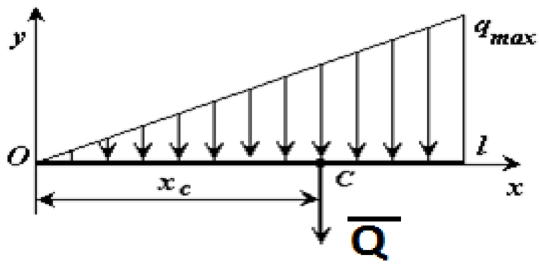
Условие равновесия произвольной системы сил, действующей на твердое тело – это $\overline{R}^* = 0$ и $\overline{M}_O{}^* = 0$ или при ориентировании системы в плоскости или в пространстве это соотношении может преобразоваться:
для плоскости: $\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$; $\sum M_O(\overline{F}_i) = 0$; для пространства: $\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$; $\sum F_z = 0$; $\sum M_x(\overline{F}_i) = 0$; $\sum M_y(\overline{F}_i) = 0$; $\sum M_z(\overline{F}_i) = 0$.

1.5. Распределённая нагрузка

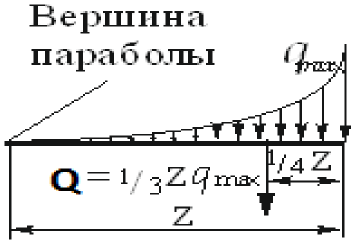
Распределенная нагрузка q по отрезку при действии на твердое тело может быть заменена сосредоточенной силой Q. Сосредоточенная сила эквивалентна соотношению: $Q = \int_0^l q(x)dx$ и прикладывается в точке C с координатой $x_C = \dfrac{\int_0^l x \cdot q(x)dx}{R}$. Рассмотрим примеры действия на твердое тело распределенной нагрузки



$$Q = ql\,,\ x_C = \frac{l}{2}$$



$$Q = \frac{1}{2}q_{\max}l\,,\ x_C = \frac{2l}{3}$$



1.6. Центр тяжести

Центром параллельных сил, найденный последовательным сложением параллельных сил, будем называть точку C, радиус-вектор которой определяется формулой: $\bar{r}_C = \dfrac{\sum \bar{F}_i \bar{r}_i}{\sum \bar{F}_i} = \dfrac{\sum \bar{F}_i \bar{r}_i}{\bar{R}}$, или в проекциях на координатные оси: $x_C = \dfrac{\sum \bar{F}_i x_i}{\sum \bar{F}_i} = \dfrac{\sum \bar{F}_i x_i}{\bar{R}}$, $y_C = \dfrac{\sum \bar{F}_i y_i}{\sum \bar{F}_i} = \dfrac{\sum \bar{F}_i y_i}{\bar{R}}$, $z_C = \dfrac{\sum \bar{F}_i z_i}{\sum \bar{F}_i} = \dfrac{\sum \bar{F}_i z_i}{\bar{R}}$, где $\bar{F}_i$ - i-тая сила в системе параллельных сил, $\bar{r}_i$ – радиус вектор, x_i, y_i, z_i - координаты точек приложения параллельных сил.

Центр тяжести тела – это центр параллельных сил тяжести, т. е. геометрическая точка через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести тела при любом положении тела в пространстве.

Если тело однородное, то вес отдельной части его $P_i = V_i \cdot \gamma$, где γ - удельный вес материала, из которого сделано тело, а V_i - объём этой части тела, то тогда центр тяжести будет иметь вид:

$$x_C = \frac{\sum V_i x_i}{\sum V_i},\ y_C = \frac{\sum V_i y_i}{\sum V_i},\ z_C = \frac{\sum V_i z_i}{\sum V_i}.$$

Если тело характеризуется площадью (S) или размером (l), то центр тяжести соответственно будет определяться:

$$x_C = \frac{\sum S_i x_i}{\sum S_i},\ y_C = \frac{\sum S_i y_i}{\sum S_i},\ z_C = \frac{\sum S_i z_i}{\sum S_i},$$

$$x_C = \frac{\sum l_i x_i}{\sum l_i},\ y_C = \frac{\sum l_i y_i}{\sum l_i},\ z_C = \frac{\sum l_i z_i}{\sum l_i}.$$

2. Кинематика

Кинематикой называют раздел теоретической механики, изучающий движение материальных тел с геометрической точки.

В основе раздела кинематика лежат основные определения:

Законом движения точки (твердого тела) называется математическая зависимость, определяющая положение точки (тела) в пространстве от времени.

Траекторией точки называется – любая линия, описанная движущейся точкой.

