

Забайкальский государственный университет

Беломестнова В.Р., Забелин А.А.,
Кононенко Н.В., Степанова Л.Э.

**ОСНОВЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ**

Практикум

Чита, 2017

УДК 51(075.8)

ББК 22.1я73

Б-43

Б-43 Беломестнова В.Р. Основы математической обработки информации : Практикум / В.Р. Беломестнова, А.А. Забелин, Н.В. Кононенко, Л.Э. Степанова. — Чита, Издательство ЗабГУ, 2017. — 180 с.

Практикум содержит материал для проведения семинарских (практических) занятий по дисциплине «Основы математической обработки информации» и адресовано студентам, обучающимся по направлениям 44.03.01 «Педагогическое образование», 44.03.02 «Психолого-педагогическое образование», 44.03.03 «Специальное (дефектологическое) образование», 44.03.04 «Профессиональное обучение (по отраслям)», 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)».

Рецензенты:

Трухина Л.И., к.ф.-м.н., доцент кафедры информатики и математики ЧИ БГУ,

Васяк Л.А., к.п.н., и.о. зав. кафедрой высшей математики и прикладной информатики ЗаБИЖТ ИрГУПС.

© Беломестнова В.Р., Забелин А.А., Кононенко Н.В., Степанова Л.Э., 2017

© ЗабГУ, 2017

Содержание

Введение	4
1. Элементы математической логики	5
2. Множества и теоретико-множественные операции	24
3. Элементы комбинаторики	37
4. Случайные события и их вероятности	56
5. Схема Бернулли	94
6. Случайные величины и их числовые характеристики	107
7. Непрерывные распределения	126
8. Первичная обработка выборочных данных	141
9. Исследование взаимосвязей между случайными величинами ..	165
Заключение	180
Библиография	181

Введение

Обратимся к профессиональному стандарту педагога (утвержден приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 18 октября 2013 г. N 544н). В нем говорится, что одним из трудовых действий учителя средней школы, педагога среднего профессионального и высшего образования является систематический анализ эффективности учебных занятий и подходов к обучению, объективная оценка знаний обучающихся на основе тестирования и других методов контроля в соответствии с реальными учебными возможностями детей. Данное действие предполагает, что педагог умеет подобрать необходимые средства оценки учебных достижений своих подопечных, умеет провести обработку собранных данных и анализ результатов. Все эти умения базируются на понимании теоретических основ сбора данных, их обработки и анализа, а также на сформированных умениях и навыках по статистическому анализу данных. Изучение дисциплины «Основы математической обработки информации» способствует формированию компетенций в области готовности использования систематизированных знаний и умений для решений исследовательских задач, для анализа своей деятельности и деятельности своих обучающихся. Это обосновывает актуальность создания данного практикума.

Практикум содержит элементы теории, проверочные вопросы по теории, разобранные типовые задачи, задачи для самостоятельного решения, а также варианты контрольных работ по каждому рассмотренному разделу дисциплины.

1. Элементы математической логики

1.1. Основы теории

Высказывание — это предложение, которое либо истинно, либо ложно. Например, высказывание «Москва — столица России» является истинным, а высказывание «Волга впадает в Черное море» — ложным. Вопросительные и восклицательные предложения высказываниями не являются, поскольку говорить об их истинности или ложности нет смысла. Например, предложения «История — интересный предмет!», «Который час?» не являются высказываниями. Предложение « $x < 3$ » также не является высказыванием, так как нельзя сказать истинно оно или ложно.

Высказывания, состоящие из одного утверждения, называются **элементарными**. Для обозначения элементарных высказываний используются заглавные буквы латинского алфавита или буквы с индексами внизу. Например, $A \equiv «3 < 8»$, $A_1 \equiv «Январь — первый месяц весны»$.

Истинному высказыванию сопоставляется символ 1, а ложному — символ 0.

Рассмотрим функцию λ , заданную на множестве всех высказываний и принимающую значения в двухэлементном множестве $\{0, 1\}$:

$$\lambda(P) = \begin{cases} 1, & \text{если высказывание } P \text{ истинно,} \\ 0, & \text{если высказывание } P \text{ ложно.} \end{cases}$$

Функция λ называется **функцией истинности**, а значение $\lambda(P)$ — **значением истинности высказывания** P . Для приведенных выше высказываний имеем значения истинности: $\lambda(A) = 1$, $\lambda(A_1) = 0$.

Из элементарных высказываний с помощью **логических**

операций (отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность) составляются новые высказывания, которые называются **составные высказывания**. Логические операции над высказываниями определяются с помощью таблиц истинности.

Отрицанием высказывания A называется высказывание, обозначаемое \bar{A} или $\neg A$, которое истинно, если исходное высказывание A ложно, и ложно, если высказывание A истинно. Читается: «не A » или «не верно, что A ». Таблица истинности операции «отрицание»:

A	\bar{A}
0	1
1	0

Конъюнкцией двух высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое $A \wedge B$ или $A \& B$, которое истинно тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания A и B истинны. Читается: « A и B ». Таблица истинности операции «конъюнкция»:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Дизъюнкцией двух высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое $A \vee B$, которое истинно тогда, когда хотя бы одно из высказываний A или B истинно. Читается: « A или B ».

Таблица истинности операции «дизъюнкция»:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Импликацией двух высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое $A \rightarrow B$, которое ложно в единственном случае, когда первое высказывание A — истинно, а второе высказывание B — ложно. Читается: «если A , то B » или «из A следует B », « A влечёт B », « A является необходимым условием для B », « B является достаточным условием для A ». Таблица истинности операции «импликация»:

A	B	$A \rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Эквивалентностью (эквиваленцией) двух высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое $A \leftrightarrow B$, которое истинно в том и только том случае, когда оба высказывания A и B либо одновременно истинны, либо одновременно ложны. Читается « A эквивалентно B » или « A необходимо и достаточно для B » или « A тогда и только тогда, когда

B». Таблица истинности операции «эквивалентность»:

<i>A</i>	<i>B</i>	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Назовём **неопределённым высказыванием (предикатом)** предложение $P(x_1, x_2, \dots)$, зависящее от переменных x_1, x_2, \dots , и становящееся высказыванием, если переменным подставить некоторые конкретные значения из заданных множеств X_1, X_2, \dots , соответственно.

Для того, чтобы сделать предикат высказыванием, могут применяться кванторы.

Квантор всеобщности: \forall . Он читается «для любого», «для каждого», «для всех».

