26.01.21 г. Теоретическая механика. Лекция
Тема: Динамика

3. Динамика

3.1. Основные понятия и законы

Динамикой называют раздел механики, в котором изучается движение материальных тел в зависимости от действующих на них сил.

Система отсчета. При многих технических расчетах можно принимать за неподвижную всякую, неизменно связанную с Землей. Систему отсчета, по отношению к которой всякая материальная частица под действием взаимно уравновешенных сил совершает прямолинейное и равномерное движение, называют инерционной системой отсчета.

Основные законы динамики.

1. Закон инерции. Материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действие других тел не изменит это состояние.

2. Закон пропорциональности силы и ускорения. Ускорение ($\bar{a}$) материальной точки массой m пропорционально приложенной к ней силе $\left(\bar{P}\right)$и имеет одинаковое с ней направление: $m\bar{a} = \bar{P}$.

3. Закон равенства действия и противодействия. Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

4. Закон независимости действия сил. Несколько одновременно действующих на материальную точку сил сообщают точке такое ускорение, какое сообщила бы ей одна сила, равная их геометрической сумме: $m\bar{a} = \sum \bar{P}_i$.

Масса. Массой материальной частицы (тела) называют меру ее инертности, численно выражающуюся, отношением модуля силы, действующей на частицу (тело), и вызванного ею ускорения. Масса материальной точки (тела) (m) численно равна отношению ее веса (G) к ускорению свободного падения (g): $m=G/g$.

Система механических единиц. Существует две системы механических единиц: *техническая* (МКГСС), в которой основными единицами являются метр (м), килограмм силы (кГ) и секунда (с). Единицей измерения массы в этой системе будет 1 кГ·с^2/м, т. е. масса, которой сила в 1 кГ сообщает ускорение 1 м/с^2 и *физическая* (Международная система единиц СИ), в которой основными единицами измерения механических величин являются метр (м), килограмм массы (кг) и секунда (с). Единица измерения силы - производная единица - 1 ньютон (Н). 1 Н - это сила, сообщающая массе в 1 кг ускорение 1 м/с^2 (1 Н = 1 кг·м/с^2). Соотношение между единицами силы в системах СИ и МКГСС:
1 кГ = 9,81 Н или 1 Н = 0,102 кГ.

Классификация сил. Силы, действующие в материальной системе, подразделяют на внешние (F^e) и внутренние (F^j) или активные и реакции связей. Кроме того при решении задач динамики рассматривают следующие постоянные или переменные силы:

- *сила тяжести.* Это постоянная сила *G*, действующая на любое тело, находящееся вблизи земной поверхности. Модуль силы тяжести равен весу тела. Под действием силы *G* любое тело при свободном падении на Землю (с небольшой высоты и в безвоздушном пространстве) имеет одно и то же ускорение *g*, называемое ускорением свободного падения, а иногда ускорением силы тяжести. Значение *g* в разных местах земной поверхности различно; оно зависит от географической широты места и высоты его над уровнем моря. На уровне моря g =9,8156 м/с^2. Из второго уравнения динамики следует, что $G=mg$ или $m=G/g$.

- *сила трения.* Так называется сила трения скольжения, действующая (при отсутствии жидкой смазки) на движущееся тело. Ее модуль определяется равенством $F=fN$, где f - коэффициент трения, который считают постоянным; N - нормальная реакция.

- *сила упругости.* Эта сила зависит от положения тела. В частности, для силы упругости пружины $P= c \cdot \lambda$, где λ - удлинение (или сжатие) пружины; c - коэффициент жесткости пружины (в системе СИ измеряется в Н/м).

- *сила вязкого трения.* Такая сила, зависящая от скорости, действует на тело при его медленном движении в очень вязкой среде (или при наличии жидкой смазки) и может быть выражена равенством $R=\mu\cdot V$, где V - скорость тела; μ - коэффициент сопротивления.

- *сила инерции.* Такой силой называют геометрическую сумму сил противодействия движущейся материальной частицы телам, сообщающим ей ускорение, т. е. $\overline{\Phi} = -m\overline{a}$.

3.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

В зависимости от способов задания движения точки, дифференциальные уравнения могут быть:

–в векторной форме:

$$m\overline{a} = \overline{P} = m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = m\frac{d\overline{V}}{dt}.$$

–в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$m\ddot{x} = m\frac{d\dot{x}}{dt} = P_x; \quad m\ddot{y} = m\frac{d\dot{y}}{dt} = P_y; \quad m\ddot{z} = m\frac{d\dot{z}}{dt} = P_z.$$

–в проекциях на естественные оси координат:

$$ma_n = m\frac{V^2}{\rho} = P_n,$$

$$ma_\tau = m\frac{d^2 s}{dt^2} = m\frac{dV}{dt} = P_\tau.$$

Дифференциальные уравнения движения *несвободной точки* в векторной форме:

$$m\overline{a} = \overline{P} + \overline{N};$$

в координатной форме:

$$m\ddot{x} = P_x + N_x; \qquad m\ddot{y} = P_y + N_y; \qquad m\ddot{z} = P_z + N_z,$$

где N – равнодействующая реакций связей.