2.1. Кинематика точки

Существует три основных способа задания движения точки: векторный, координатный, естественный.

Векторный способ задания движения точки заключается в том, что положение точки определяется радиусом вектором от некоторой неподвижной точки. В каждое новое положение точки можно провести радиус-вектор. Зависимость радиуса вектора от времени является законом движения точки в векторной форме – $\bar{r} = \bar{r}(t)$.

Траектория точки определяется концом радиуса вектора, поэтому траектория точки в векторном способе – это годограф радиуса-вектора $\bar{r}$ или геометрическое место концов радиуса-вектора $\bar{r}$.

Координатный способ задания движения точки заключается в том, что положение точки определяется системой декартовыми координатами. В каждый момент времени точки имеет определенные координаты. Зависимость этих координат от времени – закон движения точки в координатной точке, т. е. $x=f(t)$, $y=f(t)$, $z=f(t)$.

Чтобы определить уравнение траектории в координатном способе нужно выразить параметр независимой переменной t через одну из координат, например через x. Если $t=u(x)$, тогда $y = f_1(u(x))$, $z = f_2(u(x))$.

Естественный способ задания движения точки заключается в том, что положение точки заранее известно. На траектории точки от некоторой неподвижной точки (начало координат) откладывается криволинейная координата s. Изменение криволинейной координаты s от времени является закон движения точки в естественной форме и уравнением траектории – $s=f(t)$.

Самым распространенным способом является координатный способ задания движения точки. Этот способ связан с другими способами соотношениями:

- взаимосвязь векторного и координатного способов задания движения точки: $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ - единичные орто-вектора координатных осей x, y, z;

- взаимосвязь естественного и координатного способов задания движения точки: $s = \int_{t1}^{t2} \sqrt{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]} dt.$

Движение точки по траектории характеризует скорость и ускорение точки.

Скорость точки – это векторная величина, характеризующая быстроту изменения положения точки в пространстве от времени.

Скорость точки направлена по касательной к траектории и в системе СИ измеряется в *м/с*.

Скорость точки в зависимости от способа задания движения точки можно определить:

1. Векторным способом $\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}$.

2. Координатным способом $\bar{V} = V_x\bar{i} + V_y\bar{j} + V_z\bar{k}$, где $V_x = \frac{dx}{dt}$, $V_y = \frac{dy}{dt}$, $V_z = \frac{dz}{dt}$ - проекции скорости на координатные оси.

Модуль скорости можно определить по методу проекций $V = \sqrt{V_x^{\ 2} + V_y^{\ 2} + V_z^{\ 2}}$.

3. Естественным способом $\bar{V} = \frac{ds}{dt}\bar{\tau}$,где - $V = \frac{ds}{dt}$ - модуль скорости, $\bar{\tau}$ - единичный орто-вектор касательной.

Ускорение точки – это векторная величина, характеризующая быстроту изменения модуля и направления вектора скорости. Ускорение точки в системе СИ измеряется в *м/с²*. Ускорение точки в зависимости от способа задания движения можно определить:

1. Векторным способом: $\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{d^2t}$.

2. Координатным способом: $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$, где $a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{d^2t}$, $a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{d^2t}$, $a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{d^2t}$ - проекции скорости на координатные оси. Модуль ускорения точки определяется через проекции $a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$.

3. Естественным способом: $\bar{a} = a_\tau\bar{\tau} + a_n\bar{n}$, где a_τ, a_n - модули касательного и нормального ускорений, $\bar{\tau}$, $\bar{n}$ - единичный орто-вектора касательной и нормали в естественном трехграннике.

Касательное ускорение – это векторная величина, характеризующая быстроту изменения модуля скорости. По модулю касательное ускорение определяется как $a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2s}{d^2t}$. Это ускорение можно определить, продифференцировав соотношение $V = \sqrt{V_x{}^2 + V_y{}^2 + V_z{}^2}$, в результате получим: $a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y + V_z a_z}{V}$.

Нормальное ускорение определяется как $a_n = V^2/\rho$, где ρ – радиус кривизны траектории точки. Модуль и направление ускорения при естественном способе задания движения определяются соотношениями: $a = \sqrt{a_\tau{}^2 + a_n{}^2}$, $\cos(\bar{a},\bar{\tau}) = \frac{a_\tau}{a}, \cos(\bar{a},\bar{n}) = \frac{a_n}{a}$

2.2. Кинематика твердого тела

В зависимости от движения тела кинематику твердого тела можно разделить на пять разделов: поступательное движение твердого тела, вращательное движение твердого тела, плоское или плоскопараллельное движение твердого тела, сферическое движение твердого тела, общий случай движения твердого тела.

