

25 января 2021 г.

«Электротехника и электроника»

Лекция «**Линейные электрические цепи постоянного тока**»

1.1. Краткие теоретические сведения

1.1.1. Определение линейных и нелинейных электрических цепей

Электромагнитное устройство с происходящими в нем и в окружающем его пространстве физическими процессами в теории электрических цепей заменяют некоторым расчетным эквивалентом — электрической цепью.

*Электрической цепью* называют совокупность соединенных друг с другом источников электрической энергии и нагрузок, по которым может протекать электрический ток. Электромагнитные процессы в электрической цепи можно описать с помощью понятий «ток», «напряжение», «э. д. с.», «сопротивление» (проводимость), «индуктивность», «емкость».

*Постоянным током* называют ток, неизменный во времени. Постоянный ток представляет собой направленное упорядоченное движение частиц, несущих электрические заряды.

Как известно из курса физики, носителями зарядов в металлах являются свободные электроны, а в жидкостях - ионы. Упорядоченное движение носителей зарядов в проводниках вызывается электрическим полем, созданным в

них источниками электрической энергии. Источники электрической энергии преобразуют химическую, механическую и другие виды энергии в электрическую. Источник электрической энергии характеризуется величиной и направлением э. д. с. и величиной внутреннего сопротивления.

Постоянный ток принято обозначать буквой  $I$ , э. д. с. источника -  $E$ , сопротивление -  $R$  и проводимость -  $g$ . В Международной системе единиц (СИ) ток измеряют в амперах (А), э. д. с. - в вольтах (В), сопротивление - в омах (Ом) и проводимость — в сименсах (См).

Изображение электрической цепи с помощью условных знаков называют *электрической схемой* (рис. 1.1, а).

Зависимость тока, протекающего по сопротивлению, от напряжения на этом сопротивлении принято называть *вольт-амперной характеристикой* (по оси абсцисс на графике обычно откладывают напряжение, а по оси ординат - ток).

Сопротивления, вольт-амперные характеристики которых являются прямыми линиями (рис. 1.1, б), называют *линейными сопротивлениями*, а электрические цепи только с линейными сопротивлениями - *линейными электрическими цепями*.

Сопротивления, вольт-амперные характеристики (в. а. х.) которых не являются прямыми линиями (рис. 1.1, в), т. е. они нелинейны, называют *нелинейными сопротивлениями*, а электрические цепи с нелинейными сопротивлениями - *нелинейными электрическими цепями*.

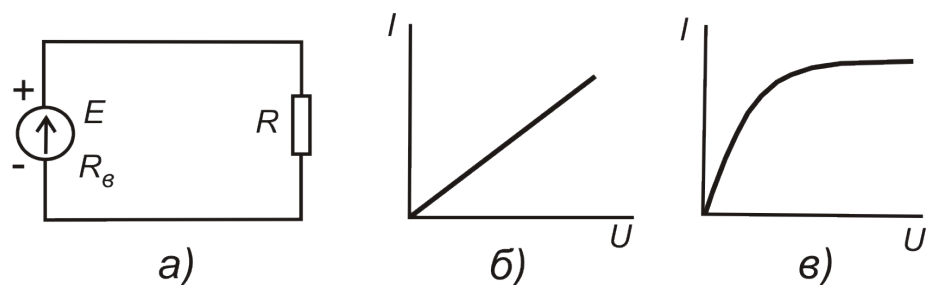


Рис. 1.1.

### 1.1.2. Источник э. д. с. и источник тока

Источник электрической энергии имеет э. д. с.  $E$  и внутреннее сопротивление  $R_B$ . Если через него под действием э. д. с.  $E$  протекает ток  $I$ , то напряжение на его зажимах  $U = E - IR_B$  при увеличении  $I$  уменьшается. Зависимость напряжения  $U$  на зажимах реального источника от тока  $I$  изображена на рис. 1.2, а.

Обозначим  $m_U$  - масштаб по оси  $U$ ,  $m_I$  - масштаб по оси  $I$ . Тогда для произвольной точки на характеристике рис. 1.2, а:

$$abm_U = IR_B; bcm_I = I; \operatorname{tg} \alpha = ab/bc = R_B m_I / m_U.$$

Следовательно,  $\operatorname{tg} \alpha$  пропорционален  $R_B$ . Рассмотрим два крайних случая.

1. Если у некоторого источника внутреннее сопротивление  $R_B = 0$ , то вольт-амперная характеристика его будет в виде прямой (рис. 1.2, б). Такой характеристикой обладает идеализированный источник питания, называемый *источником э. д. с.*

Следовательно, источник э. д. с. представляет собой такой идеализированный источник питания, напряжение на зажимах которого постоянно (не зависит от тока  $I$ ) и равно э. д. с.  $E$ , а внутреннее сопротивление равно нулю.

2. Если у некоторого источника беспредельно увеличивать э. д. с.  $E$  и внутреннее сопротивление  $R_B$ , то точка  $c$  (рис. 1.2, а) отодвигается по оси абсцисс в бесконечность, а угол  $\alpha$  стремится к  $90^\circ$  (рис. 1.2, в). Такой источник питания называют *источником тока*.

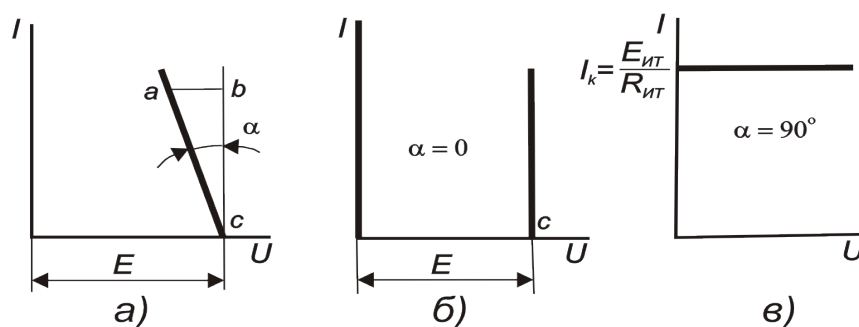


Рис.1.2.

Следовательно, источник тока представляет собой идеализированный источник питания, который создает ток  $I = I_k$ , не зависящий от сопротивления нагрузки, к которой он присоединен, а его э. д. с.  $E_{ИТ}$  и внутреннее сопротивление  $R_{ИТ}$  равны бесконечности. Отношение двух бесконечно больших величин  $E_{ИТ}/R_{ИТ}$  равно конечной величине – току  $I_k$  источника тока.

При расчете и анализе электрических цепей *реальный источник* электрической энергии с конечным значением  $R_B$  заменяют *расчетным эквивалентом*. В качестве эквивалента может быть взят:

1) источник э. д. с.  $E$  с последовательно включенным сопротивлением  $R_B$ , равным внутреннему сопротивлению реального источника (рис. 1.3, а, стрелка в кружке указывает направление возрастания потенциала внутри источника э. д. с);

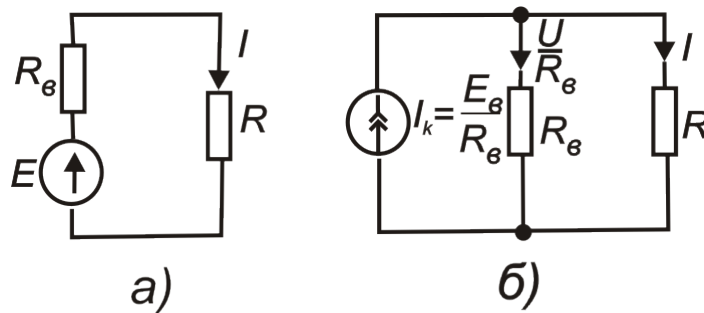


Рис. 1.3.

2) источник тока с током  $I_k = E/R_B$  и параллельно с ним включенным сопротивлением  $R_B$  (рис. 1.3, б; стрелка в кружке указывает положительное направление тока источника тока).

Ток в нагрузке (в сопротивлении  $R$ ) для схем рис. 1.3, а, б одинаков и равен  $I = E/(R + R_B)$ , т. е. равен току для схемы рис. 1.1, а. Для схемы рис. 1.3, а это следует из того, что при последовательном соединении сопротивления  $R$  и  $R_B$  складываются. В схеме рис. 1.3, б ток  $I_k = E/R_B$  распределяется обратно пропорционально сопротивлениям  $R$  и  $R_B$  двух параллельных ветвей. Ток в нагрузке  $R$

$$I = I_k \frac{R_B}{R + R_B} = \frac{E}{R_B} \cdot \frac{R_B}{R + R_B} = \frac{E}{R + R_B}.$$

Каким из двух расчетных эквивалентов пользоваться, совершенно безразлично. В дальнейшем используется в основном первый эквивалент.

Обратим внимание на следующее:

1) источник э. д. с. и источник тока - это идеализированные источники, физически осуществить которые, строго говоря, невозможно;

2) схема рис. 1.3, б эквивалентна схеме рис. 1.3, а в отношении энергии, выделяющейся в сопротивлении

нагрузки  $R$ , и не эквивалентна ей в отношении энергии, выделяющейся во внутреннем сопротивлении источника питания;

3) идеальный источник э. д. с. нельзя заменить идеальным источником тока.

Пример 1а. В схеме рис. 1.3, б источник тока дает ток  $I_k = 50$  А. Шунтирующее его сопротивление  $R_B = 2$  Ом. Найти э. д. с. эквивалентного источника э. д. с. в схеме рис. 1.3, а.

Р е ш е н и е. Э. д. с.  $E = I_k R_B = 100$  В. Следовательно, параметры эквивалентной схемы рис. 1.3, а таковы:  $E = 100$  В и  $R_B = 2$  Ом.

### 1.1.3. Неразветвленные и разветвленные электрические цепи

Электрические цепи подразделяют на неразветвленные и разветвленные. На рис. 1.1, а представлена схема простейшей неразветвленной цепи. Во всех элементах ее течет один и тот же ток. Простейшая разветвленная цепь изображена на рис. 1.4, а; в ней имеются три ветви и два узла. В каждой ветви течет свой ток. *Ветвь* можно определить как участок цепи, образованный последовательно соединенными элементами (через которые течет одинаковый ток) и заключенный между двумя узлами. В свою очередь *узел* есть точка цепи, в которой сходятся не менее трех ветвей.

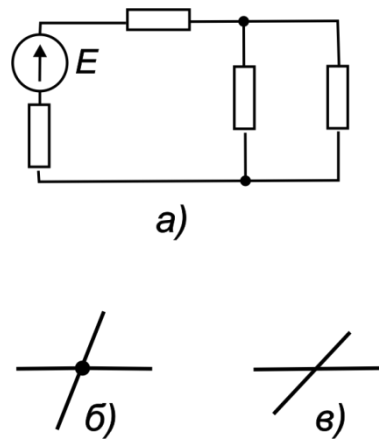


Рис. 1.4.