Дифференциальные уравнения *относительного движения* точки в векторной форме:

$$m\bar{a}_r = \bar{P} - m\bar{a}_e - m\bar{a}_c,$$

где a_e – ускорение переносного движения; a_r – относительное ускорение; a_c – ускорение Кориолиса.

Две основные задачи динамики точки.

Первая задача – зная массу точки и уравнения ее движения, найти равнодействующую приложенных к точке сил. Если известен закон движения точки в векторной форме $\bar{r} = \bar{r}(t)$, тогда $\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$. Из основного уравнения динамики определяем силу $\bar{P} = m\bar{a}$.

Вторая задача – зная приложенные к точке силы, а также ее массу *m*, начальные положения и скорость, определить закон движения точки. Общий ход решение: составляют дифференциальные уравнения движения, дважды интегрируют, определяют постоянные интегрирования из начальных условий и получают закон движения точки.

Примерный алгоритм решения второй основной задачи динамики точки.

1. Выбрать начало отчета (как правило, совмещая его с начальным положением точки).

2. Провести координатные оси, направляя их, как правило, в сторону движения.

3. Изобразить движущуюся точку в произвольном положении (но чтобы $x > O$, $y > 0$, $z > 0$).

4. Приложить к точке все действующие на нее силы.

5. Записать основное уравнение динамики применительно к данной задаче в векторном виде.

6. Спроектировать векторное уравнение на выбранные оси, то есть записать дифференциальные уравнения движения точки.

7. Преобразовать дифференциальные уравнения к виду, удобному для интегрирования.

8. Записать начальные условия.

9. Дважды проинтегрировать дифференциальные уравнения и получить их общие решения.

10. Определить постоянные интегрирования.

11. Записать частные решения дифференциальных уравнений, то есть подставить постоянные интегрирования в их общие решения.

12. Найти искомые в задаче величины или исследовать полученный результат.

3.3. Прямолинейные колебания точки

Колебательное движение материальной точки происходят при условии, если на точку *M*, отклоненную от положения покоя *O* (рис. 3. 1), действует сила *P*, стремящаяся вернуть точку в это положение. Сила *P* называется восстанавливающая. Примером такой силы является сила упругости пружины.

Большое практическое значение имеет случай, когда сила *P* пропорциональна отклонению, т. е. $P = - c \cdot x$, где c – коэффициент жесткости упругого элемента, размерность: Н/м.

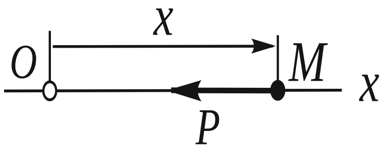


Рис. 3. 1

Восстанавливающая сила стремится вернуть точку в равновесное положение *O*.

Различают четыре основных случая колебательного движения материальной точки: свободные колебания (протекают только под действием восстанавливающей силы); затухающие колебания (совершаются под действием восстанавливающей силы и силы сопротивления); вынужденные колебания (под действием восстанавливающей силы и силы периодического характера, называемой возмущающей силой); вынужденные колебания с учетом сил сопротивления.

Свободные колебания материальной точки. Дифференциальное уравнение свободных колебаний точки массой m имеет вид: $\ddot{x} + k^2 x = 0$, где $k^2 = c / m$, или при вертикальных колебаниях $k^2 = g / f_{cm}$, f_{cm} – статическая деформация упругого элемента, а общее решение этого уравнения: $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$, где $C_1 = x_0$ и $C_2 = \dot{x}_0 / k$ – постоянные интегрирования. Здесь x_0 и $\dot{x}_0$ – начальное положение и начальная скорость точки. Общее уравнение можно также представить в виде гармонических колебаний $x = A \sin(kt + \beta)$, где $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{k}\right)^2}$ – амплитуда колебаний; $\beta = arctg(kx_0 / \dot{x}_0)$ – начальная фаза колебаний; k – круговая (циклическая) частота колебаний.

Промежуток времени T, в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется периодом колебаний и определяется по формуле $T = 2\pi / k$, а величина $\nu = 1/T$ – обратная периоду колебаний называется частотой колебаний и измеряется в герцах (Гц).

Затухающие колебания. В реальных условиях материальная точка, совершающая колебательные движения, испытывает сопротивление движению. Практическое значение имеет случай, когда сила сопротивления R пропорциональна скорости, т. е. $\overline{R} = -\mu \overline{V}$. Если ввести обозначения $\mu / m = 2n$ и $c / m = k^2$, то можно получить дифференциальное уравнение затухающих колебаний вдоль оси x в следующем виде: $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0$. Интегрирование этого уравнение приводит к общему решению для случая $n<k$: $x = e^{-nt}\left(C_1 \cos\sqrt{k^2 + n^2}\,t + C_2 \sin\sqrt{k^2 + n^2}\,t\right)$ или $x = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 + n^2}\,t + \beta)$, где C_1; C_2; A; β – постоянные интегрирования.