Поступательным движение твердого тела называется такое движение твердого тела, при котором прямая, соединяющая две точки тела, движется параллельно самой себе.

Свойства точек тела, движущегося поступательно, определяется теоремой: Все точки твердого тела, движущегося поступательно, описывают одинаковые (совпадающие при наложении) траектории, и имеют одинаковые скорости и ускорения. На основании этой теоремы, если знать, как движется одна точка такого тела, то аналогично будут двигаться и другие точки тела, поэтому поступательное движение твердого тела сводиться к кинематике точки. Закон поступательного движения можно представить выражениями: при векторном способе - $\bar{r}_C = \bar{r}(t)$; при координатном способе - $x_C=f(t)$, $y_C=f(t)$, $z_C=f(t)$; при естественном способе - $s_C=f(t)$, где C – центр тяжести или массы тела.

Вращательным движением твердого тела называется такое движение тела, при котором все точки этого тела остаются неподвижными, находящиеся на некоторой прямой, называемой осью вращения, а остальные точки описывают окружность с центром на этой прямой.

Вращение тела вокруг неподвижной оси определяется углом поворота φ. Угол поворота считается положительным, если вращение тела происходит против часовой стрелки. В системе СИ угол поворота φ измеряется в радианах. Изменение угла поворота от времени - $\varphi=f(t)$ – это закон вращательного движения твердого тела. Угол поворота φ в зависимости от оборотов тела n, совершенных вращение вокруг оси, связаны соотношением: $\varphi = 2\pi n$.

Вращательное движение тела вокруг неподвижной оси характеризуется угловой скоростью и угловым ускорением.

Угловая скорость определяется изменение угла поворота с течением времени и численно равна $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$. В системе СИ угловая скорость измеряется в *рад/с* или c^{-1}.

Угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости с течением времени и численно равна $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$. В системе СИ имеет единицу измерения – *рад/с*^{2} или *с*$^{-2}$.

Скорость и ускорения точки (например, *А*) тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяются: $V_A = \omega R$, $a_{A\tau} = \varepsilon R$, $a_{An} = \omega^2 R$, $a_A = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$, где *R* – радиус вращения точки. Радиус вращения точки – это перпендикуляр от точки тела до оси вращения.

Передаточные механизмы (рис. 2.1) предназначены для передачи вращения от одного вала, называемого ведущим, к другому, называемому ведомым и характеризуются передаточным числом *i*.

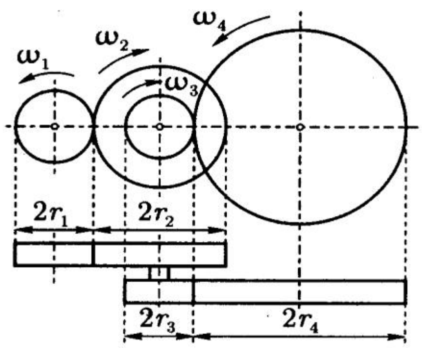


Рис. 2.1

В этом примере передаточные числа i_{1-2} для колес *1-2* и i_{3-4} для колес *3-4*:

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}, \quad i_{3-4} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{r_4}{r_3} = \frac{z_4}{z_3},$$ где

z – число зубьев колес.

Для всего механизма: $i = i_{1-2} i_{3-4}$.

Плоским движением твердого тела называется такое движение твердого тела, при котором точки движутся в плоскости параллельно некоторой неподвижной плоскости. В результате того, что точки тела движутся в плоскостях, то такое тело называют плоской фигурой.

Движение твердого тела¸ совершающего плоское движение, можно рассмотреть как совокупность двух перемещений: поступательного перемещения тела с произвольной точкой, называемой полюсом, и вращения тела вокруг полюса. Выбор полюса влияет на поступательную часть движения плоской фигуры, но не влияет на вращение тела вокруг полюса.

Законом плоского движения твердого тела с полюсом в точке *А* являются следующие уравнения: $x_A = f_1(t)$, $y_A = f_2(t)$, $\varphi = f_3(t)$.

Скорость точки плоской фигуры можно определить несколькими способами.

Первый способ: скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и вращательной скорости точки вокруг полюса $\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}$, где $\overline{V}_B$ - искомая скорость; $\overline{V}_A$ - скорость полюса *A*; $\overline{V}_{BA}$ - вращательная скорость точки *B* вокруг полюса, которая перпендикулярна расстоянию *AB* и численно равна $V_{BA} = \omega \cdot AB$; ω – угловая скорость фигуры.