Если в месте пересечения двух линий на электрической схеме поставлена точка (рис. 1.4, б), то в этом месте есть электрическое соединение двух линий, в противном случае (рис. 1.4, в) его нет. Узел, в котором сходятся две ветви, одна из которых является продолжением другой, называют *устраняемым узлом*.

#### 1.1.4. Напряжение на участке цепи

Под *напряжением* на некотором участке электрической цепи понимают разность потенциалов между крайними точками этого участка.

На рис. 1.5 изображен участок цепи, крайние точки которого обозначены буквами *a* и *b*. Пусть ток  $I$  течет от точки *a* к точке *b* (от более высокого потенциала к более низкому). Следовательно, потенциал точки *a* ( $\phi_a$ ) выше потенциала точки *b* ( $\phi_b$ ) на величину, равную произведению тока  $I$  на сопротивление  $R$ :

$$\phi_a = \phi_b + IR.$$

В соответствии с определением напряжение между точками *a* и *b*

$$U_{ab} = \phi_a - \phi_b.$$

Следовательно,  $U_{ab} = IR$ , т. е. напряжение на сопротивлении равно произведению тока, протекающего по сопротивлению, на величину этого сопротивления.

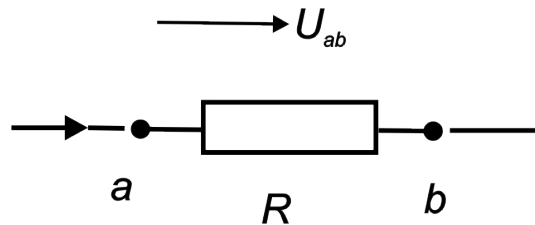


Рис.1.5.

В электротехнике разность потенциалов на концах сопротивления принято называть либо *напряжением на сопротивлении*, либо *падением напряжения*. В дальнейшем разность потенциалов на концах сопротивления, т. е. произведение  $IR$ , будем именовать падением напряжения.

Положительное направление падения напряжения на каком-либо участке (направление отсчета этого напряжения), указываемое на рисунках стрелкой, совпадает с положительным направлением отсчета тока, протекающего по данному сопротивлению.

В свою очередь положительное направление отсчета тока  $I$  (ток – это скаляр алгебраического характера) совпадает с положительным направлением нормали к поперечному сечению проводника при вычислении тока по

формуле  $I = \int_s \vec{\delta} \vec{ds}$ , где  $\vec{\delta}$  – плотность тока и  $\vec{ds}$  – элемент площади поперечного сечения.

Рассмотрим вопрос о напряжении на участке цепи, содержащем не только сопротивление, но. и э. д. с.

На рис. 1.6, а, б показаны участки некоторых цепей, по которым протекает ток  $I$ . Найдем разность потенциалов (напряжение) между точками  $a$  и  $c$  для этих участков. По определению,

$$U_{ac} = \phi_a - \phi_c. \quad (1.1)$$

Выразим потенциал точки  $a$  через потенциал точки  $c$ . При перемещении от точки  $c$  к точке  $b$  встречно направлению э. д. с.  $E$  (рис. 1.6, а) потенциал точки  $b$  оказывается ниже (меньше), чем потенциал точки  $c$ , на величину э. д. с.  $E$ :

$$\phi_b = \phi_c + E.$$

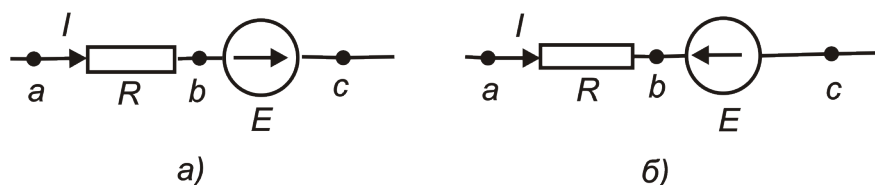


Рис. 1.6.

При перемещении от точки  $c$  к точке  $b$  согласно направлению э. д. с.  $E$  (рис. 1.6, б) потенциал точки  $b$  оказывается выше (больше), чем потенциал точки  $c$ , на величину э. д. с.  $E$ :

$$\phi_a = \phi_b + IR.$$

Так как ток течет от более высокого потенциала к более низкому, в обеих схемах рис. 1.6 потенциал точки  $a$  выше потенциала точки  $b$  на величину падения напряжения на сопротивлении  $R$ :

$$\phi_a = \phi_b + IR.$$

Таким образом, для рис. 1.6, а

$$\phi_a = \phi_c - E + IR,$$

или

$$U_{ac} = \phi_a - \phi_c = IR - E, \quad (1.2a)$$

и для рис. 1.6, б

$$\phi_a = \phi_c + IR + E,$$

или

$$U_{ac} = \phi_a - \phi_c = IR + E. \quad (1.26)$$

Положительное направление напряжения  $U_{ac}$  показывают стрелкой от  $a$  к  $c$ . Согласно определению напряжения,  $U_{ca} = \phi_c - \phi_a$ . Поэтому  $U_{ca} = -U_{ac}$ , т. е. изменение чередования (последовательности) индексов равносильно изменению знака этого напряжения. Следовательно, напряжение может быть и положительной, и отрицательной величиной.

#### 1.1.5. Закон Ома для участка цепи, не содержащего э. д. с.

Закон (правило) Ома для участка цепи, не содержащего э. д. с, устанавливает связь между током и напряжением на этом участке. Применительно к рис. 1.5

$$U_{ab} = IR,$$

Или

$$I = U_{ab} / R = (\phi_a - \phi_b) / R. \quad (1.3)$$

#### 1.1.6. Закон Ома для участка цепи, содержащего э. д. с.

Закон (правило) Ома для участка цепи, содержащего э. д. с, позволяет найти ток этого участка по известной разности потенциалов (  $\phi_a - \phi_c$  ) на концах участка цепи и

имеющейся на этом участке э. д. с.  $E$ . Так, из уравнения (1.2 а) для схемы рис. 1.6, а

$$I = \frac{\phi_a - \phi_c + E}{R} = \frac{U_{ac} + E}{R};$$

из уравнения (1.26) для схемы рис. 1.6, б

$$I = \frac{\phi_a - \phi_c - E}{R} = \frac{U_{ac} - E}{R}.$$

В общем случае

$$I = \frac{(\phi_a - \phi_c) \pm E}{R} = \frac{U_{ac} \pm E}{R}. \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) математически выражает закон Ома для участка цепи, содержащего э. д. с.; знак плюс перед  $E$  соответствует рис. 1.6, а, знак минус – рис. 1.6, б. В частном случае при  $E = 0$  уравнение (1.4) переходит в уравнение (1.3).

Пример 1. К зажимам  $a$  и  $c$  схемы рис. 1.7 подключен вольтметр, имеющий очень большое, теоретически бесконечно большое сопротивление (следовательно, его подключение или отключение не влияет на режим работы цепи).

Если ток  $I=10$  А течет от  $a$  к  $c$ , то показание вольтметра  $U'_{ac}=-18$  В; если ток  $I=10$  А течет от  $c$  к  $a$ , то  $U''_{ac}=-20$  В. Определить сопротивление  $R$  и э. д. с.  $E$ .

Р е ш е н и е. В первом режиме  $U'_{ac}=-18=-E+IR=-E+10R$ . Во втором режиме  $U''_{ac}=-20=-E-IR=-E-10R$ . Совместное решение дает  $E=19$  В и  $R=0,1$  Ом.

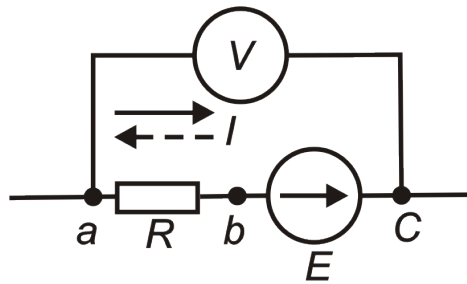


Рис.1.7.

### 1.1.7. Законы Кирхгофа

Все электрические цепи подчиняются первому и второму законам (правилам) Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа можно сформулировать двояко:

1) *алгебраическая сумма токов, подтекающих к любому узлу схемы, равна нулю;*

2) *сумма подтекающих к любому узлу токов равна сумме утекающих от узла токов.*

Так, применительно к рис. 1.8, если подтекающие к узлу токи считать положительными, а утекающие – отрицательными, то согласно первой формулировке

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0;$$

согласно второй –

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4.$$

Физически первый закон Кирхгофа означает, что движение зарядов в цепи происходит так, что ни в одном из узлов они не скапливаются.

Если мысленно рассечь любую схему произвольной плоскостью и все находящееся по одну сторону от нее рассматривать как некоторый большой «узел», то алгебраическая сумма токов, входящих в этот «узел», будет равна нулю.

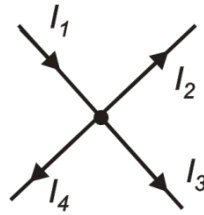


Рис. 1.8.

Второй закон Кирхгофа также можно сформулировать двояко:

1) *алгебраическая сумма падений напряжения в любом замкнутом контуре равна алгебраической сумме э. д. с. вдоль того же контура:*

$$\sum IR = \sum E$$

(в каждую из сумм соответствующие слагаемые входят со знаком плюс, если они совпадают с направлением обхода контура, и со знаком минус, если они не совпадают с ним);

2) *алгебраическая сумма напряжений (не падений напряжения!) вдоль любого замкнутого контура равна нулю:*

$$\sum U_k = 0.$$

Так, для периферийного контура схемы рис. 1.9

$$U_{ae} + U_{ec} + U_{cd} + U_{da} = 0.$$

Законы Кирхгофа справедливы для линейных и нелинейных цепей при любом характере изменения во времени токов и напряжений.

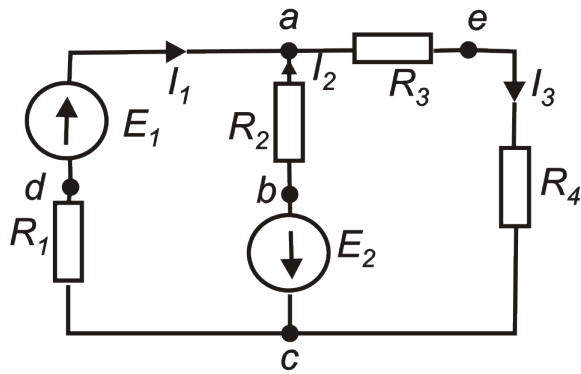


Рис. 1.9.