Квантор существования: \exists . Он читается «существует», «найдётся».

Дадим пример высказывания с кванторами и неопределённым высказыванием от двух переменных. Пусть X и Y — некоторые множества, $x \in X$, $y \in Y$. Пусть $P(x, y)$ — некоторое неопределённое высказывание. Тогда можно сформировать следующие ниже высказывания.

$$\forall x \in X \forall y \in Y (P(x, y))$$

эта запись читается так: «для любого x из множества X и для любого y из множества Y выполняется $P(x, y)$ »

$$\exists x \in X \exists y \in Y (P(x, y))$$

эта запись читается так: «существует x из множества X и существует y из множества Y такие, что выполняется $P(x, y)$ »

$$\forall x \in X \exists y \in Y (P(x, y))$$

эта запись читается так: «для любого x из множества X найдётся y из множества Y такой, что выполняется $P(x, y)$ »

$$\exists x \in X \forall y \in Y (P(x, y))$$

эта запись читается так: «существует x из множества X такой, что для любого y из множества Y выполняется $P(x, y)$ »

Интересно строится отрицание высказываний с кванторами, а именно, кванторы меняются на противоположные, и к неопределённому высказыванию строится противоположное:

$$\overline{\forall x \in X (P(x))} \equiv \exists x \in X (\overline{P(x)}),$$

$$\overline{\exists x \in X (P(x))} \equiv \forall x \in X (\overline{P(x)}).$$

1.2. Контрольные вопросы

1. Что представляет собой высказывание?
2. Какие операции можно производить с высказываниями?
3. Составьте таблицы истинности логических операций?
4. Сформулируйте основные законы алгебры высказываний.

1.3. Типовые задачи

Задача 1. Найти отрицание к высказыванию $A \equiv$ «Волга — река».

Решение. Получим высказывание $\bar{A} \equiv$ «Волга — не река», которое ложно, так как истинно высказывание A .

Задача 2. Применить операцию конъюнкции к высказываниям $A \equiv \langle 45 < 56 \rangle$ и $B \equiv \langle 2 < 1 \rangle$.

Решение. Получим высказывание $A \wedge B \equiv \langle 45 < 56 \text{ и } 2 < 1 \rangle$. Данное высказывание ложно, так как высказывание A истинно, а высказывание B ложно.

Задача 3. Применить операцию дизъюнкции к высказываниям $A \equiv \langle 45 < 56 \rangle$ и $B \equiv \langle 2 < 1 \rangle$.

Решение. Получим высказывание: $A \vee B$: $\langle 45 < 56 \text{ или } 2 < 1 \rangle$. Данное высказывание истинно, так как истинно высказывание A .

Задача 4. Применить операцию импликации к высказываниям $A \equiv \langle 45 < 56 \rangle$, $B \equiv \langle 2 < 1 \rangle$.

Решение. Получим высказывание $A \rightarrow B \equiv \langle \text{Если } 45 < 56, \text{ то } 2 < 1 \rangle$. Данное высказывание ложно, так как первое высказывание A — истинно, а второе высказывание B — ложно.

Задача 5. Применить операцию эквивалентности к высказываниям $A \equiv \langle 7 > 4 \rangle$ и $B \equiv \langle \text{Вертикальные углы равны} \rangle$.

Решение. Получим высказывание $A \leftrightarrow B \equiv \langle 7 > 4 \text{ тогда и только тогда, когда Вертикальные углы равны} \rangle$. Данное высказывание истинно, так как истинны оба высказывания A и B .

Задача 6. Построить таблицу истинности для высказывания $C \equiv (A \rightarrow \bar{B}) \leftrightarrow (\bar{A} \rightarrow B)$.

Решение. Идея такова: надо, как и в вычислении арифметических выражений, разбить большое высказывание на действия, и вычислять истинность этих действий последовательно. Имеет место приоритет операций: сначала выполняются операции в скобках, а если скобок нет, то сначала вычисляются отрицания (если они сами не берутся от составных выражений), затем конъюнкция, дизъюнкция, и, в последнюю очередь, импликация и эквиваленция. В нашем случае таблица истинности будет

такова:

A	B	\bar{A}	\bar{B}	$A \rightarrow \bar{B}$	$\bar{A} \rightarrow B$	$(A \rightarrow \bar{B}) \leftrightarrow (\bar{A} \rightarrow B)$
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0

1.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Укажите, какие из следующих предложений являются высказываниями и определите их значения истинности:

- 1) С Новым годом!
- 2) $6 + 5 = 12$.
- 3) Число слов в этом предложении равно семи.
- 4) Мы сегодня идем в кино?
- 5) $\sqrt{2}$.
- 6) В этой фразе двадцать восемь букв.
- 7) 14 делится на 2.
- 8) $7 + 4$.
- 9) Существует наибольшее натуральное число.
- 10) Осень — лучшая пора года!
- 11) В городе Чита более 100000 жителей.
- 12) Ни одно русское слово не содержит более двух одинаковых гласных подряд.

2. Определите значения истинности следующих составных высказываний:

- 1) Лондон расположен на реке Сена и $2 + 3 = 5$.
- 2) 3 — простое число и 3 — простое число.

- 3) 1 — простое число или 2 — простое число.
- 4) Число 2 — четное или белые медведи живут в Африке или $2 < 5$.
- 5) Если Париж расположен на реке Сена, то Австралия находится в северном полушарии.
- 6) Если Австралия находится в северном полушарии, то Париж расположен на реке Сена.
- 7) Если $1 = 0$, то $2 = 1$.
- 8) 15 делится на 5 тогда и только тогда, когда 15 делится на 3.
- 9) 5 — четное число тогда и только тогда, когда 12 — четное число.

3. Сформулируйте отрицания следующих высказываний; укажите значения истинности данных высказываний и их отрицаний:

- 1) Волга впадает в Каспийское море.
- 2) 28 не делится на 7.
- 3) $6 > 3$.
- 4) $4 \leq 5$.
- 5) Все простые числа нечетные.
- 6) Диагонали прямоугольника не равны между собой.

4. Найдите значение истинности высказывания «Если сегодня вторник, то завтра суббота» в каждый из дней недели.

5. Определите значения истинности высказываний A , B , C и D в следующих предложениях, из которых первые два истинны, а последние два ложны:

- 1) Если 4 — четное число, то A .
- 2) Если B , то 4 — нечетное число.
- 3) Если 4 — четное число, то C .
- 4) Если D , то 4 — нечетное число.