Движение материальной точки теряет колебательный характер и становится апериодическим в случае большого сопротивления, т. е. при $n \geq k$. При $n>k$ решение принимает вид $x = Ae^{-nt} sh(\sqrt{n^2 + k^2}\,t + \beta)$, а при $n=k$ получаем $x = e^{-nt}(C_1 t + C_2)$ или $x = e^{-nt}\left[x_0 + (\dot{x}_0 + nx_0)t\right]$.

Вынужденные колебания (без учета сопротивления). Такие колебания совершает материальная точка, на которую наряду с восстанавливающей силой действует периодически изменяющаяся сила, называемая возмущающей силой. Практически важным является случай, когда возмущающая сила изменяется по гармоническому закону, т. е. проекция ее на ось x, направленную по траектории точки, определяется как: $Q_x = H\sin(pt+\delta)$, где H – максимальный модуль, или амплитуда, возмущающей силы; p – частота изменения возмущающей силы; δ – начальная фаза.

Дифференциальное уравнение движения точки в этом случае будет $m\ddot{x} = -cx - H\sin(pt+\delta)$ или $\ddot{x} + k^2 x = h\sin(pt+\delta)$, где обозначено $k^2 = c/m$, $h = H/m$. Общее решение имеет вид $x = A\sin(kt+\beta) + \dfrac{h}{k^2-h^2}\sin(pt+\delta)$. Из решения видно, что колебания точки слагаются из: собственных колебаний с амплитудой A и частотой k; вынужденных колебаний с амплитудой $B = h/(k^2-p^2)$ и частотой p.

Резонанс. Вынужденные колебания при отсутствии сопротивления, когда $p \approx k$ (частота возмущающей силы совпадает с частотой собственных колебаний), называется резонансом. Это явление описывается уравнением $x = (h/2k)\cdot t\cdot\sin(pt-\pi/2)$. Амплитуда этих колебаний $B = ht/2p$ с течением времени неограниченно возрастает.

3.4. Геометрия масс

Центр масс механической системы. Центр масс системы точек в векторной форме определяется как

$$\bar{r}_C = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{m},$$

в координатной форме:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m}; \qquad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m}; \qquad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m},$$

где $m = \sum m_i$ – масса системы; x_i, y_i, z_i – координаты масс m_i.

Моменты инерции характеризуют распределение масс в телах при их вращательном движении. Выделяют осевые, полярные и центробежные моменты инерции. Более наглядно их можно представить для плоских фигур в системе координат xOy, рис. 3.2:

Осевые моменты инерции:

$$J_x = \sum m_i y_i^2; \qquad J_y = \sum m_i x_i^2.$$

Полярный момент инерции:

$$J_O = \sum m_i \bar{r}_i^{\,2} = \sum m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) \text{ или } J_O = J_x + J_y.$$

Центробежный момент инерции:

$$J_{xy} = \sum m_i x_i y_i.$$

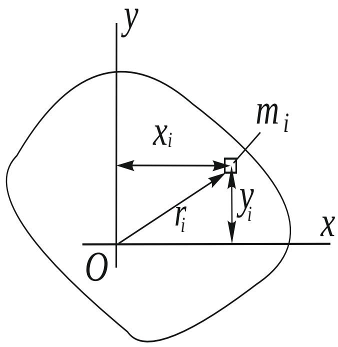
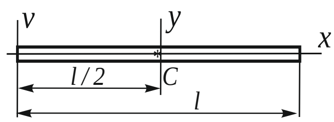


Рис. 3.2

Если центробежные моменты инерции равны нулю, то оси этой системы координат называют главными осями инерции. Если ось проходит через центр масс, то ось называется центральной.

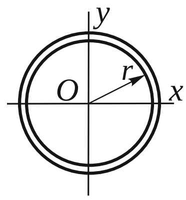
Моменты инерции простейших тонких однородных тел

Стержень массой *m:*



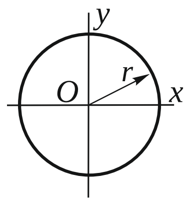
$$J_v = \frac{ml^2}{3}; \qquad J_{yC} = \frac{ml^2}{12}.$$

Тонкое кольцо (обруч) массой *m:*



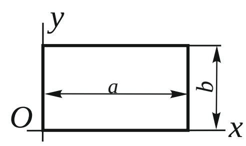
$$J_o = mr^2; \qquad J_x = J_y = \frac{mr^2}{2}.$$