### 1.1.8. Составление уравнений для расчета токов в схемах с помощью законов Кирхгофа

Законы Кирхгофа используют для нахождения токов в ветвях схемы. Обозначим число всех ветвей схемы  $v$ , число ветвей, содержащих источники тока, –  $v_{\text{ИТ}}$  и число узлов –  $u$ . В каждой ветви схемы течет свой ток. Так как токи в ветвях с источниками тока известны, то число неизвестных токов равняется  $v - v_{\text{ИТ}}$ . Перед тем как составлять уравнения, необходимо произвольно выбрать:

а) положительные направления токов в ветвях и обозначить их на схеме;

б) положительные направления обхода контуров для составления уравнений по второму закону Кирхгофа.

С целью единообразия рекомендуется для всех контуров положительные направления обхода выбирать одинаковыми, например по часовой стрелке.

Чтобы получить линейно независимые уравнения, по первому закону Кирхгофа составляют число уравнений, равное числу узлов без единицы, т. е.  $u - 1$ .

Уравнение для последнего  $u$ -го узла не составляют, так как оно совпало бы с уравнением, полученным при суммировании уже составленных уравнений для  $u-1$  узлов, поскольку в эту сумму входили бы дважды и с противоположными знаками токи ветвей, не подходящих к  $u$ -му узлу, а токи ветвей, подходящих к  $u$ -му узлу, входили бы в эту сумму со знаками, противоположными тем, с какими они вошли бы в уравнение для  $u$ -го узла.

По второму закону Кирхгофа составляют число уравнений, равное числу ветвей без источников тока ( $B - B_{ИТ}$ ), за вычетом уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа, т. е.  $(B - B_{ИТ}) - (u - 1) = B - B_{ИТ} - u + 1$ .

Составляя уравнения по второму закону Кирхгофа, следует охватить все ветви схемы, исключая лишь ветви с источниками тока. При записи линейно независимых уравнений по второму закону Кирхгофа стремятся, чтобы в каждый новый контур, для которого составляют уравнение, входила хотя бы одна новая ветвь, не вошедшая в предыдущие контуры, для которых уже записаны уравнения по второму закону Кирхгофа. Такие контуры условимся называть *независимыми*.

Для того чтобы пояснить, что такое независимый контур, используют понятия «дерево», «ветвь», «хорда». Уравнения по законам Кирхгофа иногда составляют, используя матрицы фундаментальных контуров и матрицы отсечений.

Требование, чтобы в каждый новый контур входила хотя бы одна новая ветвь, является достаточным, но не необходимым условием, а потому его не всегда выполняют. В таких случаях часть уравнений по второму закону Кирхгофа

составляют для контуров, все ветви которых уже вошли в предыдущие контуры.

Пример 2. Найти токи в ветвях схемы рис. 1.9, в которой  $E_1=80$  В,  $E_2 = 64$  В,  $R_1 = 6$  Ом,  $R_2 = 4$  Ом,  $R_3 = 3$  Ом,  $R_4 = 1$  Ом.

Р е ш е н и е. Произвольно выбираем положительные направления токов в ветвях. В схеме рис. 1.9  $v = 3$ ;  $v_{ИТ} = 0$ ;  $y = 2$ . Следовательно, по первому закону Кирхгофа можно составить только одно уравнение:

$$I_1 + I_2 = I_3. \quad (a)$$

Нетрудно убедиться, что для второго узла получили бы аналогичное уравнение. По второму закону Кирхгофа составим  $v - v_{ИТ} - (y - 1) = 3 - 0 - (2 - 1) = 2$  уравнения. Положительные направления обхода контуров выбираем по часовой стрелке.

Для контура  $R_1 E_1 R_2 E_2$

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = E_1 + E_2. \quad (б)$$

Знак плюс перед  $I_1 R_1$  взят потому, что направление тока  $I_1$  совпадает с направлением обхода контура; знак минус перед  $I_2 R_2$  - потому, что направление  $I_2$  встречно обходу контура.

Для контура  $E_2 R_2 R_3 R_4$

$$I_2 R_2 + I_3 (R_3 + R_4) = -E_2. \quad (в)$$

Совместное решение уравнений (а), (б), (в) дает:  $I_1 = 14$  А,  $I_2 = -15$  А,  $I_3 = -1$  А.

Поскольку положительные направления токов выбирают произвольно, в результате расчета какой-либо один или несколько токов могут оказаться отрицательными. В рассмотренном примере отрицательными оказались токи  $I_2$  и  $I_3$ , что следует понимать так: направления токов  $I_2$  и  $I_3$  не

совпадают с направлениями, принятыми для них на рис. 1.9 за положительные, т. е. в действительности токи  $I_2$  и  $I_3$  проходят в обратном направлении.

#### 1.1.9. Заземление одной точки схемы

При заземлении любой одной точки схемы токораспределение в схеме не меняется, так как никаких новых ветвей, по которым могли бы протекать токи, при этом не образуется. Иначе будет, если заземлить две или большее число точек схемы, имеющих различные потенциалы. В этом случае через землю (любую проводящую среду) образуются дополнительные ветви, сама схема становится отличной от исходной и токораспределение в ней меняется.

#### 1.1.10. Потенциальная диаграмма

Под потенциальной диаграммой понимают график распределения потенциала вдоль какого-либо участка цепи или замкнутого контура. По оси абсцисс на нем откладывают сопротивления вдоль контура, начиная с какой-либо произвольной точки, по оси ординат – потенциалы. Каждой точке участка цепи или замкнутого контура соответствует своя точка на потенциальной диаграмме.

Рассмотрим последовательность построения потенциальной диаграммы по данным примера 2.

Пример 3. Построить потенциальную диаграмму для контура  $a\beta c\alpha$  (рис. 1.9).

Р е ш е н и е. Подсчитаем суммарное сопротивление контура:  $4 + 3 + 1 = 8$  Ом. Выберем масштабы по оси абсцисс (ось  $x$ ) и по оси ординат (ось  $y$ ).

Произвольно примем потенциал одной из точек, например точки  $a$ ,  $\varphi_a = 0$ . Эту точку на диаграмме рис. 1.10 поместим в начало координат.

Потенциал точки  $b$   $\varphi_b = \varphi_a + I_2 R_4 = \varphi_a - 60 = -60$  В; ее координаты:  $x = 4$ ,  $y = -60$ . Потенциал точки  $c$   $\varphi_c = \varphi_b + E_2 = 4$  В; ее координаты:  $x = 4$ ,  $y = 4$ . Потенциал точки  $e$   $\varphi_e = \varphi_c + I_3 R_4 = 4 - 1 \cdot 1 = 3$  В; ее координаты:  $x = 5$ ,  $y = 3$ .

Тангенс угла  $\alpha_1$  наклона прямой  $ab$  к оси абсцисс пропорционален току  $I_2$ , а тангенс угла  $\alpha_2$  наклона прямой  $ce$

- току  $I_3$ ;  $\text{tg } \alpha = I \frac{m_R}{m_\phi}$ , где  $m_R$  и  $m_\phi$  - масштабы по осям  $x$  и  $y$ .

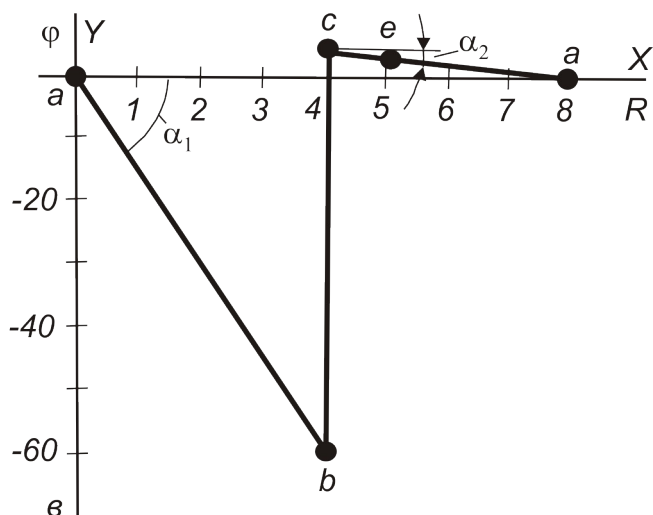


Рис. 1.10.

### 1.1.11. Энергетический баланс в электрических цепях

При протекании токов по сопротивлениям в последних выделяется тепло. На основании закона сохранения энергии количество теплоты, выделяющееся в единицу времени в сопротивлениях схемы, должно равняться энергии, доставляемой за то же время источниками питания.

Если направление тока  $I$ , протекающего через источник э. д. с.  $E$ , совпадает с направлением э. д. с, то источник э. д. с. доставляет в цепь энергию в единицу времени (мощность), равную  $EI$ , и произведение  $EI$  входит с положительным знаком в уравнение энергетического баланса.

Если же направление тока  $I$  встречно направлению э. д. с.  $E$ , то источник э. д. с. не поставляет энергию, а потребляет ее (например, заряжается аккумулятор), и произведение  $EI$  войдет в уравнение энергетического баланса с отрицательным знаком.

Уравнение энергетического баланса при питании только от источников э. д. с. имеет вид  $\sum I^2 R = \sum EI$ .

Когда схема питается не только от источников э. д. с, но и от источников тока, т. е. к отдельным узлам схемы подтекают и от них утекают токи источников тока, при составлении уравнения энергетического баланса необходимо учесть и энергию, доставляемую источниками тока. Допустим, что к узлу  $a$  схемы подтекает ток  $I_k$  от источника тока, а от узла  $b$  этот ток утекает. Доставляемая источником тока мощность равна  $U_{ab}I_k$ . Напряжение  $U_{ab}$  и токи в ветвях схемы должны быть подсчитаны с учетом тока, подтекающего от источника тока. Последнее проще всего

сделать по методу узловых потенциалов. Общий вид уравнения энергетического баланса

$$\sum I^2 R = \sum EI + \sum U_{ab} I_k.$$

Для практических расчетов электрических цепей разработаны методы, более экономичные в смысле затраты времени и труда, чем метод расчета цепей по законам Кирхгофа. Рассмотрим эти методы.

#### 1.1.12. Метод пропорциональных величин

Согласно методу пропорциональных величин, в самой удаленной от источника э. д. с. ветви схемы (исходной ветви) произвольно задаемся некоторым током, например током в 1 А. Далее, продвигаясь к входным зажимам  $тп$ , находим токи в ветвях и напряжения на различных участках схемы. В результате расчета получим значение напряжения  $U_{mn}$  схемы и токов в ветвях, *если бы* в исходной ветви протекал ток в 1 А.

Так как найденное значение напряжения  $U_{mn}$  в общем случае не будет равно э. д. с. источника, то следует во всех ветвях изменить токи, умножив их на коэффициент, равный отношению э. д. с. источника к найденному значению напряжения в начале схемы.

Метод пропорциональных величин, если рассматривать его обособленно от других методов, применим для расчета цепей, состоящих только из последовательно и параллельно соединенных, сопротивлений и при наличии в схеме одного источника.

Однако этот метод можно использовать и совместно с другими методами (преобразование треугольника в звезду, метод наложения и т. п.), которые рассмотрены далее.