6. Следующие составные высказывания расчлените на элементарные и запишите символически, используя буквы для обозначения

элементарных высказываний:

- 1) Идет дождь или кто-то не выключил душ.
- 2) Если вечером будет туман, то я останусь дома или возьму такси.
- 3) Если последовательность монотонна и ограничена сверху, то она имеет предел.
- 4) Матрица обратима тогда и только тогда, когда она невырождена.
- 5) Последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.
- 6) «Заяц» платит штраф за безбилетный проезд тогда и только тогда, когда его поймал контролер и этот контролер настойчив, и «заяц» не забыл дома кошелек.
- 7) Если ты холост, то ты рискуешь жениться, а если ты женат, то ты волен развестись, и так как ты холост или женат, то ты всегда можешь изменить свое семейное положение.

7. Установить, являются ли истинными или ложными следующие высказывания:

- 1) $A \equiv$ «Число 54 делится на 2 или на 3»;
- 2) $B \equiv$ «Число 54 делится на 2 и на 3»;
- 3) $C \equiv$ «Число 27 делится на 2 или на 3»;
- 4) $D \equiv$ «Число 27 делится на 2 и на 3».

8. Даны два высказывания A и B . Определить, является истинным или ложным высказывание $C \equiv A \rightarrow B$, если:

- 1) $A \equiv$ « $5 > 3$ », $B \equiv$ « $6 > 4$ »;
- 2) $A \equiv$ « $5 < 3$ », $B \equiv$ « $6 < 4$ »;
- 3) $A \equiv$ « $5 < 3$ », $B \equiv$ « $6 > 4$ »;
- 4) $A \equiv$ « $5 > 3$ », $B \equiv$ « $6 < 4$ ».

9. С помощью таблиц истинности доказать следующие свойства операций над высказываниями:

- 1) $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$;
- 2) $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$;
- 3) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
- 4) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;
- 5) $\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$;
- 6) $\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$.

10. Выяснить смысл высказывания \bar{A} , если:

- 1) $A \equiv$ «Число 377175 делится на 7 и на 3»;
- 2) $A \equiv$ «Число 377175 делится на 7 или на 3»;
- 3) $A \equiv$ «Если число 377175 делится на 49, то оно делится на 7».

11. Даны два высказывания: $A \equiv$ «Число $2^{222} - 1$ делится на 15»; $B \equiv$ «Число $2^{222} - 1$ делится на 3». Выяснить является ли истинным высказывание $C \equiv A \rightarrow B$.

12. Даны два высказывания: $A \equiv$ «Число $24^{100} - 1$ делится на 93» и $B \equiv$ «Число $24^{100} - 1$ делится на 21». Выяснить является ли истинным высказывание $C \equiv A \rightarrow B$.

13. Истинно ли высказывание $A \equiv$ «Если число 1917^{1941} делится на 1941^2 , то оно делится на 1941»? Выяснить смысл высказывания \bar{A} .

14. Истинно ли высказывание $A \equiv$ «Если $1921^{1925} > 1925^{1921}$, то $1921^{1925} + 1 > 1925^{1921} + 1$ »? Выяснить смысл высказывания \bar{A} .

15. С помощью таблицы истинности проверить, верны ли равенства:

- 1) $A \rightarrow (B \vee C) \equiv (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$;
- 2) $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \rightarrow C$.

16. Упростить формулы:

- 1) $\bar{A} \wedge B \rightarrow (A \vee (\bar{B} \rightarrow A))$;
- 2) $\overline{A \rightarrow B} \vee (B \leftrightarrow A) \vee \overline{A \wedge B}$.

17. На столе в приёмной комиссии института перед абитуриентом стоят две коробки. В каждой из них лежит либо табличка «Принят»,

либо табличка «Не принят». На крышках коробок написано: «В обеих коробках лежит по табличке «Принят»». Известно, что если в первой коробке находится табличка «Принят», то надпись на коробке истинна, если же там находится табличка «Не принят», то надпись на коробке ложна. Что касается второй коробки, то там всё наоборот: если в ней находится табличка «Принят», то надпись на коробке ложна, если же там табличка «Не принят», то надпись на коробке истинна. Какие таблички находятся в коробках?

18. На столе в приёмной комиссии института перед абитуриентом стоят две коробки. В каждой из них лежит либо табличка «Принят», либо табличка «Не принят». На крышке первой коробки написано: «В этой коробке лежит табличка «Не принят» или в другой коробке лежит табличка «Принят»». На крышке второй коробки написано: «В другой коробке находится табличка «Принят»». Известно, что надписи либо одновременно истинны, либо одновременно ложны. Какие таблички находятся в коробках?

19. Записать с помощью кванторов следующие высказывания и установить, истинны они или ложны:

- 1) Если некоторое число делится на 6, то оно делится на 3;
- 2) Существует число большее 10, но меньшее 9.

20. Выяснить, истинны или ложны следующие высказывания:

- 1) $\forall x \in \mathbb{R} ((x > 2) \vee (x < 2))$;
- 2) $\exists x \in \mathbb{R} ((x < 10) \wedge (x > 9))$.

21. Построить отрицания следующих высказываний и установить, истинны они или ложны:

- 1) $\forall x \in \mathbb{R} ((x > 2) \vee (x < 2))$;
- 2) $\exists x \in \mathbb{R} ((x < 10) \wedge (x > 9))$.

22. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции, заданные на

подмножестве множества вещественных чисел $X \subseteq \mathbb{R}$ и пусть $A(x) \equiv |f(x)| \leq g(x)$, $B(x) \equiv f(x) \leq g(x)$, $C(x) \equiv f(x) \geq -g(x)$ — неопределённые высказывания, заданные на X . Доказать истинность высказывания

$$\forall x \in X (A(x) \leftrightarrow (B(x) \wedge C(x))).$$

23. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции, заданные на подмножестве множества вещественных чисел $X \subseteq \mathbb{R}$ и пусть $A(x) \equiv |f(x)| \geq g(x)$, $B(x) \equiv f(x) \geq g(x)$, $C(x) \equiv f(x) \leq -g(x)$ — неопределённые высказывания, заданные на X . Доказать истинность высказывания

$$\forall x \in X (A(x) \leftrightarrow (B(x) \vee C(x))).$$

24. Выяснить смысл приведённых высказываний и установить истинны они или ложны:

- 1) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} (x + y = 3)$;
- 2) $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} (x + y = 3)$;
- 3) $\forall x \in \mathbb{R} ((x \leq 1) \rightarrow (x^2 \leq x))$;
- 4) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} ((\exists x \in \mathbb{R} (ax^2 + bx + c = 0)) \leftrightarrow (b^2 - 4ac \geq 0))$;
- 5) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} (((a \neq 0) \wedge (\exists x \in \mathbb{R} (ax^2 + bx + c = 0))) \leftrightarrow (b^2 - 4ac \geq 0))$.