Круглый диск массой *m:*



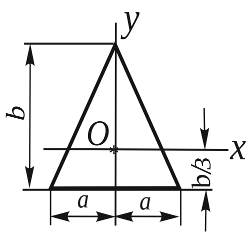
$$J_o = \frac{mr^2}{2}; \qquad J_x = J_y = \frac{mr^2}{4}.$$

Прямоугольная пластина:



$$J_x = \frac{mb^2}{3}; \qquad J_y = \frac{ma^2}{3}.$$

Треугольник:



$$J_x = \frac{mb^2}{18}; \qquad J_y = \frac{ma^2}{6}.$$

3.5. Общие теоремы динамики точки и системы

Количество движения точки и системы. Мерой движения материальной точки или механической системы является количество движения. Для точки это вектор, равный произведению массы точки m на вектор ее скорости: $\overline{K} = m\overline{V}$, для механической системы: $\overline{K} = \sum m_i\overline{V_i}$ или через центр масс: $\overline{K} = m\overline{V}_C$, где m – масса механической системы, $\overline{V}_C$ – скорость центра масс.

В проекциях на оси декартовой системы координат эту меру движения можно представить как: $\overline{K} = K_x\bar{i} + K_y\bar{j} + K\bar{k}_z$, где $K_x = m\dot{x},\ K_y = m\dot{y},\ K_z = m\dot{z}.$

Импульс силы есть мера ее действия во времени и характеризует передачу материальной точки механического движения со стороны действующих на нее тел за данный промежуток времени. Определяется как вектор, равный произведению силы на время: для постоянной силы - $\overline{S} = \overline{P}t,$ для переменной силы за промежуток времени t_1-t_2 - $\overline{S} = \int\limits_{t1}^{t2} \overline{P}dt.$

Количество движения и импульс силы измеряются в одинаковых единицах, связь между ними устанавливают две теоремы.

Теорема об изменении количества движения материальной точки: изменение количества движения материальной точки за какой-либо промежуток времени (например, от t_1 до t_2) равно импульсу силы, действующей на точку за тот же промежуток времени: $m\overline{V}_2 - m\overline{V}_1 = \overline{S},$ или в проекциях, например, на ось x: $m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 = S_x.$

Теорема об изменении количества движения механической системы: изменение количества движения механической системы $\left(\overline{K} = \sum m_i\overline{V}_i\right)$ за какой-либо промежуток времени (например, от t_1 до t_2) равно геометрической сумме импульсов внешних сил $\left(\overline{S}_i^e\right)$, приложенных к системе за тот же промежуток времени: $\overline{K}_2 - \overline{K}_1 = \sum \overline{S}_i^e$. Аналогично предыдущей теореме, эту зависимость можно представить в проекциях.

Следствия из теоремы. Если векторная сумма всех внешних сил (главный вектор) за рассматриваемый промежуток времени равна нулю, то количество движения механической системы постоянно. Подобное заключение справедливо и для проекций на неподвижную ось.

Теорема о движении центра масс. Центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и к которой приложены все внешние силы: $m\ddot{x}_C = \sum P_{xi}^e$; $m\ddot{y}_C = \sum P_{yi}^e$; $m\ddot{z}_C = \sum P_{zi}^e$. В векторной форме: $m\overline{a}_C = \sum \overline{P}_i$.

Следствия из этой теоремы. Если векторная сумма внешних сил все время равна нулю, то центр масс механической системы находится в покое или движется прямолинейно и равномерно. Аналогично и для проекций сил и центра масс на какую-либо неподвижную ось.

Момент количества движения. Это динамическая характеристика механического движения, учитывающая положение материальной точки по отношению к данному центру и выражается векторным произведением радиуса-вектора и количества движения материальной точки: $\overline{L}_O = \overline{r} \times m\overline{V}$, а модуль вектора $\overline{L}_O$ равен произведению величины mV на плечо h вектора $m\overline{V}$ относительно центра *O*: $L_O = mVh$ или в координатной форме $L_O = m(y\dot{x} - x\dot{y})$. Момент количества движения относительно оси *z* равен произведению проекции вектора $m\overline{V}$ на плоскость, перпендикулярную оси *z*, на плечо h_i этой проекции до оси: $L_z = mV_i h_i$.

Теорема об изменении момента количества движения материальной точки. Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно некоторого неподвижного центра равна геометрической сумме моментов сил, действующих сил, относительно того же центра, т.е. $\dfrac{d\overline{L}_O}{dt} = \overline{M}_O$.

Кинетический момент механической системы относительно центра и оси. Кинетическим моментом (или главным моментом количества движения механической системы относительно центра, например точки O) называют вектор, равный геометрической сумме моментов количества движения всех материальных точек системы относительно этого центра: $\overline{L}_O = \sum \overline{L}_{iO} = \sum \overline{r}_i \times m_i \overline{V}_i$, а относительно оси – берется алгебраическая сумма: $L_z = \sum L_{iz}$.