Пример 4. Найти токи в ветвях схемы рис. 1.11 методом пропорциональных величин. Сопротивления схемы даны в омах.

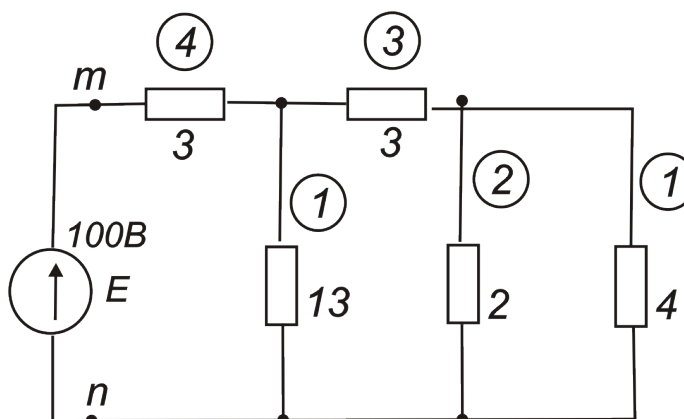


Рис. 1.11.

Р е ш е н и е. Задаемся током в ветви с сопротивлением 4 Ом, равным 1 А, и подсчитываем токи в остальных ветвях (числовые значения токов обведены на рисунке кружками). Напряжение между точками  $m$  и  $n$  равно  $1 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 25$  В. Так как э. д. с.  $E = 100$  В, все токи следует умножить на коэффициент  $k = 100/25 = 4$ .

### 1.1.13. Метод контурных токов

При расчете методом контурных токов полагают, что в каждом независимом контуре схемы течет свой контурный ток. Уравнения составляют относительно контурных токов, после чего определяют токи ветвей через контурные токи.

Таким образом, *метод контурных токов* можно определить как метод расчета, в котором за искомые принимают контурные токи. Число неизвестных в этом методе равно числу уравнений, которые необходимо было бы составить для схемы по второму закону Кирхгофа.

Следовательно, метод контурных токов более экономичен при вычислительной работе, чем метод на основе законов Кирхгофа (в нем меньшее число уравнений).

Вывод основных расчетных уравнений проведем применительно к схеме рис. 1.12, в которой два независимых контура. Положим, что в левом контуре по часовой стрелке течет контурный ток  $I_{11}$ , а в правом (также по часовой стрелке) контурный ток  $I_{22}$ . Для каждого из контуров составим уравнения по второму закону Кирхгофа. При этом учтем, что по смежной ветви (с сопротивлением  $R_5$ ) течет сверху вниз ток  $I_{11}$  и  $I_{22}$ . Направления обхода контуров примем также по часовой стрелке.

Для первого контура

$$(R_1 + R_2)I_{11} + R_5(I_{11} - I_{22}) = E_1 + E_5 \quad (a)$$

или

$$(R_1 + R_2 + R_5)I_{11} + (-R_5)I_{22} = E_1 + E_5. \quad (б)$$

Для второго контура

$$-R_5(I_{11} - I_{22}) + (R_3 + R_4)I_{22} = -E_5 - E_4$$

или

$$(-R_5)I_{11} + (R_3 + R_4 + R_5)I_{22} = -E_4 - E_5.$$

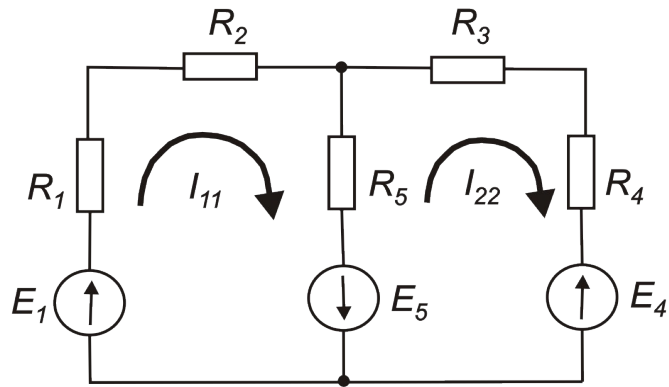


Рис. 1.12.

В уравнении (б) множитель при токе  $I_{11}$ , являющийся суммой сопротивлений первого контура, обозначим через  $R_{11}$ , множитель при токе  $I_{22}$  (сопротивление смежной ветви, взятое со знаком минус) – через  $R_{12}$ .

Перепишем эти уравнения следующим образом:

$$R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} = E_{11}; \quad \left. \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} (1.4')$$

Здесь

$$R_{11} = R_1 + R_2 + R_5; \quad E_{11} = E_1 + E_5; \quad R_{12} = R_{21} = -R_5;$$

$$R_{22} = R_3 + R_4 + R_5; \quad E_{22} = -E_4 - E_5,$$

где  $R_{11}$  – полное или собственное сопротивление первого контура;  $R_{12}$  – сопротивление смежной ветви между первым и вторым контурами, взятое со знаком минус;  $E_{11}$  – контурная э.д.с. первого контура, равная алгебраической сумме э.д.с. этого контура (в нее со знаком плюс входят те э.д.с, направления которых совпадают с направлением обхода контура);  $R_{22}$  полное или собственное сопротивление второго контура;  $R_{21}$  – сопротивление смежной ветви между первым и вторым контурами, взятое со знаком минус;  $E_{22}$  – контурная э.д.с, второго контура.

В общем случае можно сказать, что сопротивление смежной ветви между  $k$  и  $t$  контурами ( $R_{km}$ ) входит в уравнение со знаком минус, если направления контурных токов  $I_{kk}$  и  $I_{tt}$  вдоль этой ветви встречны, и со знаком плюс, если направления этих токов согласны.

Если в схеме больше двух контуров, например три, то система уравнений выглядит следующим образом:

$$R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + R_{13}I_{33} = E_{11}; \quad R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + R_{23}I_{33} = E_{22}; \quad R_{31}I_{11} + R_{32}I_{22} + R_{33}I_{33} = E_{33} \quad (1.4'')$$

или в матричной форме:

$$[R][I] = [E];$$

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}; \quad [I] = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix}; \quad [E] = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{bmatrix}.$$

Рекомендуется для единообразия в знаках сопротивлений с разными индексами все контурные токи направлять в одну и ту же сторону, например все по часовой стрелке.

Если в результате решения системы уравнений какой-либо контурный ток окажется отрицательным, то это означает, что в действительности направление контурного тока обратно принятому за положительное.

В ветвях, не являющихся смежными между соседними контурами (например, в ветви с сопротивлениями  $R_1$ ,  $R_2$  схемы рис. 1.12), найденный контурный ток является истинным током. В смежных ветвях через контурные токи определяют истинные. Например, в ветви с сопротивлением  $R_5$  протекающий сверху вниз ток равен разности  $I_{11} - I_{22}$ .

Если в электрической цепи имеется  $l$  независимых контуров, то число уравнений тоже равно  $l$ .

Общее решение системы  $l$  уравнений относительно тока  $I_{kk}$  таково:

$$I_{kk} = E_{11} \frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + E_{22} \frac{\Delta_{k2}}{\Delta} + E_{33} \frac{\Delta_{k3}}{\Delta} + \dots + E_{nn} \frac{\Delta_{kn}}{\Delta}, \quad (1.5)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.6)$$

- определитель системы.

Алгебраическое дополнение  $\Delta_{km}$  получено из определителя  $\Delta$  путем вычеркивания  $k$ -го столбца и  $m$ -й строки и умножения полученного определителя на  $(-1)^{k+m}$ .

Если из левого верхнего угла определителя провести диагональ в его правый нижний угол (главная диагональ) и учесть, что  $R_{km} = R_{mk}$ , то можно убедиться в том, что определитель делится на две части, являющиеся зеркальным отображением одна другой. Это свойство определителя называют *симметрией относительно главной диагонали*. В силу симметрии определителя относительно главной диагонали  $\Delta_{km} = \Delta_{mk}$ .

Пример 5. Найти токи в схеме рис. 1.13 с помощью метода контурных токов. Числовые значения сопротивлений и э.д.с. указаны на рисунке.

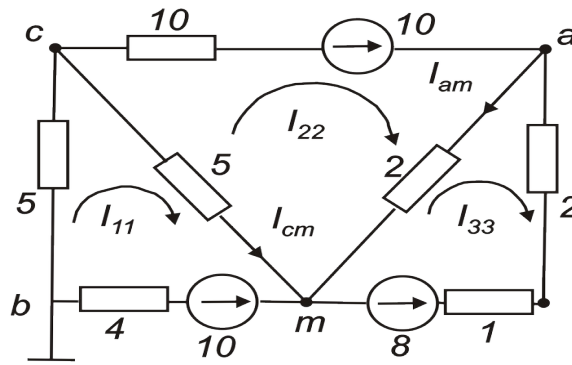


Рис. 1.13.

Р е ш е н и е. Выбираем направления всех контурных токов  $I_{11}$ ,  $I_{22}$  и  $I_{33}$  по часовой стрелке.

Определяем:  $R_{11} = 5 + 5 + 4 = 14$  Ом;  $R_{22} = 5 + 10 + 2 = 17$  Ом;  $R_{33} = 2 + 2 + 1 = 5$  Ом;  $R_{12} = R_{21} = -5$  Ом;  $R_{13} = R_{31} = 0$ ;  $R_{23} = R_{32} = -2$  Ом;  $E_{11} = -10$  В;  $E_{22} = 10$  В;  $E_{33} = -8$  В.

Записываем систему уравнений:

$$\begin{aligned} 14I_{11} - 5I_{22} &= -10; \\ -5I_{11} + 17I_{22} - 2I_{33} &= 10; \\ -2I_{22} + 5I_{33} &= -8. \end{aligned}$$

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 14 & -5 & 0 \\ -5 & 17 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1009.$$

Подсчитаем контурные токи:

$$I_{11} = \frac{\begin{vmatrix} -10 & -5 & 0 \\ 10 & 17 & -2 \\ -8 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-640}{1009} = -0.634 \text{ A};$$

$$I_{22} = 0,224 \text{ A}; \quad I_{33} = -1,51 \text{ A}.$$

Ток в ветви  $cm$

$$I_{cm} = I_{11} - I_{22} = -0,634 - 0,224 = -0,86 \text{ A}$$

Ток в ветви  $am$

$$I_{am} = I_{22} - I_{33} = 0,224 + 1,51 = 1,734 \text{ А}$$

Формула (1.5) в ряде параграфов используется в качестве исходной при рассмотрении таких важных вопросов теории линейных проводимостей ветвей, принцип взаимности, метод наложения и линейные соотношения в электрических цепях.