25. Выяснить смысл приведённых высказываний и установить истинны они или ложны:

- 1) $\exists x, y \in \mathbb{R} (x + y = 3)$;
- 2) $\forall x, y \in \mathbb{R} (x + y = 3)$;
- 3) $\forall x, y \in \mathbb{R} ((x < y) \leftrightarrow (\exists z \in \mathbb{R} (x < y < z)))$;
- 4) $\forall x \in \mathbb{R} ((x^2 > 1) \leftrightarrow ((x > 1) \vee (x > 0)))$;
- 5) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} ((\forall x \in \mathbb{R} (ax^2 + bx + c \neq 0)) \leftrightarrow (b^2 - 4ac < 0))$.

26. Натуральное число n является составным тогда и только тогда, когда оно имеет делители, отличные от 1 и самого себя. Записать с помощью кванторов это определение.

27. Записать с помощью кванторов это неопределённое высказывание $A(m, n)$, заданное на множестве натуральных чисел:

$A(m, n) \equiv$ «Числа m и n не имеют общих делителей, отличных от 1».

28. «Натуральное число называется простым, если оно имеет ровно два различных делителя». Записать с помощью кванторов это определение.

29. Записать символически с помощью кванторов высказывание, заданное на множестве целых чисел: $A(z) \equiv$ «Для всякого натурального числа b найдутся целые числа q и r такие, что $0 \leq r < b$ и $z = bq + r$ ».

30. Верны ли следующие высказывания?

$T_1 \equiv$ «Для того чтобы произведение двух чисел было положительным, необходимо, чтобы оба числа были положительны»;

$T_1 \equiv$ «Для того чтобы произведение двух чисел было положительным, необходимо, чтобы оба числа были положительны»;

$T_1 \equiv$ «Для того чтобы через две прямые в пространстве можно было провести плоскость, необходимо, чтобы прямые пересекались»;

$T_1 \equiv$ «Для того чтобы через две прямые в пространстве можно было провести плоскость, достаточно, чтобы прямые пересекались»;

$T_1 \equiv$ «Для того чтобы через две прямые в пространстве можно было провести плоскость, необходимо, чтобы прямые пересекались или были параллельны».

31. Сформулируйте следующие теоремы в виде « B необходимо для A » и « A достаточно для B »:

$T_1 \equiv$ «Если треугольник равносторонний, то он равнобедренный»;

$T_1 \equiv$ «Если все углы треугольника равны между собой, то треугольник равносторонний».

32. Сформулируйте отрицание следующих высказываний:

$T_1 \equiv$ «Если некоторое число не делится на 7, то оно не делится на 21»;

$T_1 \equiv$ «Найдётся квадрат, который не является параллелограммом».

33. Сформулировать и записать символически с помощью кванторов теорему: «Если суммы противоположных внутренних углов четырёхугольника равны между собой, то около него можно описать окружность».

Сформулировать утверждения: обратное, противоположное и противоположное обратному данной теоремы.

34. Сформулировать утверждения, являющиеся обратными, противоположными и противоположными обратным данных теорем, а также отрицание следующих теорем:

- 1) всякое простое число, не равное 2, нечётно;
- 2) если квадрат натурального числа делится на некоторое простое число, то и само число делится на это простое число;
- 3) диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам;
- 4) через две пересекающиеся прямые проходит плоскость и притом только одна.

1.5. Контрольные задания

1.5.1. Контрольная работа №1.

Вариант 1.

1. Решить задачу, составив логическое уравнение. На столе в приёмной комиссии института перед абитуриентом стоят две коробки. В каждой из них лежит либо табличка «Принят», либо табличка «Не принят». На крышке первой коробки написано: «По крайней мере, в одной из коробок лежит табличка «Принят», на крышке второй: «В другой коробке находится табличка «Принят»». Причём известно, что если в первой коробке находится табличка «Принят», то надпись

на коробке истинна, если же там находится табличка «Не принят», то надпись коробке ложна. Что касается второй коробки, то там всё наоборот: если в ней находится табличка «Принят», то надпись на коробке ложна, если в ней находится табличка « Не принят», то надпись на коробке истинна. Какие таблички находятся в коробках?

2. Записать высказывание A в не символическом виде, построить его отрицание и выяснить, какое из высказываний A или \bar{A} истинно.

$$A \equiv \forall a, b, c \in \mathbb{R} (\forall x \in \mathbb{R} (ax^2 + bx + c > 0) \rightarrow ((b^2 - 4ac < 0) \wedge (a > 0)))$$

Вариант 2.

1. Решить задачу, составив логическое уравнение. На столе в приёмной комиссии института перед абитуриентом стоят две коробки. В каждой из них лежит либо табличка «Принят», либо табличка «Не принят». На крышке первой коробки написано: «По крайней мере, в одной из коробок лежит табличка «Принят», на крышке второй: «В другой коробке находится табличка «Не принят»». Известно, что надписи либо одновременно истинны, либо одновременно ложны. Какие таблички находятся в коробках?

2. Записать высказывание A в не символическом виде, построить его отрицание и выяснить, какое из высказываний A или \bar{A} истинно.

$$A \equiv \forall a, b, c \in \mathbb{R} (\forall x \in \mathbb{R} (ax^2 + bx + c < 0) \rightarrow ((b^2 - 4ac < 0) \wedge (a < 0)))$$

Вариант 3.

1. Решить задачу, составив логическое уравнение. На столе в приёмной комиссии института перед абитуриентом стоят две коробки. В каждой из них лежит либо табличка «Принят», либо табличка «Не принят». На крышке первой коробки написано: «По крайней мере, в одной из коробок лежит табличка «Не принят», на крышке второй: «В

другой коробке находится табличка «Не принят». Причём известно, что если в первой коробке находится табличка «Принят», то надпись на коробке ложна, если же там находится табличка «Не принят», то надпись на коробке истинна. Что касается второй коробки, то там всё наоборот: если в ней находится табличка «Принят», то надпись на коробке истинна, если же там находится табличка «Не принят», то надпись на коробке ложна. Какие таблички находятся в коробках?