Этот способ имеет следствие о проекции скоростей точек плоской фигуры, которое часто применяется при решении задач: проекции скоростей точек плоской фигуры на ось, проведенную через эти точки, равны.

Второй способ определения скорости точки плоской фигуры через мгновенный центр скоростей (МЦС). Мгновенный центр скоростей – это единственная точка фигуры при плоском движении, которая в каждый момент времени имеет скорость равную нулю. Если у плоской фигуры известен МЦС, то вектор скорости этой точки направлен перпендикулярно к отрезку, соединяющему точку с МЦС, в сторону угловой скорости фигуры, а численно этот вектор равен: $V_B = \omega \cdot BS$, где *S* - МЦС тела. Тогда при решении задач на основании этого соотношения используют свойства точек плоской фигуры: отношение скоростей точек фигуры прямо пропорционально расстоянию от этих точек до МЦС - $\dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{AS}{BS}$.

Существует четыре способа определения МЦС:

1 способ. Известно направление и модуль одной скорости точки и направление другой (рис. 2.2). Чтобы определить МЦС нужно провести перпендикуляры к направлениям скоростей. Точка *S* их пересечения и есть МЦС.

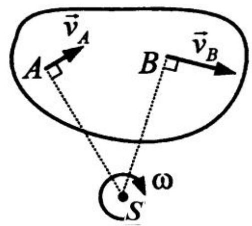


Рис. 2.2

2 способ. Скорости точек известны V_A и V_B, параллельны, а направление скоростей перпендикулярно отрезку AB. Чтобы определить МЦС нужно соединить начало скоростей точек A и B и соединить концы скоростей. Точка пересечения S есть МЦС. Возможны варианты: скорости направлены в одну сторону (рис. 2.3); скорости направлены в разные стороны (рис. 2.4). В этих случаях: $\omega = \dfrac{V_A}{AS}$, $V_B = \omega \cdot BS$.

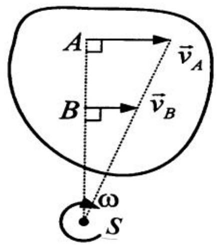


Рис. 2.3

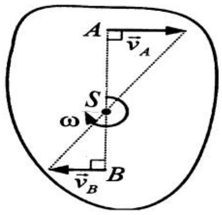


Рис. 2.4

Если скорости равны между собой $V_A = V_B$, а их направление параллельное, то перпендикуляры тоже параллельны между собой, значит, в движении отсутствует вращательная составляющая плоского движения, т. е. плоское движение переходит в поступательное движение (рис. 2.5).

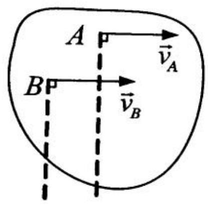


Рис. 2.5

3 способ: через общую точку соприкасающихся тел, одно из которых неподвижно (рис. 2.6). Точка P соприкосновения тел является МЦС.

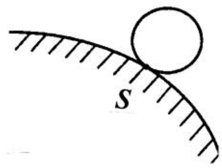


Рис. 2.6

Ускорение точки плоской фигуры можно определить через теорему об ускорении точек плоской фигуры: ускорение точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и вращательного ускорения точки вокруг полюса $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n}$.

Сферическим движением твердого тела называется такое движение твердого тела, при котором все точки тела описывают траектории, лежащие на сферах с одним и тем же неподвижным центром.

Пусть твердое тело имеет одну неподвижную точку *O* (рис. 2.7). Для определения положения тела в пространстве введем две системы координат: *Oxyz* и $Ox_1y_1z_1$, первая из которых неподвижная, а вторая неизменно связана с телом и перемещается вместе с ним. Начала обеих систем координат совмещены с неподвижной точкой *O*.

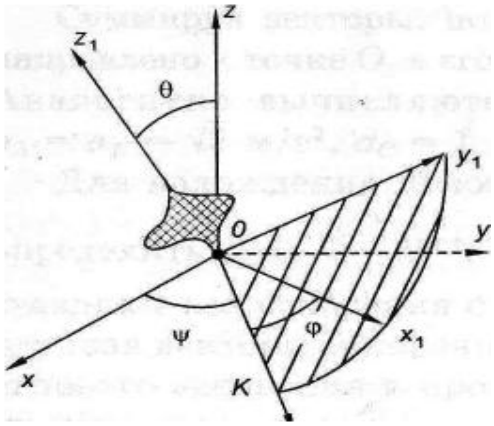


Рис. 2.7

Покажем на рисунке линию пересечения плоскостей *Oxyz* и $Ox_1y_1z_1$. Это линия называется линией узлов (*OK*). Положение подвижной системы координат по отношению к неподвижной системе координат определяется тремя независимыми углами. Углы ψ, θ, φ называются эйлеровыми углами; ψ - *угол прецессии,* θ *– угол нутации,* φ *– угол собственного вращения*.