*Составлению уравнений по методу контурных токов для схем с источниками тока присущи некоторые особенности.* В этом случае полагаем, что каждая ветвь с источником тока входит в контур, замыкающийся через ветви с источниками э.д.с. и сопротивлениями, и что эти токи известны и равны токам соответствующих источников тока. Уравнения составляют лишь для контуров с неизвестными контурными токами. Если для схемы рис. 1.14, а принять, что контурный ток  $I_{11} = I_k$  течет согласно направлению часовой стрелки по первой и второй ветвям, а контурный ток  $I_{22} = I_3$  замыкается также по часовой стрелке по второй и третьей ветвям, то согласно методу контурных токов получим только одно уравнение с неизвестным током  $I_{22}$

$$(R_2 + R_3)I_{22} - R_2 I_k = E$$

Отсюда 
$$I_{22} = \frac{E + I_k R_2}{R_2 + R_3}$$
 и ток второй ветви  $I_2 = I_{11} - I_{22}$ .

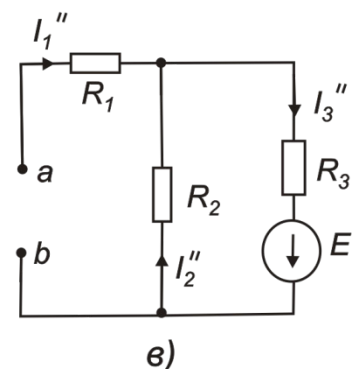
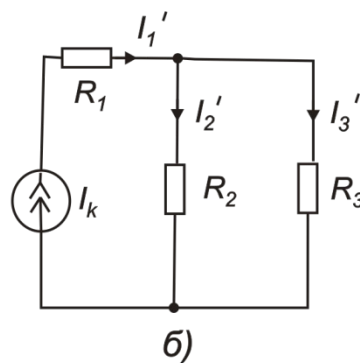
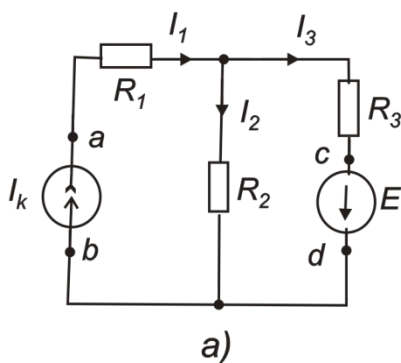


Рис. 1.14.

Контрольные вопросы

1. Как формулируются законы Кирхгофа?
2. Как формулируется закон баланса мощности?
3. Какие электрические величины можно определить, используя 1 закон Кирхгофа?
4. Как определить внутреннее сопротивление источника сигнала?
5. Что такое активный двухполюсник?
6. В чем заключается метод эквивалентного генератора?
7. Что значит рассчитать электрическую схему?

Лекция **«Электрические цепи однофазного синусоидального тока»**

2.1.1. Синусоидальный ток и  
основные характеризующие его величины

Синусоидальный ток представляет собой ток, изменяющийся во времени по синусоидальному закону (рис. 2.1):

$$i = I_m \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \psi\right) = I_m \sin(\omega t + \psi) \quad (2.1)$$

Максимальное значение функции называют *амплитудой*. Амплитуду тока обозначают  $I_m$ ; *период*  $T$  – это время, за которое совершается одно полное колебание.

*Частота* равна числу колебаний в 1 с;

$$f = 1/T. \quad (2.2)$$

Частоту  $f$  измеряют в герцах (Гц) или  $\text{с}^{-1}$ , угловую частоту

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T \quad (2.3)$$

- в рад/с или  $\text{с}^{-1}$ .

Аргумент синуса, т. е.  $(\omega t + \psi)$ , называют *фазой*. Фаза характеризует состояние колебания (числовое значение) в данный момент времени  $t$ .

Любая синусоидально изменяющаяся функция определяется тремя величинами: амплитудой, угловой частотой и начальной фазой.

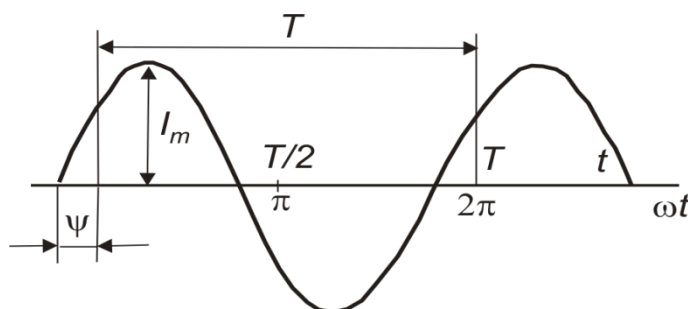


Рис. 2.1.

В России и в Западной Европе наибольшее распространение получили установки синусоидального тока частотой 50 Гц, принятой в энергетике за стандартную. В США стандартной является частота 60 Гц. Диапазон частот практически применяемых синусоидальных токов очень широк: от долей герца, например в геологоразведке, до миллиардов герц в радиотехнике.

### 2.1.2. Изображение синусоидально изменяющихся величин векторами на комплексной плоскости.

Комплексная амплитуда. Комплекс действующего значения

На рис. 2.2 дана комплексная плоскость, на которой можно изобразить комплексные числа. Комплексное число имеет действительную (вещественную) и мнимую части. По оси абсцисс комплексной плоскости откладывают действительную часть комплексного числа, а по оси ординат – мнимую часть. На оси действительных значений ставим +1, а на оси мнимых значений  $+j$  ( $j=\sqrt{-1}$ ).

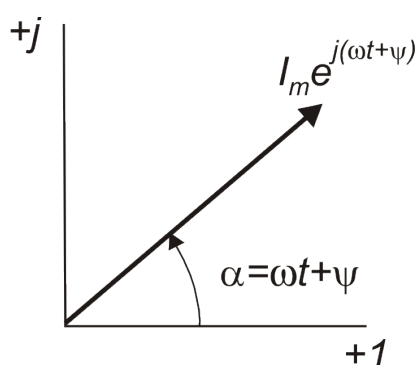


Рис. 2.2

Из курса математики известна формула Эйлера

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha. \quad (2.4)$$

Комплексное число  $e^{j\alpha}$  изображают на комплексной плоскости вектором, численно равным единице и составляющим угол  $\alpha$  с осью вещественных значений (осью +1). Угол  $\alpha$  отсчитываем против часовой стрелки от оси +1. Модуль функции

$$|e^{j\alpha}| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1.$$

Проекция функции  $e^{j\alpha}$  на ось +1 равна  $\cos \alpha$ , а на ось +j равна  $\sin \alpha$ . Если вместо функции  $e^{j\alpha}$  взять функцию  $I_m e^{j\alpha}$ , то

$$I_m e^{j\alpha} = I_m \cos \alpha + j I_m \sin \alpha.$$

На комплексной плоскости эта функция, так же как и функция  $e^{j\alpha}$ , изобразится под углом  $\alpha$  к оси +1, но величина вектора будет в  $I_T$  раз больше.

Угол ее в формуле (2.4) может быть любым. Положим, что  $\alpha = \omega t + \psi$ , т. е. угол  $\alpha$  изменяется прямо пропорционально времени. Тогда

$$I_m e^{j(\omega t + \psi)} = I_m \cos(\omega t + \psi) + j I_m \sin(\omega t + \psi). \quad (2.5)$$

Слагаемое  $I_m \cos(\omega t + \psi)$  представляет собой действительную часть (Re) выражения  $I_m e^{j(\omega t + \psi)}$ :

$$I_m \cos(\omega t + \psi) = \operatorname{Re} I_m e^{j(\omega t + \psi)}. \quad (2.6 \text{ а})$$

а функция  $I_m \sin(\omega t + \psi)$  есть коэффициент при мнимой части (Im) выражения  $I_m e^{j(\omega t + \psi)}$ :

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi) = \operatorname{Im} I_m e^{j(\omega t + \psi)}. \quad (2.6 \text{ б})$$

Таким образом, синусоидально изменяющийся ток  $i$  можно представить как проекцию вращающегося вектора  $I_m e^{j(\omega t + \psi)}$  на ось +j (рис. 2.3).

Исторически сложилось так, что в радиотехнической литературе за основу обычно принимают не синусоиду, а косинусоиду и потому пользуются формулой (2.6а).

С целью единообразия принято на комплексной плоскости изображать векторы синусоидально изменяющихся во времени величин для момента времени  $\omega t = 0$ . При этом вектор  $I_m e^{j(\omega t + \psi)}$  равен

$$I_m e^{j(\omega t + \psi)} = I_m e^{j\psi} = \dot{I}_m, \quad (2.7)$$

где  $\dot{I}_m$  – комплексная величина, модуль которой равен  $I_m$ , а угол, под которым вектор  $\dot{I}_m$  проведен к оси  $+1$  на комплексной плоскости, равен начальной фазе  $\psi$ .

Величину  $\dot{I}_m$  называют *комплексной амплитудой* тока  $i$ . Комплексная амплитуда изображает ток  $i$  на комплексной плоскости для момента времени  $\omega t = 0$ .

Рассмотрим два числовых примера на переход от мгновенного значения тока к комплексной амплитуде и от комплексной амплитуды к мгновенному значению.

**Пример 6.** Ток  $i = 8 \sin(\omega t + 20^\circ)$  А. Записать выражение для комплексной амплитуды этого тока.

Р е ш е н и е. В данном случае  $I_m = 8$  А,  $\psi = 20^\circ$ .

Следовательно,  $\dot{I}_m = 8e^{j20^\circ}$  А.

**Пример 7.** Комплексная амплитуда тока  $\dot{I}_m = 25e^{-j30^\circ}$  А. Записать выражение для мгновенного значения этого тока.

Р е ш е н и е. Для перехода от комплексной амплитуды к мгновенному значению надо умножить  $\dot{I}_m$  на  $e^{j\omega t}$  и взять коэффициент при мнимой части от полученного произведения:

$$i = \text{Im} 25e^{-j30^\circ} e^{j\omega t} = \text{Im} 25e^{j(\omega t - 30^\circ)} = 25 \sin(\omega t - 30^\circ).$$

Под *комплексом действующего значения тока*, или под *комплексом тока* (комплексным током),  $\dot{I}$  понимают частное от деления комплексной амплитуды на  $\sqrt{2}$  :

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi} = I e^{j\psi}. \quad (2.8)$$

Пример 8. Записать выражение комплекса действующего значения тока для примера 6.

Решение.

$$\dot{I} = 8e^{j20^\circ} / \sqrt{2} = 5,6e^{j20^\circ} \text{ А.}$$

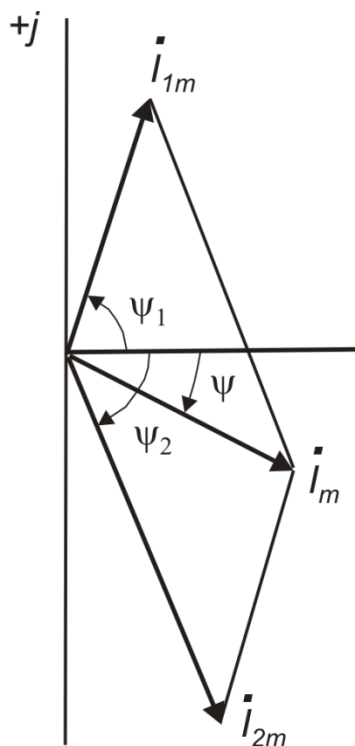


Рис. 2.3.