2. Записать высказывание A в не символическом виде, построить его отрицание и выяснить, какое из высказываний A или \bar{A} истинно.

$$A \equiv \exists b \in \mathbb{R} \forall a \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} (x^2 + ax + b = 0)$$

Вариант 4.

1. Решить задачу, составив логическое уравнение. На столе в приёмной комиссии института перед абитуриентом стоят две коробки. В каждой из них лежит либо табличка «Принят», либо табличка «Не принят». На крышке первой коробки написано: «По крайней мере, в одной из коробок лежит табличка «Не принят», на крышке второй: «В другой коробке находится табличка «Принят». Известно, что надписи либо одновременно истинны, либо одновременно ложны. Какие таблички находятся в коробках?

2. Записать высказывание A в не символическом виде, построить его отрицание и выяснить, какое из высказываний A или \bar{A} истинно.

$$A \equiv \forall b \in \mathbb{R} \exists a \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} (x^2 + ax + b = 0)$$

1.5.2. Контрольная работа №2.

Вариант 1.

1. С помощью таблицы истинности установить, верно ли равенство:

$$A \vee (B \rightarrow C) \equiv (A \vee B) \rightarrow (A \vee C)$$

2. Построить отрицание формулы $(A \wedge \bar{B}) \vee (B \rightarrow A) \vee (A \wedge B)$ и упростить полученную формулу.

3. Записать символически с помощью кванторов следующее высказывание: Существуют три рациональных числа, сумма и произведением которых равны 1.

4. Записать символически с помощью кванторов следующую теорему: Если на плоскости две прямые перпендикулярны третьей, то они либо параллельны между собой, либо совпадают. Сформулировать (в не символическом виде) обратное, противоположное и противоположное обратному утверждения.

5. Построить отрицание обратного утверждения из предыдущей задачи и сформулировать в не символическом виде.

Вариант 2.

1. С помощью таблицы истинности установить, верно ли равенство

$$A \wedge (B \rightarrow C) \equiv (A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge C)$$

2. Построить отрицание формулы $(B \wedge \bar{A}) \vee (\bar{B} \wedge A) \vee (\overline{A \wedge B})$ и упростить полученную формулу

3. Записать символически с помощью кванторов следующее высказывание: В ряду натуральных чисел существуют 100 идущих подряд составных чисел.

4. Записать символически с помощью кванторов следующую теорему: Сумма внутренних углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ \cdot (n - 2)$. Сформулировать (в не символическом виде) обратное, противоположное и противоположное обратному утверждения.

5. Построить отрицание противоположного утверждения из предыдущей задачи и сформулировать в не символическом виде.

Вариант 3.

1. С помощью таблицы истинности установить, верно ли равенство

$$A \rightarrow (B \wedge C) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$$

2. Построить отрицание формулы $(B \wedge \bar{A}) \vee (B \rightarrow \bar{A}) \vee \overline{A \wedge B}$ и упростить полученную формулу

3. Записать символически с помощью кванторов следующее высказывание: В прямоугольном треугольнике, длины сторон которого выражаются натуральными числами, длины обоих катетов не могут быть нечётными числами.

4. Записать символически с помощью кванторов следующую теорему: Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость. Сформулировать (в не символическом виде) обратное, противоположное и противоположное обратному утверждения.

5. Построить отрицание обратному утверждению из предыдущей задачи и сформулировать в не символическом виде.

Вариант 4.

1. С помощью таблицы истинности установить, верно ли равенство

$$(B \rightarrow C) \wedge A \equiv (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$$

2. Построить отрицание формулы $(\bar{A} \wedge B) \vee (\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \vee \overline{A \wedge B}$ и упростить полученную формулу.

3. Записать символически с помощью кванторов следующее высказывание: Не существуют такого нечётного числа, сумма всех делителей которого в два раза больше его самого.

4. Записать символически с помощью кванторов следующую теорему: Диагонали ромба перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам. Сформулировать (в не символическом виде) обратное, противоположное и противоположное обратному утверждения.

5. Построить отрицание противоположного утверждения из предыдущей задачи и сформулировать в не символическом виде.

2. Множества и теоретико-множественные операции

2.1. Основы теории

Множество — первичное понятие математики, оно не определяется через другие понятия, а только поясняется. Под **множеством** понимают некоторую совокупность объектов произвольной природы, объединённых общим свойством или системой свойств. Так определил понятие множества немецкий математик Георг Кантор (1845 – 1918 гг.), основатель теории множеств.

Множества обычно обозначают заглавными латинскими буквами A, B, C, \dots , а их элементы — строчными латинскими буквами a, b, c, \dots .

Запись $a \in A$ означает, что элемент a **принадлежит** множеству A . Запись $a \notin A$ означает, что элемент a **не принадлежит** множеству A .

Множество A , состоящее из элементов $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ обозначается следующим образом: $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$.

Некоторые числовые множества имеют общепринятые обозначения: \mathbb{N} — множество натуральных чисел; \mathbb{Z} — множество целых чисел; \mathbb{Q} — множество рациональных чисел (обыкновенных дробей); \mathbb{R} — множество действительных чисел; \mathbb{C} — множество комплексных чисел.

Множество называется **конечным**, если оно содержит конечное число элементов, в противном случае множество **бесконечно**. Если множество не содержит ни одного элемента, то оно называется **пустым**. Пустое множество обозначается символом \emptyset .

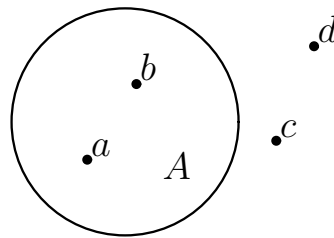
Существуют различные способы задания множеств. Рассмотрим их. Множества могут быть заданы:

1) перечислением элементов множества;

2) с помощью указания характеристического свойства, т.е. свойства, которым обладают все элементы множества, но не обладают никакие другие объекты;

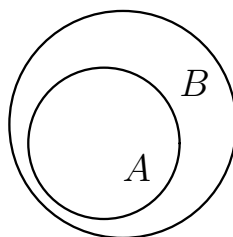
3) с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Диаграмма представляет собой замкнутую линию. Предполагается, что внутри нее располагаются элементы, принадлежащие множеству, а вне — элементы, ему не принадлежащие.



Здесь $a \in A$, $b \in A$, $c \notin A$, $d \notin A$.