Теорема об изменении кинетического момента механической системы. Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторого неподвижного центра геометрически равна главному моменту внешних сил $\overline{M}_O^e$, действующих на эту систему, относительно того же центра, т.е. $\frac{d\overline{L}_O}{dt} = \sum \overline{M}_{iO}^e . = \overline{M}_O^e$, или в проекциях на оси координат:

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum M_{ix}^e = M_x^e; \qquad \frac{dL_y}{dt} = \sum M_{iy}^e = M_y^e; \qquad \frac{dL_z}{dt} = \sum M_{iz}^e = M_z^e.$$

Следствие из теоремы. Если главный момент внешних сил относительно некоторого неподвижного центра остается все время равным нулю, то кинетический момент механической системы относительно этого центра остается постоянным.

Две меры механического движения. В динамике рассматриваются две формы преобразования механического движения материальной точки или системы точек:

1) Механическое движение переносится с одной механической системы на другую в качестве механического движения. В этом случае мерой механического движения является вектор количества движения точки $\overline{K} = m\vec{V}$ или механической системы $\overline{K} = m\overline{V}_C$, а мерой действия силы выступает импульс силы $\overline{S}$.

2) Механическое движение превращается в другую форму движения материи (в форму потенциальной энергии, теплоты, электричества т. д.). Здесь

мерой движения выступает кинетическая энергия, а мерой действия силы является работа силы.

Кинетическая энергия точки и системы. Кинетической энергией материальной точки называют половину произведения массы m точки на квадрат ее скорости V: $T = \dfrac{mV^2}{2}$. Кинетической энергией системы называют сумму кинетических энергий всех точек механической системы, т. е. $T = \sum T_i = \sum \dfrac{m_i V_i^2}{2}$.

При поступательном движении тела (рис. 3.3) скорости всех точек одинаковые, $V_i = V$, поэтому $T = \sum \dfrac{m_i V_i^2}{2} = \dfrac{V^2}{2} \sum m_i = \dfrac{mV^2}{2}$, где m – масса тела.

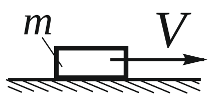


Рис.3.3

При вращении тела вокруг неподвижной оси скорость какой-либо точки тела можно выразить как $V_i = \omega r_i$, где r_i – кратчайшее расстояние от точки до оси вращения; ω – угловая скорость тела (рис. 3.4). Тогда кинетическая энергия тела:

$$T = \sum \frac{m_i V_i^2}{2} = \sum \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2 = \frac{J_C \omega^2}{2},$$

где $J_C = \sum m_i r_i^2$ – момент инерции тела относительно центра вращения точки C.

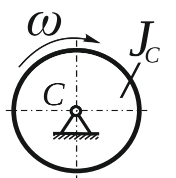


Рис.3.4

При плоском движении тела (рис.3.5): $T = \dfrac{mV_C^2}{2} + \dfrac{J_{zC}\omega^2}{2}$, где V_C – скорость центра масс; J_{zC} – момент инерции тела относительно центральной оси z, проходящей через центр масс.

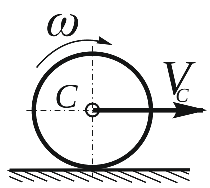


Рис. 3.5

Работа силы. Работу постоянной силы при прямолинейном движении выражают произведением модуля силы на величину перемещения материальной частицы s и на косинус угла между направлением силы и перемещением: $A = Ps\cos\alpha.$ Единица работы джоуль (Дж=Н·м).

Работа силы F (рис. 3.6): $A_F = Fs\cos\alpha,$

(F - движущая сила);

Работа силы Q: $A_Q = -Qs\cos\beta$ - (Q - сила сопротивления);

Работа силы N: $A_N = 0$, так как α=90°.

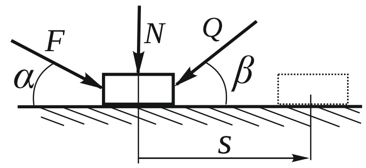


Рис. 3.6

Элементарная работа силы. Если сила переменная, например $P = f(s)$, или движение криволинейное, то вводят понятие элементарной работы: $dA = \overline{P}d\overline{r} = Pds\cos\left(\overline{P},\overline{V}\right) = \overline{P}\overline{V}dt.$ Элементарная работа связана с проекциями силы на оси координат как $dA = Xdx + Ydy + Zdz$. Работа на конечном пути от s_1 до s_2 равна сумме элементарных работ $A = \int\limits_{s1}^{s2} P\cos(\overline{P},\overline{V})\cdot ds = \int\limits_{s} P_\tau dt.$

Работа силы, приложенной к вращающемуся телу. Элементарная работа силы, приложенной к телу, закрепленному на неподвижной оси, равна произведению момента силы относительно оси вращения на бесконечно малый угол поворота: $dA = Md\varphi$. Работа силы, действующей на тело при его повороте на угол от φ_1 до φ_2: $A = \int\limits_{\varphi 1}^{\varphi 2} Md\varphi.$ При $M=const$: $A=M\varphi$, (угол в радианах).