В процессе движения тела углы Эйлера меняются, являясь некоторыми функциями времени: $\psi = f_1(t)$; $\varphi = f_2(t)$, $\Theta = f_3(t)$. Эти уравнения - *уравнениями сферического движения тела.*

Кинематическими характеристиками тела при сферическом движении являются угловая скорость и угловое ускорение.

Поскольку при движении тела изменяются все три угла, движение тела представляется собой вращение с угловой скоростью $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_3$, где $\overline{\omega}_1 = \dot{\psi}$, $\overline{\omega}_2 = \dot{\varphi}$, $\overline{\omega}_3 = \dot{\theta}$. Так как значения $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ изменяются со временем численно и по направлению, то $\overline{\omega}$ называют мгновенной угловой скоростью. Величина угловой скорости $\overline{\omega}$ является величиной переменной и по величине и по направлению.

Угловым ускорением тела называется величина $\bar{\varepsilon} = \overline{\omega}$. В отличие от вращательного движения, при сферическом движении тела векторы угловой скорости и углового ускорения не лежат на одной прямой.

Поскольку в каждый момент времени происходит поворот тела вокруг мгновенной оси вращения с угловой скоростью ω, то скорость точки определяется формулой: $\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{r}$, где $\overline{r}$ - радиус вектор данной точки, проведенный из неподвижной точки O.

Ускорение точки будет определяться соотношением: $\overline{a} = \overline{a}_{вр} + \overline{a}_{ос} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \overline{V}$, где $\overline{a}_{вр} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r}$ - вращательное ускорение, $\overline{a}_{ос} = \overline{\omega} \times \overline{V}$ - осестремительное ускорение.

Общий случай движения твердого тела это когда тело является полностью свободным. Примером такого движения, может быть, полет планеты, самолета, снаряда и других тел.

Для определения положения тела в пространстве в теле выберем произвольную точку C – полюс. Тогда движение можно описать как: $x_C = f_1(t)$; $y_C = f_2(t)$, $z_C = f_3(t)$, $\psi = f_4(t)$; $\varphi = f_5(t)$, $\Theta = f_6(t)$ *– это уравнения общего случая движения твердого тела.*

2.3. Сложное движение точки

Сложным движением точки (тела) называется такое движение точки (тела) при котором она одновременно участвует в двух или более движениях.

При сложном движении точки различают абсолютное, относительное и переносное движение. Движение точки относительно неподвижной системы называется абсолютным движением. Движение точки относительно подвижной системы называется относительным движением. Движение точки вместе с подвижной системой относительно неподвижной называется переносным движением.

Скорость точки определяется при сложном движении по теореме о сложении скоростей: скорость точки при ее сложном движении равна геометрической сумме относительной и переносной скорости. $\overline{V} = \overline{V}_r + \overline{V}_e$, где $\overline{V}$ - абсолютная скорость, $\overline{V}_r$ - относительная скорость, $\overline{V}_e$ - переносная скорость.

Для того, чтобы определить абсолютную скорость по модулю нужно применять метод проекций, или, если между относительной и переносной скорость образуется угол α, то можно применить теорему косинусов: $V = \sqrt{V_r^{\,2} + V_e^{\,2} + 2V_r V_e \cos\alpha}$.

Абсолютное ускорение определяется по теореме сложения ускорения: абсолютное ускорение точки, в случаи не поступательного переносного движения, равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений: $\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c$, где $\bar{a}$ - абсолютное ускорение точки, $\bar{a}_r$ - относительное ускорение точки, $\bar{a}_e$ - переносное ускорение точки, a_c - кориолисово ускорение точки.

Кориолисо ускорение равно $\bar{a}_c = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r)$, где ω_e - переносная угловая скорость, V_r - относительная скорость точки.

Численно кориолисово ускорение можно найти из определения векторного произведения: $a_c = 2 \cdot \omega_e \cdot V_r \cdot \sin\beta$, где β - угол между вектором переносной угловой скорости и осью переносного вращения. Из анализа формулы можно сделать вывод, что кариолисово ускорение равно нулю, когда один из множителей будет равен нулю.

Направление кориолисова ускорения определяется правилом Жуковского: чтобы определить направление кориолисова ускорения нужно спроецировать относительную скорость на плоскость перпендикулярную к оси переносного вращения и повернуть эту проекцию на 90° в сторону переносного вращения.