Множество A называется **подмножеством** множества B , если каждый элемент множества A является одновременно элементом множества B . При этом используется обозначение: $A \subset B$. Символ \subset есть **знак включения** или \subseteq , если при включении A в B возможно их совпадение. Говорят, что множество A **включено во множество** B . Проиллюстрируем это отношение между A и B с помощью диаграмм Эйлера-Венна.



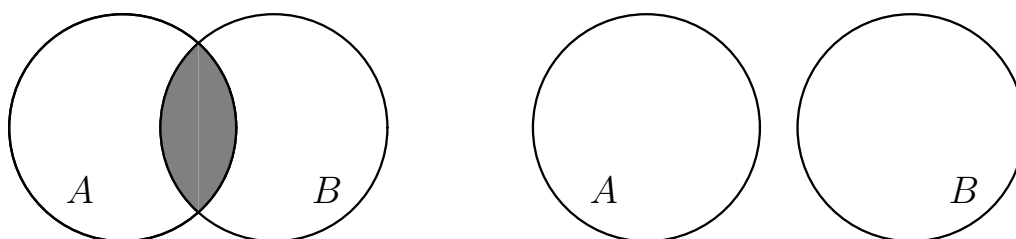
Множества A и B называются **равными** или **совпадающими**, если они состоят из одних и тех же элементов или имеют место одновременные включения $A \subset B$ и $B \subset A$. Используется обозначение $A = B$.

Любое множество имеет два **тривиальных** подмножества: само данное множество и пустое множество. Если некоторое

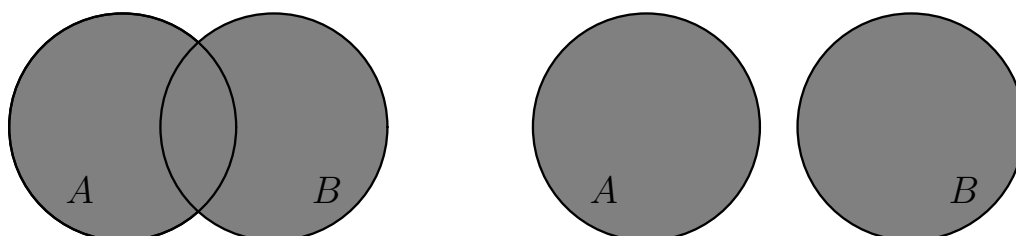
множество, кроме тривиальных, имеет другие подмножества, то его можно рассматривать как **универсальное** по отношению к этим подмножествам. Универсальное множество обозначают U .

Над множествами можно выполнять операции. В результате выполнения операций образуются новые множества. Пусть даны множества A и B . Введем операции над ними.

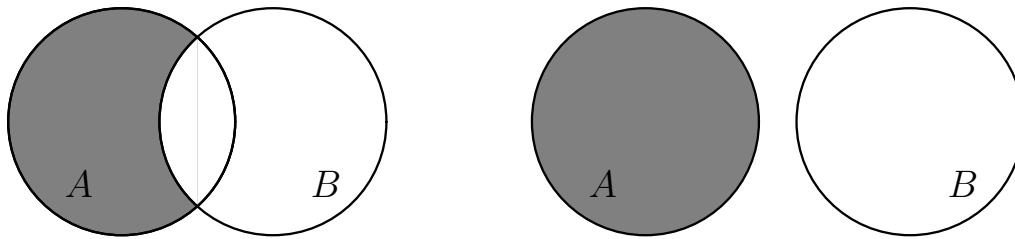
Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из тех элементов, которые принадлежат одновременно обоим данным множествам. Используется обозначение $A \cap B$. Изобразим с помощью диаграмм пересечение множеств (показано штриховкой). В первом случае множества пересекаются, а во втором — пересечение пусто, то есть, $A \cap B = \emptyset$.



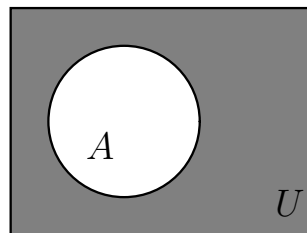
Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из данных множеств. Используется обозначение $A \cup B$. Изобразим с помощью диаграмм объединение множеств (показано штриховкой). В первом случае множества пересекаются, а во втором — нет.



Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из тех элементов множества A , которые не принадлежат множеству B . Используется обозначение $A \setminus B$. Изобразим с помощью диаграмм



Дополнением множества A до универсального множества U называется множество \bar{A} , состоящее из всех элементов универсального множества U , не принадлежащих A . Изобразим с помощью диаграммы



Дополнение множества A можно называть разностью между универсальным множеством U и множеством A , т. е. $\bar{A} = U \setminus A$.

Некоторые свойства операций над множествами:

1. $A \cup B = B \cup A$;
2. $A \cap B = B \cap A$;
3. $A \setminus B \neq B \setminus A$;
4. $A \cup A = A$;
5. $A \cap A = A$;
6. $A \cup \emptyset = A$;
7. $A \cap \emptyset = \emptyset$;
8. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
9. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
10. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
11. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Приоритет операций следующий: если есть скобки, то выполняются операции в скобках; если скобок нет, то сначала вычисляется разность

множеств (если она не берётся от составного выражения), потом пересечение, потом объединение.

Рассмотрим теперь такие понятия, как кортежи.

Пусть даны множества X_1, X_2, \dots, X_n . **Кортежем длины n** , составленным из элементов этих множеств, называется конечная упорядоченная последовательность $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, где для любого номера k , $1 \leq k \leq n$, элемент $x_k \in X_k$. Элемент x_k называется k -ой координатой или k -ой компонентой кортежа.

Два кортежа равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую длину и координаты, стоящие на местах с одинаковыми номерами, равны.

Кортеж длины два называется **упорядоченной парой**, кортеж с длиной три — **упорядоченной тройкой**, \dots , длины n — упорядоченной n -кой. Кортеж, не содержащий ни одной координаты, имеет длину ноль и называется **пустым**.

Укажем основные отличия понятий «кортеж» и «множество».

- Во множестве порядок элементов роли не играет, а кортежи, отличающиеся порядком элементов, различны, даже если имеют одинаковый состав.
- Во множестве все элементы различны, а в кортеже они могут неоднократно повторяться на различных местах.

Декартовым или **прямым произведением множеств** $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ называется множество, состоящее из всевозможных кортежей $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, где для любого номера k , $1 \leq k \leq n$, элемент $x_k \in X_k$. Декартово произведение обозначается $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$.