### 2.1.3. Сложение и вычитание синусоидальных функций времени с помощью комплексной плоскости. Векторная диаграмма

Положим, что необходимо сложить два тока  $\{i_1$  и  $i_2\}$  одинаковой частоты. Сумма их дает некоторый ток с той же частотой:

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2; \\ i_1 &= I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1); \quad i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \psi_2); \\ i &= I_m \sin(\omega t + \psi). \end{aligned}$$

Требуется найти амплитуду  $I_m$  и начальную фазу  $\psi$  тока  $i$ . С этой целью ток  $i_1$  изобразим на комплексной плоскости

(рис. 2.3) вектором  $\dot{I}_{1m} = I_{1m} e^{j\psi_1}$ , а ток  $i_2$  - вектором  $\dot{I}_{2m} = I_{2m} e^{j\psi_2}$ . Геометрическая сумма векторов  $\dot{I}_{1m}$  и  $\dot{I}_{2m}$  даст комплексную амплитуду суммарного тока  $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi}$ . Амплитуда тока  $I_T$  определяется длиной суммарного вектора, а начальная фаза  $\psi$  - углом, образованным этим вектором и осью +1.

Для определения разности двух токов (э. д. с., напряжений) следует на комплексной плоскости произвести не сложение, а вычитание соответствующих векторов.

Обратим внимание на то, что если бы векторы  $\dot{I}_{1m}$ ,  $\dot{I}_{2m}$  и  $\dot{I}_m$  стали вращаться вокруг начала координат с угловой скоростью  $\omega$ , то взаимное расположение векторов по отношению друг к другу осталось бы без изменений.

*Векторной диаграммой* называют совокупность векторов на комплексной плоскости, изображающих синусоидально изменяющиеся функции времени одной и той же частоты и построенных с соблюдением правильной ориентации их относительно друг друга по фазе. Пример векторной диаграммы дан на рис. 2.3.

#### 2.1.4. Умножение вектора на $j$ и на $-j$

Пусть есть некоторый вектор  $\dot{A} = A e^{j\omega\alpha}$ . Умножение его на  $j$  дает вектор, по модулю равный  $A$ , но повернутый в сторону опережения (против часовой стрелки) по отношению к исходному вектору  $\dot{A}$  на  $90^\circ$ . Умножение  $\dot{A}$  на  $-j$

поворачивает вектор  $\dot{A}$  на  $90^\circ$  в сторону отставания (по часовой стрелке) также без изменения его модуля.

Чтобы убедиться в этом, представим векторы  $j$  и  $-j$  в показательной форме:

$$j = 1 \cdot e^{j90^\circ} = e^{j90^\circ}; \quad (2.9)$$

$$-j = 1 \cdot e^{-j90^\circ} = e^{-j90^\circ}. \quad (2.10)$$

Тогда

$$\dot{A}j = Ae^{j\phi_a} e^{j90^\circ} = Ae^{j(\phi_a+90^\circ)}; \quad (2.11)$$

$$-\dot{A}j = Ae^{j\phi_a} e^{-j90^\circ} = Ae^{j(\phi_a-90^\circ)}. \quad (2.12)$$

Из (2.11) следует, что вектор  $j\dot{A}$ , по модулю равный  $A$ , составляет с осью  $+1$  комплексной плоскости угол  $\phi_a+90^\circ$ , т. е. повернут против часовой стрелки на  $90^\circ$  по отношению к вектору  $\dot{A}$ .

Согласно (2.12), умножение вектора  $\dot{A}$  на  $-j$  дает вектор, по модулю равный  $A$ , но повернутый по отношению к нему на  $90^\circ$  по часовой стрелке.

### 2.1.5. Основы символического метода расчета цепей синусоидального тока

Очень широкое распространение на практике получил символический, или комплексный, метод расчета цепей синусоидального тока.

Сущность символического метода расчета состоит в том, что при синусоидальном токе можно перейти от уравнений, составленных для мгновенных значений и являющихся дифференциальными уравнениями [см., например, (2.13)], к

алгебраическим уравнениям, составленным относительно комплексов тока и э. д. с. Этот переход основан на том, что в уравнении, составленном по законам Кирхгофа для установившегося процесса, мгновенное значение тока  $i$  заменяют комплексной амплитудой тока  $I_m$ ; мгновенное значение напряжения на активном сопротивлении  $R = Ri$  – комплексом  $R\dot{I}_m$ , по фазе совпадающим с током  $\dot{I}_m$ ; мгновенное значение напряжения на индуктивности

$u_L = L \frac{di}{dt}$  – комплексом  $\dot{I}_m j\omega L$ , опережающим ток на  $90^\circ$ ;

мгновенное значение напряжения на емкости  $u_C = \frac{1}{C} \int idt$  –

комплексом  $\dot{I}_m \left( \frac{-j}{\omega C} \right)$ , отстающим от тока на  $90^\circ$ ; мгновенное

значение э. д. с.  $e$  – комплексом  $\dot{E}_m$ .

Для схемы рис. 2.4 уравнение для мгновенных значений можно записать так:

$$u_R + u_L + u_C = e,$$

или

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = e. \quad (2.13)$$

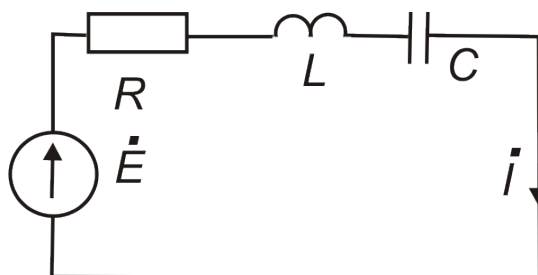


Рис. 2.4.

Запишем его в комплексной форме:

$$\dot{I}_m R + \dot{I}_m j\omega L + \dot{I}_m \left( \frac{-j}{\omega C} \right) = \dot{E}_m.$$

Вынесем  $\dot{I}_m$  за скобку:

$$\dot{I}_m \left( R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} \right) = \dot{E}_m. \quad (2.14)$$

Следовательно, для схемы рис. 2.5.

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{E}_m}{R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}}. \quad (2.15)$$

Это уравнение позволяет найти комплексную амплитуду тока  $I_T$  через комплексную амплитуду э. д. с.  $\dot{E}_T$  и сопротивления цепи  $R$ ,  $\omega L$  и  $1/\omega C$ .

Метод называют *символическим* потому, что токи и напряжения заменяют их комплексными изображениями или символами. Так,  $R\dot{I}_m$  – это изображение или символ

падения напряжения  $iR$ ;  $j\omega L\dot{I}_m$  – изображение или символ

падения напряжения на индуктивности  $u_L = L \frac{di}{dt}$ ;  $-\frac{j}{\omega C} \dot{I}_m$  –

изображение падения напряжения на конденсаторе  $\frac{1}{C} \int i dt$ .

### 2.1.6. Комплексное сопротивление. Закон Ома для цепи синусоидального тока

Множитель  $R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}$  в уравнении (2.14) представляет собой комплекс, имеет размерность сопротивления и обозначается через  $Z$ . Его называют *комплексным сопротивлением*:

$$Z = ze^{j\phi} = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}. \quad (2.16)$$

Как и всякий комплекс,  $Z$  можно записать в показательной форме. Модуль комплексного сопротивления принято обозначать через  $z$ . Точку над  $Z$  не ставят, потому что принято ставить ее только над такими комплексными величинами, которые отображают синусоидальные функции времени.

Уравнение (2.14) можно записать так:  $\dot{I}_m Z = \dot{E}_m$ . Разделим обе его части на  $\sqrt{2}$  и перейдем от комплексных амплитуд  $\dot{I}_m$  и  $\dot{E}_m$  к комплексам действующих значений  $\dot{I}$  и  $\dot{E}$ :

$$\dot{I} = \dot{E} / Z. \quad (2.17)$$

Уравнение (2.17) представляет собой *закон Ома для цепи синусоидального тока*.

В общем случае  $Z$  имеет некоторую действительную часть и некоторую мнимую часть  $jX$ :

$$Z = R + jX, \quad (2.18)$$

где  $R$  - активное сопротивление;  $X$  — реактивное сопротивление. Для схемы рис. 2.4 реактивное сопротивление

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

### 2.1.7. Треугольник сопротивлений и треугольник проводимостей

Из (2.18) следует, что модуль комплексного сопротивления

$$z = \sqrt{R^2 + X^2}. \quad (2.19)$$

Следовательно,  $z$  можно представить как гипотенузу прямоугольного треугольника (рис. 2.5) – треугольника сопротивлений, один катет которого равен  $R$ , другой  $X$ . При этом

$$\operatorname{tg} \varphi = X/R. \quad (2.20)$$

Аналогичным образом модуль комплексной проводимости

$y = \sqrt{g^2 + b^2}$ . Следовательно,  $y$  есть гипотенуза прямоугольного треугольника (рис. 2.6), катетами которого являются активная  $g$  и реактивная  $b$  проводимости:

$$\operatorname{tg} \phi = b/g. \quad (2.21)$$

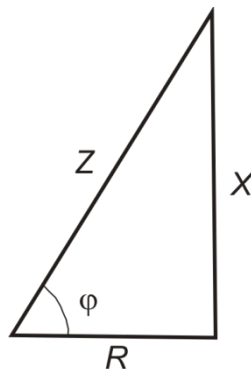


Рис. 2.5.

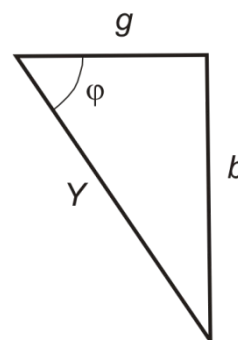


Рис. 2.6.

Треугольник сопротивлений дает графическую интерпретацию связи между модулем полного сопротивления  $z$  и активным и реактивным сопротивлениями цепи; треугольник проводимостей – интерпретацию связи

между модулем полной проводимости  $Y$  и ее активной и реактивной составляющими.

### 2.1.8. Законы Кирхгофа в символической форме записи

По первому закону Кирхгофа, алгебраическая сумма мгновенных значений токов, сходящихся в любом узле схемы, равна нулю:

$$\sum i_k = 0. \quad (2.22')$$

Подставив вместо  $i_k$  в (2.40')  $\dot{I}_k e^{j\omega t}$  и вынеся  $e^{j\omega t}$  за скобку, получим  $e^{j\omega t} \sum \dot{I}_k = 0$ . Так как  $e^{j\omega t}$  не равно нулю при любом  $t$ , то

$$\sum \dot{I}_k = 0. \quad (2.22)$$

Уравнение (2.22) представляет собой первый закон Кирхгофа в символической форме записи.