Работа силы тяжести. Эта работа не зависит от вида траектории центра тяжести, а зависит от изменения его положения по высоте и равна произведению веса тела G на изменение высоты центра тяжести h: $A_G=\pm Gh$.

Работа силы упругости. Работа упругой силы равна половине произведения коэффициента жесткости c на квадрат деформации λ: $A = \frac{c\lambda^2}{2}.$

Работа внутренних сил на любом перемещении тела равна нулю.

Мощность силы. Изменение работы силы, отнесенное к единице времени, называют мощностью силы: $N = \frac{dA}{dt} = \frac{\overline{P} d\overline{r}}{dt} = \overline{P} \cdot \overline{V}$. Если направление силы $\overline{P}$ и скорости $\overline{V}$ совпадают, то $N=PV$. Для момента силы: $N=M\omega$.

За единицу мощности в системе СИ принимают 1 ватт (Вт) = 1 Дж/с = 0,102 кгс·м/с. В системе МКГСС за единицу мощности принимают 1 кгс·м/с. Кроме того, принимают следующие единицы мощности: 1 киловатт (кВт) = 10^3 Вт = 102 кгс·м/с = 1,36 лошадиной силы (л.с.); 1 лошадиная сила = 75 кгс·м/с = 736 Вт.

Сравнение структуры формул динамики для поступательного и вращательного движения твердого тела (табл. 3.1)

Таблица 3.1

Динамические меры	Виды движения	
	Поступательное	Вращательное
Уравнение движения	$P = ma$	$M = J\varepsilon$
Работа	$A=Ps$	$A=M\varphi$
Мощность	$N=PV$	$N=M\omega$
Кинетическая энергия	$T = \frac{mV^2}{2}$	$T = \frac{J\omega^2}{2}$

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки: изменение кинетической энергии материальной точки на некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на эту точку сил на этом же перемещении: $T - T_0 = A$ или $\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = \sum A_i$, где T и T_0 – кинетическая энергия в конце и начале пути; V_1 и V_2 – скорости точки в начале и конце перемещения.

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы: изменение кинетической энергии механической системы на некотором перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на материальные точки системы на этом перемещении т.е. $\left(\sum\frac{m_iV_i^2}{2}\right)_2-\left(\frac{\sum m_iV_i^2}{2}\right)_1=\sum A_i^e+\sum A_i^j$, где $\left(\sum\frac{m_iV_i^2}{2}\right)_1$ – кинетическая энергия системы в первом ее положении; $\left(\sum\frac{m_iV_i^2}{2}\right)_2$ – кинетическая энергия системы во втором положении; $\sum A_i^e$ – работа внешних сил; $\sum A_i^j$ – работа внутренних сил. Таким образом,

$$T_2-T_1=\sum A_i^e+\sum A_i^j.$$

Сумма работ внутренних сил твердого тела на любом перемещении равна нулю $\sum A_i^j=0$, следовательно, для твердого тела последнее уравнение принимает вид $T_2-T_1=\sum A_i^e$.

3.6. Потенциальная энергия

Силовое поле и силовая функция. Область, в каждой точке которой на помещенную туда частицу действует сила, зависящая от положения (координат) этой точки называется силовым полем. Силовое поле, силы которого не зависят от времени, называется стационарным.

Если существует такая функция $U=U(x,y,z)$, однозначно зависящая от координат точек системы, через которую проекции силы на координатные оси в каждой точке поля выражаются как $X=\frac{\partial U}{\partial x}$, $Y=\frac{\partial U}{\partial y}$, $Z=\frac{\partial U}{\partial z}$, то такое стационарное силовое поле называют потенциальным, а функцию U – силовой. Вычислив элементарную работу силы такого поля, получаем $dA=Xdx+Ydy+Zdz=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz=dU$. Отсюда видно, если силовое поле является потенциальным, элементарная работа сил в этом поле равна полному дифференциалу силовой функции, т. е. $dA=dU$. Работа сил поля на конечном перемещении точек механической системы из положения *1* в положение *2* определится как $A_{1-2}=\int_{(1)}^{(2)} dU = U_2 - U_1$, т. е. работа сил, действующих на точки механической системы в потенциальном поле, равна разности значений силовой функции в конечном и начальном положениях системы и не зависит от формы траектории точек этой системы.

Потенциальная энергия (*П*) системы в любом данном ее положении равна сумме работ сил потенциального силового поля, приложенных к ее точкам на перемещении системы из данного положения в нулевое. Значит $A_{1-0} = U_0 - U_1 = \Pi.$ Это равенство показывает, что потенциальная энергия системы *П* отличается от силовой функции *U*, взятой со знаком минус, на постоянную величину U_0. Если $U_0=0$, то $\Pi = -U = A_{1-0}$.

Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести. В координатной системе *xyz* для силы тяжести имеем $X=0,\ Y=0,\ Z=-G$. Следовательно $dA = Xdx + Ydy + Zdz = -Gdz = dU$. Интегрируя, получаем $U = -\int_0^h Gz = -Gh$ или $\Pi=Gh$, где *h* – высота поднятого тела весом *G*.

Потенциальная энергия упругих элементов. Упругая деформация тел обладает потенциальной энергией. Если, например, пружина сжата (или растянута) на величину λ, то при переходе ее в ненапряженное состояние сила упругости может совершить работу $A = \dfrac{c\lambda^2}{2}$. Эта способность сжатой (растянутой) пружины совершать работу является потенциальной энергией пружины.

Закон сохранения механической энергии. При движении механической системы под действием сил, имеющих потенциал, энергетические изменения определяются зависимостями: $T - T_0 = \sum A_i = U - U_0 = \Pi_0 - \Pi,$ откуда $T + \Pi = T_0 + \Pi_0$, или *Т+П=const.* Это означает, что при движении механической системы в стационарном потенциальном поле полная механическая энергия системы при движении остается неизменной. Величина *Т+П* называется полной механической энергией, а система, для которой выполняется закон сохранения механической энергии, - консервативной системой.

3.7. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Выше показано, что для вращающейся точки вокруг оси *z* с угловой скоростью ω момент количества движения равен $L_{iz} = m_i V_i \cdot r_i = m_i r_i^2 \omega$, а кинетический момент L_z твердого тела относительно той же оси определяется как $L_z = \sum L_{iz} = \sum m_i r_i^2 \omega = \omega \sum m_i r_i^2 = \omega J_z = \dot{\varphi} J_z$, где J_z – момент инерции этого тела относительно оси *z*. Так как $\frac{dL_z}{dt} = \sum M_{iz}^e = M_z^e$, тогда $\frac{d(J_z \dot{\varphi})}{dt} = M_z^e$ или $J_z \ddot{\varphi} = M_z^e$. Здесь $M_z^e = \sum M_{iz}^e$ - главный момент внешних сил относительно оси *z*.

Уравнение $J_z \ddot{\varphi} = M_z^e$ представляет собой дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Сравним это уравнение с дифференциальным уравнением поступательного движения твердого тела, например, вдоль оси *x*: $m\ddot{x} = X^e$. Очевидно, что момент инерции твердого тела при вращательном движении имеет то же значение, что и масса тела при его поступательном движении: момент инерции является характеристикой инертности тела при вращательном движении.

По дифференциальному уравнению вращения тела можно решать следующие задачи:

1) по заданному уравнению вращения $\varphi = f(t)$ и его моменту инерции J_z определять главный момент внешних сил, действующих на тело;

2) по заданным внешним силам, приложенным к телу, по начальным условиям φ_0 и ω_0 и по моменту инерции тела J_z находить уравнение вращения тела $\varphi = f(t)$;

3) определять момент инерции тела J_z относительно оси вращения, зная величины M_z^e и $\ddot{\varphi}$.

3.8. Основные положения из теории удара

Ударом называют кратковременное взаимодействие тел, вызывающее за ничтожно малый промежуток времени резкое изменение скоростей их точек.

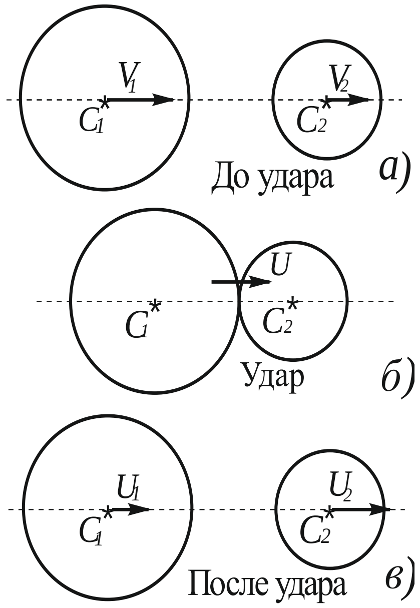


Рис. 3. 7

Если удар прямой и центральный (т. е. ударный импульс S проходит через центр масс и скорости точек перпендикулярны к поверхности соприкосновения тел), то для двух тел (рис. 3.7) импульс на стадии $а) \to б)$ для каждого тела с массами m_1 и m_2 примет вид: $m_1(U - V_1) = -S,$ $m_2(U - V_2) = +S.$ Отсюда определяется импульс $S = \dfrac{m_1 m_2 (V_1 - V_2)}{m_1 + m_2}$ и скорость тел – $U = \dfrac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}.$