Декартово произведение множества A на себя называется декартовым квадратом множества $A^2 = A \times A$. При умножении

множества A на себя n раз имеем декартову n -ую степень множества A .
Используется обозначение $A^n = A \times A \times \dots \times A$.

Декартовым произведением множеств A и B называется множество всевозможных пар вида $\langle a, b \rangle$, где $a \in A$, $b \in B$. Обозначается $A \times B$.
Например, если $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, то

$$A \times B = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 5 \rangle\}$$

Поговорим ещё о разбиении множества на классы. Пусть дано множество A и в нем выделена система подмножеств $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. Говорят, что множество A **разбито на классы** $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, если выполнены условия:

- 1) классы попарно не пересекаются;
- 2) объединение всех подмножеств совпадает с множеством A .

Свойство 1) называется **свойством частоты**, а свойство 2) — **свойством полноты**.

2.2. Контрольные вопросы

1. Какова суть понятия «множество»?
2. Какие существуют способы задания множества?
3. Что такое кортеж? В чём заключаются различия между множеством и кортежем?
4. Перечислить основные операции над множествами.
5. Перечислить основные свойства операций над множествами.
6. Сформулировать определение декартового произведения и приведите пример.
7. Когда можно вести речь о разбиении множества на классы?

2.3. Типовые задачи

Задача 1. Записать символически и перечислением элементов множество, элементами которого являются: а) все натуральные чётные числа, делящиеся на 3 и не большие 20; б) все целые числа, квадрат которых меньше 25.

Решение. а) $\{x \mid x = 6k, k \in \mathbb{N} \text{ и } x \leq 20\} = \{6, 12, 18\}$;
б) $\{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ и } x^2 < 25\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

Задача 2. Доказать двумя способами (с помощью таблицы истинности и методом эквивалентных переходов) равенство (закон де Моргана) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

Решение. 1 способ. Заполним таблицу и сравним столбцы значений для множеств $\overline{A \cup B}$ и $\bar{A} \cap \bar{B}$. Единица означает, что некий элемент принадлежит множеству, а ноль — что элемент множеству не принадлежит.

A	B	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	\bar{A}	\bar{B}	$\bar{A} \cap \bar{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Так как столбцы совпадают, то множества также совпадают.

2 способ. Рассмотрим произвольный элемент x :

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in \bar{A}) \wedge (x \in \bar{B}) \Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B} \end{aligned}$$

На практике достаточно воспользоваться одним из способов.

2.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Даны множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; $D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Задайте списками множества: 1) $A \cup B \cup C \cup D$; 2) $A \cap B \cap C \cap D$ 3) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$; 4) $(A \cup B) \cap (C \cup D)$; 5) $(A \setminus B) \cup (C \setminus D)$.

2. Для каких из следующих пар множеств имеет место одно из соотношений: $A \subset B$; $B \subset A$; $A = B$: 1) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, c, d\}$; 2) $A = \emptyset$, $B = \emptyset$; 3) $A = \emptyset$, $B = \{a, c, d\}$?

3. Пусть P — множество натуральных чисел, больших 7 и меньших 14. Выясните, какие из чисел 13, 10, 5, 7, 14 ему принадлежат, а какие не принадлежат. Ответ запишите, используя знаки принадлежности.

4. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна множества, для которых справедливы свойства:

- 1) $A \subset B$ и $B \subset C$;
- 2) $A \subset B$ и $B \subset C$ и $A \setminus B = \emptyset$;
- 3) $A \subset B$ и $B \subset C$ и $C = A \cup B$;
- 4) $A \subset B$ и $B \subset C$ и $A \cap B = \emptyset$;
- 5) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

5. Опрос 100 студентов дал следующие результаты о количестве студентов, изучающих различные иностранные языки: испанский — 28; немецкий — 30; французский — 42; испанский и немецкий — 8; испанский и французский — 10; немецкий и французский — 5; все три языка — 3. Ответьте на вопросы:

- 1) Сколько студентов не изучает ни одного языка?
- 2) Сколько студентов изучает один французский язык?
- 3) Сколько студентов изучают немецкий язык в том и только в том случае, если они изучают французский язык?

6. Опрос 100 студентов выявил следующие данные о числе студентов, изучающих различные иностранные языки: только немецкий — 18; немецкий, но не испанский — 23; немецкий и французский — 8; немецкий — 26; французский — 48; французский и испанский — 8; никакого языка — 24.

- 1) Сколько студентов изучает испанский язык?
- 2) Сколько студентов изучают немецкий и испанский языки?
- 3) Сколько студентов изучают французский язык, в том и только в том случае, если они не изучают испанский?

7. Выяснить, верны ли следующие утверждения:

- 1) $2 \in \{x \mid x^2 - 2x^2 - 4x + 3 = 0\}$;
- 2) $2 \in \{x \mid \frac{x^3 - 3x^2}{3 - 4x} > 0\}$;
- 3) $1 \subset \{1, 2, 3\}$;
- 4) $\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$.

8. Выписать все подмножества множества M :

- 1) $M = \{1, 2, 3\}$; 2) $M = \{x, y, z\}$.

9. Заданы множества $A = [-1; 5]$ и $B = (-2; 4]$. Найти множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

10. Заданы множества $A = (-\infty; 5]$ и $B = (-2; +\infty)$. Найти множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

11. Верны ли следующие утверждения?

- 1) $3 \in \left\{x \mid \exists n \in \mathbb{N} \left(x = \frac{n+2}{3n-1}\right)\right\}$;
- 2) $\{\emptyset\} \subset \emptyset$;
- 3) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$;
- 4) $\{1, 2, 3\} \in \mathbb{Z}$;
- 5) $\{1, 2, 3\} \subset \mathbb{Z}$;
- 6) $\{x \mid x^2 - 5x + 6 < 0\} \subset \{x \mid x^2 - 9 \leq 0\}$.

12. Функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на множестве \mathbb{R} , $A = \{2, 5, 7\}$ —

множество решений уравнения $f(x) = 0$, $B = \{-2, -5, 2\}$ — множество решений уравнения $g(x) = 0$. Найти множество C решений уравнения $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

13. Функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на множестве \mathbb{R} , $A = \{3, 9, 10\}$ — множество решений уравнения $f(x) = 0$, $B = \{-2, 3, 10\}$ — множество решений уравнения $g(x) = 0$. Найти множество C решений уравнения $f(x)g(x) = 0$.

14. Пусть A — множество натуральных чисел, кратных 12, B — множество натуральных чисел, кратных 15. Что из себя представляет множество $A \cap B$?