Для замкнутого контура сколь угодно сложной электрической цепи синусоидального тока можно составить уравнение по второму закону Кирхгофа для мгновенных значений токов, напряжений и э. д. с.

Пусть замкнутый контур содержит  $n$  ветвей и каждая  $k$ -ветвь в общем случае включает в себя э. д. с.  $e_k$ , активное сопротивление  $R_k$ , индуктивность  $L_k$  и емкость  $C_k$ , по которым протекает ток  $i_k$ . Тогда по второму закону Кирхгофа

$$\sum_{k=1}^n \left( i_k R_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int i_k dt \right) = \sum_{k=1}^n e_k. \quad (2.23')$$

Но каждое слагаемое левой части уравнения в соответствии с п. 2.1.6. можно заменить на  $\dot{I}_k Z_k$ , а каждое

слагаемое правой части - на  $\dot{E}_k$ . Поэтому уравнение (2.23') переходит в

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k Z_k = \sum_{k=1}^n \dot{E}_k. \quad (2.23)$$

Уравнение (2.23) представляет собой второй закон Кирхгофа в символической форме записи.

### Контрольные вопросы

1. Что такое реактивное сопротивление?
2. Как учитываются фазовые соотношения между током и напряжением в электрической цепи?
3. Что такое комплексное сопротивление?
4. Что такое топографическая диаграмма?

## Лекция «Полупроводниковые приборы. Транзисторы»

### 7.1 Биполярные транзисторы

Принцип действия биполярного транзистора заключается в том, что 2 р-п перехода расположены настолько близко друг к другу,

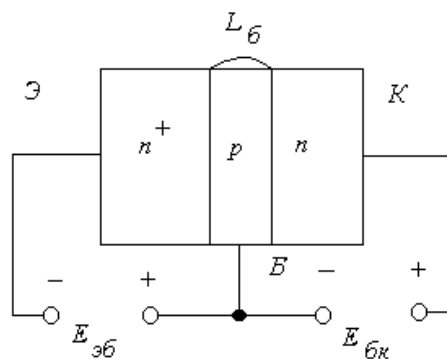


Рис. 7.1.

что происходит взаимное их влияние, вследствие чего они усиливают электрические сигналы.

Как показано на рис. 7.1, это три области – п-, р- и п. (В принципе может быть и наоборот: р-, п-, р-; все рассуждения относительно такого транзистора будут одинаковы, различие только в полярностях напряжений, такой транзистор называется р-п-р, а мы для простоты будем рассматривать п-р-п, изображённый на рис.)

Итак, на рис.7.1. изображены три слоя: с электронной электропроводностью, причём сильной, что обозначает плюс - эмиттер, дырочной - база, и снова электронной, но более слабо легированной (концентрация электронов самая малая) – коллектор. Толщина базы, т.е. расстояние между двумя р-п переходами, равно  $L_b$ , очень мала. Она должна быть меньше диффузионной длины электронов в базе. Это от единиц до десятка мкм. Толщина базы должна быть не более единиц мкм. (Толщина человеческого волоса 20-50 мкм. Отметим также, что это близко к пределу разрешения человеческого глаза, так как мы не можем видеть ничего меньшего, чем длина волны света, т.е. примерно 0,5 мкм). Все остальные размеры транзистора не более примерно 1 мм.

К слоям прикладывают внешнее напряжение так, что эмиттерный р-п переход смещён в прямом направлении, и через него протекает большой ток, а коллекторный р-п переход смещён в противоположную сторону, так что через него не должен протекать ток. Однако вследствие того, что р-п переходы расположены близко, они влияют друг на друга, и картина меняется: ток электронов, прошедший из эмиттерного р-п перехода, протекает дальше, доходит до коллекторного р-п перехода и электрическим полем последнего электроны втягиваются в коллектор. В результате у хороших транзисторов практически весь ток коллектора равен току эмиттера. Потери тока очень незначительны: проценты и даже доли процента.

Рассмотрим более внимательно составляющие токов в

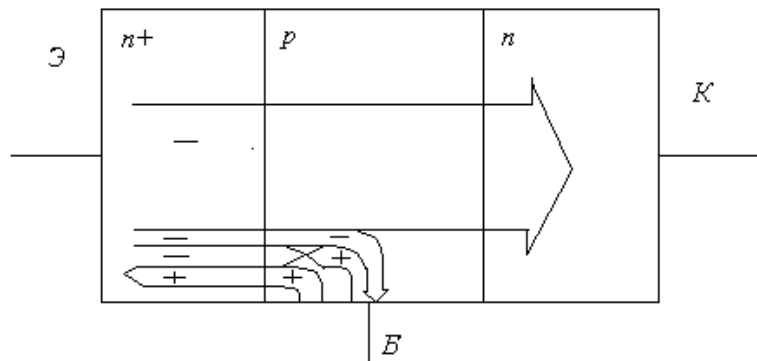


Рис. 7.2.

биполярном транзисторе п-р-п типа. Это изображено на рис.7.2.

Верхний ток (большая толстая стрелка с минусом) – это ток электронов из эмиттера в коллектор. В эмиттере электронов много, поэтому этот ток большой. Когда электроны входят в базу, то дальше они движутся за счёт диффузии (электрического поля в базе нет) – слева электронов много, а справа – мало. Значит, они движутся слева направо. А в конце базы они попадают в область электрического поля коллекторного р-п перехода, которое вытягивает электроны из базы в коллектор. Так как это поле велико, концентрация электронов в базе непосредственно у коллекторного р-п перехода практически равна нулю. Поэтому градиент концентрации электронов в базе очень велик – слева их очень много, справа – почти нуль, а длина базы очень мала:

где  $n_0$  - концентрация электронов в базе слева (у

$$\text{градиент} = \frac{dn}{dx} = \frac{n_0 - 0}{l_b}$$

эмиттера), очень велика.

Поэтому диффузионный ток очень велик. А дрейфового тока нет.

На самом деле он есть, но очень маленький. Действительно, напряжение к базе прикладывается, но сбоку, и маленькое (не больше одного вольта). А напряжённость электрического поля рассчитывается как отношение напряжения к расстоянию, на котором это напряжение прикладывается. В нашем случае расстояние – это толщина транзистора в направлении, перпендикулярном направлению диффузионного тока, и эта толщина в 10...1000 раз больше  $L_b$ . Поэтому дрейфовый ток существенно меньше диффузионного, второй маленький электронный ток на рис. 7.2, который показан тоненькой линией, сворачивающей к базовому контакту.

Второй маленький ток электронов – это те электроны, которые встретились в базе с дырками и рекомбинировали. Дырки, необходимые для этого, могут притечь только из базового контакта, так как в коллекторе и в эмиттере их нет. Этот ток вначале обозначен минусом, а далее он встречается с дырочным током, который обозначен плюсом, и выходит из базового контакта (второй маленький точёк).

Третий маленький ток – это диффузионный ток дырок из базы в эмиттер. Он гораздо меньше диффузионного тока электронов (из эмиттера в базу), потому что электронов в эмиттере гораздо больше, чем дырок в базе (напомним, что эмиттер – наиболее сильно легированная область п-р-п транзистора). Это обозначено тоненьким дырочным током, который также может начаться только на базовом контакте, а заканчивается на эмиттерном контакте.

Итак, есть три маленьких тока, которые неизбежно должны проходить из базы в эмиттер: это дрейфовый ток электронов (мал по сравнению с диффузионным), ток рекомбинации (мал, потому что мала толщина базы) и дырочный ток диффузии (мал, потому что мала концентрация дырок в базе по сравнению с концентрацией электронов в эмиттере). И есть большой диффузионный ток электронов из эмиттера в базу, который идёт к коллекторному р-п переходу, и его электрическим полем протягивается в

коллектор. Отношение коллекторного тока к базовому – это главный коэффициент, который показывает усилительные возможности транзистора:

Так как  $I_k \gg I_b$ , эта величина большая, т.е. транзистор усиливает

$$\beta = \frac{I_k}{I_b}$$

ток. Обычно  $\beta$  составляет 10 – 300, в редких случаях (у очень широкополосных транзисторов)  $\beta$  может быть меньше (порядка 2...5), или больше, 5 000...10 000 у супербетатранзисторов.

Итак, у транзистора ток базы очень мал, поэтому ток эмиттера практически весь преобразуется в ток коллектора, и только небольшая часть его преобразуется в ток базы:

$$I_{\text{э}} = I_k + I_b \quad I_b \ll I_{\text{э}}, I_k$$

Конечно,  $\alpha$  очень близко к единице, но  $\alpha < 1$ .

$$\beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

Итак, понятно, откуда берётся усиление в транзисторе по току: если к базе прикладывать маленький ток, то в эмиттере и коллекторе будут протекать токи, в  $\beta$  большие.

Но в электронике гораздо чаще используются усилители по напряжению. Как это получается?

Обычно управляют транзистором, прикладывая ток или напряжение к эмиттерному р-п переходу, смещённому в прямом направлении. При этом падение напряжения на нём не очень велико – порядка контактной разности потенциалов 0,6...0,7 В. А значит, переменная часть напряжения вообще лежит в пределах 0,1 В.

Выходной ток, которым является ток коллектора, вообще не зависит от напряжения на коллекторе, если только оно нулевое или обратное (чтобы в коллекторном р-п переходе было тянущее поле). Поэтому если подключить коллектор к источнику напряжения через сопротивление, то ток  $I_k$ , протекающий через это сопротивление и зависящий только от напряжения на

входе, будет выделять напряжение на этом сопротивлении, тем большее, чем больше сопротивление.

Ясно, что максимальное выходное напряжение равно напряжению источника  $E_n$ , которое может быть 5...15 В, или даже больше. Пусть  $E_n=10 В$ , тогда

$$K_{\text{макс}} = E_n / U_{\text{вх}} = 10 В / 0,1 В = 100$$

Итак, мы поняли, из-за чего возникает коэффициент усиления по напряжению. Теперь рассмотрим это более подробно с учётом конкретных схем включения транзистора.

Обычно в схемах биполярные транзисторы изображаются так:

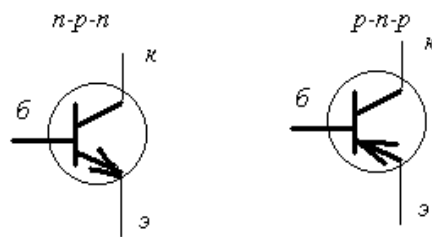


Рис. 7.3.

## 7.2. Полевые транзисторы

К другим устройствам с тремя слоями п- и р-типа относятся полевые транзисторы.