Удар по схеме $а) \to б)$ протекает для абсолютно жестких тел и считается неупругим. Конечная скорость тел в этом случае U. Для упругих тел процесс удара протекает по схеме $а) \to б) \to в)$ и в результате тела получают конечные скорости U_1 и U_2. На стадии $б) \to в)$ получаем: $m_1(U_1 - U) = -kS,$ $m_2(U_2 - U) = +kS,$ где $k = \dfrac{|U_1 - U_2|}{|V_1 - V_2|}$ - коэффициент восстановления и его величина зависит от упругих свойств соударяющихся тел. Так как внутренние силы не изменяют количества движения системы, то за все время удара оно остается неизменным, т. е. $m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 U_1 + m_2 U_2.$

Теорема об изменении кинетического момента механической системы при ударе: изменение кинетического момента механической системы $(\overline{L}_O - \overline{L}_O^0)$

относительно любого неподвижного центра при ударе равно геометрической сумме моментов всех внешних ударных импульсов $\sum \overline{M}_O(\overline{S}_i^e)$, приложенных к точкам системы, относительно того же центра. Для тела, вращающегося вокруг оси *z*, эта зависимость имеет вид: $L_z - L_z^o = \sum M_z(\overline{S}_i^e)$.

3.9. Аналитическая механика

Классификация связей:

- *голономные* – это связи, при которых их уравнения могут быть записаны в виде, не содержащих производных от координат;

- в противном случае связи называют *неголономными*;

- если уравнение связи не содержит в явном виде время, то оно называется *стационарной*;

- в противном случае – *нестационарной*;

- связи, которые описываются с помощью уравнения, называются *удерживающими* (двухсторонними);

- связи, которые описываются с помощью неравенств, называются *неудерживающими* (односторонними).

Число независимых между собой вариаций координат точек (возможных перемещений) механической системы называется *числом степеней свободы* системы.

Обобщенные координаты механической системы – это независимые величины, заданием которых однозначно определяются положение всех точек системы. Для голономных систем число независимых обобщенных координат (*j*) механической системы равно числу степеней свободы этой системы.

Принципы механики.

Принцип Даламбера для материальной точки: геометрическая сумма всех приложенных к точке сил $\overline{P}_i$ и силы инерции $\overline{\Phi}$ этой точки равны нулю, т. е.

$\sum \overline{P}_i + \overline{\Phi} = 0.$ Здесь уравнениям динамики по форме придается вид уравнений статики.

Принцип Даламбера для несвободной механической системы: в любой момент времени для всякой механической системы геометрическая сумма всех внешних сил, реакций связей и сил инерции равна нулю, т. е. $\sum \overline{P}_i + \sum \overline{R}_i + \sum \overline{\Phi}_i = 0.$ Аналогично и для моментов, например, относительно оси z: $M_{iz}^{(e)} + M_{iz}^{(\Phi)} + M_{iz}^{(R)} = 0.$

Принцип возможных перемещений: если механическая система находится в равновесии, то при любом возможном перемещении системы сумма работ всех активных сил равна нулю: $\sum \delta A_i^e = 0.$ Здесь считаем, что связи механической системы идеальны, а под возможными перемещениями понимаем воображаемые бесконечно малые перемещения системы, допускаемые в данное мгновение наложенными связями без нарушения их.

Принцип возможных скоростей: для того чтобы механическая система находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы возможная мощность всех активных сил на любых возможных скоростях была равна нулю: $\sum \overline{P}_i \overline{V}_i = 0.$

Принцип Даламбера-Лагранжа (общее уравнение динамики): при движении механической системы сумма возможных работ активных сил и сил инерции на любых возможных перемещениях всегда равна нулю: $\sum (\overline{P}_i + \overline{\Phi}_i) \delta \overline{r}_i = 0.$ Также при движении механической системы сумма возможных мощностей активных сил и сил инерции на любых возможных скоростях всегда равна нулю: $\sum (\overline{P}_i + \overline{\Phi}_i) \delta V_i = 0,$ или в проекциях на координатные оси $\sum [(X_i + \Phi_{ix}) \delta x_i + (Y_i + \Phi_{iy}) \delta y_i + (Z_i + \Phi_{iz}) \delta z_i] = 0.$

Обобщенная сила Q_j, соответствующая обобщенной координате q_j – это скалярная величина, определяемая отношением элементарной работы действующих сил на перемещение механической системы, вызванном элементарным приращением координаты q_j, к величине этого приращения. Для системы с j числом степеней свободы получаем $Q_j = \sum \overline{P}_i \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j}$. Для системы с одной степенью свободы $Q = \delta A / \delta q$.

Уравнение Лагранжа второго рода: разность производной по времени от обобщенного импульса и частной производной от кинетической энергии системы по обобщенной координате равна обобщенной силе: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$.

Уравнение Лагранжа второго рода для консервативных механических систем: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$ или $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, где $L = T - \Pi$ - функция Лагранжа.