Полевые транзисторы с р-п переходом.

Конструкция этих транзисторов представлена на рис. 7.10.

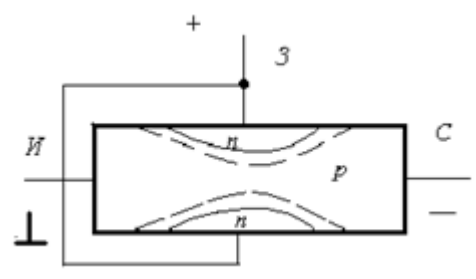


Рис. 7.10.

Как видно, здесь тоже три слоя: п-, р-, и п-типа (может быть и наоборот: р-, п-, и р-тип). Между стоком (на рис. 7.10. обозначен как С) и истоком (И) прикладывается напряжение, такое, что заряды (в данном случае дырки) вытекают из истока и втекают в сток. Значит, к стоку прикладывается отрицательное напряжение, исток заземляется. Из-за наличия р-п переходов область канала сужается, причём на самом деле даже больше, так как р-п переход толстый, у него есть область объёмного заряда (ООЗ), отмеченная на рис. пунктирной линией. К затвору (З) прикладывается положительное напряжение, так что р-п переходы смещены в обратном направлении, и ООЗ расширяется, а ширина канала сужается. Это приводит к уменьшению тока канала (потока зарядов от истока к стоку) – это регулировка тока, которая и даёт режим усиления.

Это транзистор с каналом р-типа. При обратных типах слоёв получится транзистор с каналом п-типа. У него всё также, только в канале протекают электроны, к стоку прикладывается плюс, а к затвору – минус.

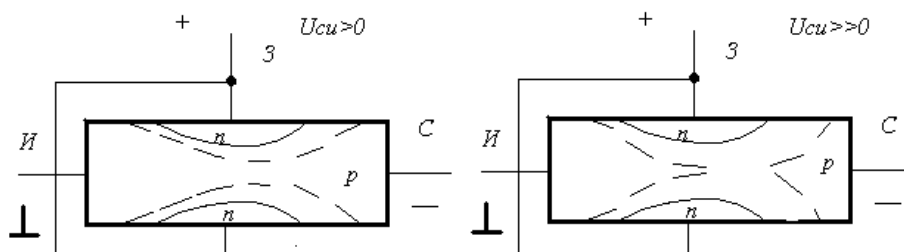
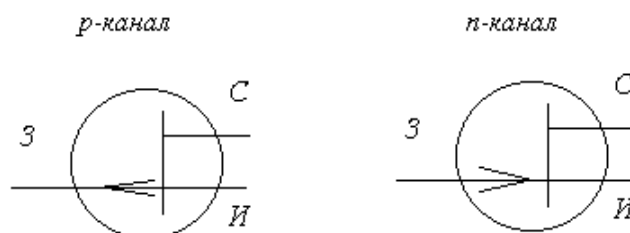


Рис. 7.11.

На схемах полевые транзисторы изображаются так:

Рис. 7.14.



### Полевые транзисторы МДП

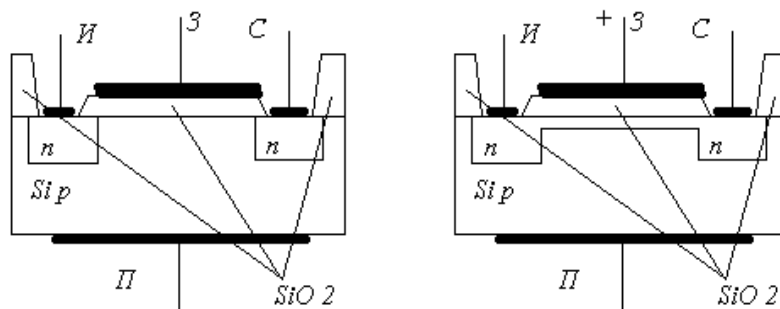
Полевые транзисторы металл-диэлектрик-полупроводник (МДП), или по другому металл-оксид-полупроводник (МОП) сильно отличаются от последних рассмотренных как по принципу действия, так и по технологии изготовления. Но конечные данные (переходные и выходные характеристики) у них очень похожи на кривые последних графиков.

Рассмотрим, например, полупроводник (кремний, германий) p-типа электропроводности (Рис. 7.17). Будем считать, что на него нанесён тонкий слой диэлектрика (чаще других выращивается оксид кремния на кремнии). Толщина диэлектрика должна быть очень малой. Если в технологии полупроводников используются защитные слои оксида толщиной от 1 до 2...3 мкм, то мы будем считать, что толщина диэлектрика лежит в пределах 0,1...0,3 мкм.

А сверху на диэлектрике нанесён слой металла. Между металлом и полупроводником приложено электрическое поле.

В случае тонкого диэлектрика электрическое поле легко проникает в полупроводник. Что внесёт это поле в полупроводник, легко понять из исследования зонных диаграмм:

Рис. 7.17.



На рис.7.18 изображены три зависимости энергии электрона от координаты. Слева представлен случай, когда к металлу (обозначен буквой М) приложено отрицательное по отношению к полупроводнику напряжение. Оно притягивает к поверхности полупроводника дырки, а электроны отталкивает. Иными словами, зонная диаграмма изгибается вверх, и при установлении равновесия дырок у поверхности станет ещё

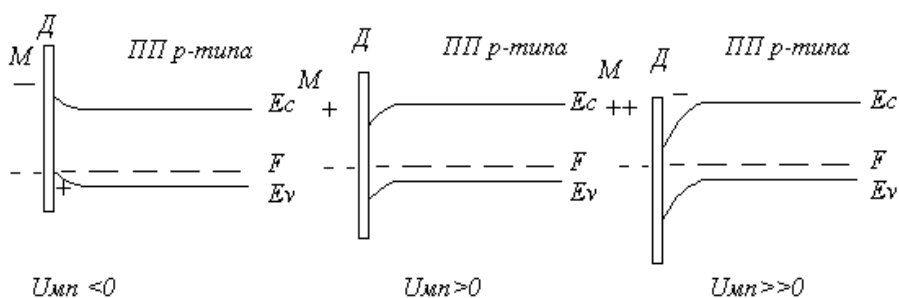


Рис. 7.18

больше, чем было в исходном полупроводнике.

На среднем рисунке изображена диаграмма в случае, когда к металлу относительно полупроводника приложено положительное напряжение, зоны изогнуты вниз. Дырок у поверхности стало меньше, чем в глубине, а электронов – больше. Но пока дырок у поверхности больше, чем электронов.

На правом рис. 7.18. ситуация кардинально изменилась: напряжение снова положительное, но уже достаточно большое, чтобы электронов у

поверхности стало больше, чем дырок. Полупроводник разделился на две области: в глубине это по-прежнему р-тип, а вблизи поверхности – п-тип (произошла инверсия типа электропроводности).

Теперь рассмотрим конструкцию, изображённую на рис. 7.17 слева. Это полупроводник (например кремний) р-типа, в котором сделаны две области п-типа. Сверху кроме защитного слоя диоксида кремния нанесён ещё тонкий слой диоксида кремния между п-областями. Если теперь подать напряжение между стоком и истоком, то ничего не произойдёт: ток не появится, так как при любом знаке напряжения хоть один из р-п переходов смещён в обратном направлении (это как в биполярном транзисторе при очень толстой базе – два р-п перехода отдельно).

А теперь давайте подадим положительное напряжение на затвор относительно подложки (справа). Если это напряжение больше некоторого, так называемого порогового ( $U_{п}$ ), то дырки оттолкнутся от поверхности вглубь полупроводника, а электроны притянутся к поверхности, и их станет больше, чем дырок – вблизи поверхности появится наведённый (индуцированный) слой п-типа. Этот слой соединит две исходные области п-типа, и между стоком и истоком появится ток. Говорят, что образовался канал п-типа.

Ниже показаны схематичные изображения МОП полевого транзистора с п-каналом (слева) и с р-каналом (справа).

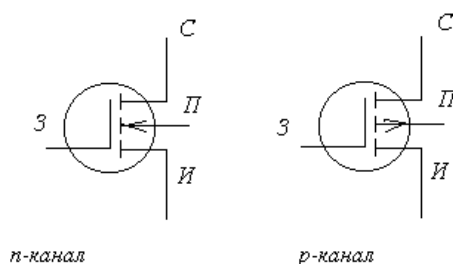


Рис. 7.22.

Такие транзисторы называются МОП транзисторы с индуцированным каналом. Можно, однако, перед тем, как делать подзатворный диэлектрик, провести ещё одну диффузию доноров для п-канальных транзисторов или акцепторов для р-канальных транзисторов, чтобы создать встроенный канал. тогда характеристики будут выглядеть так:

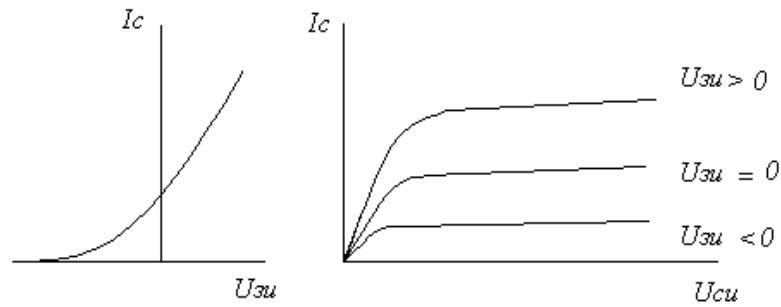


Рис. 7.23.

Теперь у транзистора есть ток даже при нулевом напряжении на затворе, и есть возможность управлять им, т.е. получать усиление. Обозначаются такие транзисторы почти также, как и транзисторы с индуцированным каналом:

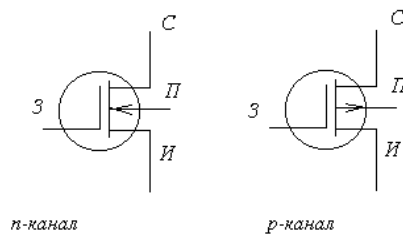


Рис. 7.24.

**Контрольные вопросы**

8. Как формулируются законы Кирхгофа?
9. Как формулируется закон баланса мощности?
10. Какие электрические величины можно определить, используя 1 закон Кирхгофа?
11. Как определить внутреннее сопротивление источника сигнала?

12. Что такое активный двухполюсник?
13. В чем заключается метод эквивалентного генератора?
14. Что значит рассчитать электрическую схему?
15. Что такое реактивное сопротивление?
16. Как учитываются фазовые соотношения между током и напряжением в электрической цепи?
17. Что такое комплексное сопротивление?
18. Что такое топографическая диаграмма?

Краткие ответы на контрольные вопросы необходимо включить в контрольную работу и сдать перед экзаменом.

Ст. преподаватель каф. ПГ и ТГР Кобыльский Владимир Анатольевич.