15. Пусть A — множество натуральных чисел, кратных 21, B — множество натуральных чисел, кратных 28. Что из себя представляет множество $A \cap B$?

16. Пусть R — множество все х ромбов, P — множество всех прямоугольников. Что из себя представляет множество $R \cap P$?

17. Пусть A — множество четырехугольников, которые имеют хотя бы пару параллельных сторон, B — множество параллелограммов. Что из себя представляет множество $A \setminus B$?

18. Пусть A — множество равнобедренных треугольников, B — множество треугольников, у которых хотя бы один из углов равен 60° . Что из себя представляет множество $A \cap B$?

19. Пусть A — множество простых чисел, B — множество составных чисел. Что из себя представляет множество $A \cup B$?

20. Доказать с помощью диаграмм Эйлера-Венна, таблиц истинности и преобразований множеств следующие утверждения:

1) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

2) $A \cap (A \cup \bar{B}) = A \cup (A \cap \bar{B})$;

3) $\overline{A \setminus B} \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \bar{A}$;

4) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) \subset A \setminus B$.

21. Найти количество трехзначных чисел:

- 1) кратных по крайней мере одному из чисел 3 и 4;
- 2) кратных 4, но не кратных 3.

22. Найти количество трехзначных чисел:

- 1) кратных 4 или 6;
- 2) кратных 4, но не кратных 6;
- 3) кратных 6, но не кратных 4;
- 4) кратных 4 или 6, но не кратных 9.

2.5. Контрольные задания

Для составления контрольной работы надо выбрать по одному из заданий под номерами 1, 2 и 3. Указанный выбор сведен в таблицу, приведенную после заданий.

Задача 1. Даны множества A, B, C . По ним строятся множества X и Y . Показать множества X и Y на диаграммах Эйлера-Венна. Выяснить, верно ли равенство $X = Y$ с помощью таблицы истинности и преобразований множеств.

- а) $X = C \setminus (B \setminus \bar{A}), Y = C \setminus (\bar{A} \setminus (\bar{B} \cup \bar{C}))$.
- б) $X = \bar{C} \setminus \bar{B}, Y = (A \cup \bar{C}) \setminus (\bar{A} \setminus B)$.
- в) $X = \bar{C} \cap B, Y = \bar{C} \setminus (A \setminus (B \cup C))$.
- г) $X = \bar{A} \cup (B \cap C), Y = (\bar{A} \cup C) \setminus (A \setminus B)$.

Задача 2.

- а) Найти количество трехзначных чисел, кратных 3 или 7.
- б) Найти количество трехзначных чисел, кратных 4 или 11.
- в) Найти количество трехзначных чисел, кратных 5 или 7.
- г) Найти количество трехзначных чисел, кратных 4 или 7.

- д) Найти количество трехзначных чисел, кратных 6 или 9.
е) Найти количество трехзначных чисел, кратных 6 или 14.

Задача 3.

- а) На экзамене по русской литературе на филологическом факультете выяснилось, что каждый из 95 студентов читал хотя бы две книги из трилогии Л.Н. Толстого «Детство», «Отрочество», «Юность». Книги «Детство» и «Отрочество» читали 55 студентов, «Детство» и «Юность» — 25, «Отрочество» и «Юность» — 35. Сколько студентов читали книгу «Детство»?
- б) В детском саду каждому из 60 детей для раскрашивания орнамента были выданы красная, желтая и зеленая краски. Выяснилось, что каждый ребёнок использовал по крайней мере две краски. При этом красную использовали 35 детей, жёлтую — 40, зелёную — 50. Сколько детей использовали красную и зелёную краски?
- в) В группе на филологическом факультете 30 человек. Каждый из них изучает хотя бы два языка и з трёх: английский, немецкий и французский. Английский и французский изучают 12 студентов, английский и немецкий — 15, французский и немецкий — 13. Сколько студентов изучают все три языка?
- г) В выпускных экзаменах участвовали 120 человек. 5 задач. На экзаменах по алгебре, геометрии и физике каждый выпускник получил отметку «5» или «4», причём отметку «5» каждый получил не менее двух раз. Отметку «5» по алгебре получили 100 выпускников, по геометрии — 90, по физике — 80. Сколько выпускников получили отметку «5» ровно по двум предметам?
- д) При голосовании в городскую думу в списке из трех кандидатов можно было оставить не более 1 человека. Против кандидатов *A* и *B* проголосовало 65% избирателей, против *B* и *C* — 80%. Сколько

процентов избирателей проголосовало против всех?

е) На экзамене в университете было предложено 5 задач. В результате было зачислено 100 человек, решивших не менее 4 задач. Первые две задачи решили все; 80 человек решили третью задачу, 70 — четвертую, 60 — пятую. Сколько человек решили ровно четыре задачи?

Распределение задач по вариантам:

Вариант	Задача 1	Задача 2	Задача 3
1	а	а	д
2	б	б	е
3	в	в	а
4	г	г	б
5	а	д	в
6	б	е	г
7	в	а	д
8	г	б	е
9	а	в	а
10	б	г	б

3. Элементы комбинаторики

3.1. Основы теории

В комбинаторике изучаются способы подсчёта числа элементов конечных множеств. Основной вопрос комбинаторики — сколько элементов содержится в том или ином конечном множестве. Стандартные схемы рассуждений основываются на двух правилах: правиле сложения и правиле умножения.

Правило сложения. Введём обозначение: $N(X)$ — функция, возвращающая количество элементов некоторого множества X . Тогда для произвольных **непересекающихся** конечных множеств A_1, A_2, \dots, A_n имеет место формула:

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = N(A_1) + N(A_2) + \dots + N(A_n).$$

Читается она следующим образом: количество элементов в объединении нескольких непересекающихся конечных множеств равно сумме количеств элементов этих множеств. Это и есть правило сложения.

У правила сложения есть обобщение — **формула включений и исключений**. Она применяется, если множества A_1, A_2, \dots, A_n пересекаются. В случае двух множеств её вид:

$$N(A_1 \cup A_2) = N(A_1) + N(A_2) - N(A_1 \cap A_2).$$

В случае трёх множеств:

$$\begin{aligned} N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = & N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) - \\ & - N(A_1 \cap A_2) - N(A_1 \cap A_3) - N(A_2 \cap A_3) + N(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

Правило умножения. Для произвольных конечных множеств $A_1,$

A_2, \dots, A_n имеет место формула:

$$N(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = N(A_1) \cdot N(A_2) \cdot \dots \cdot N(A_n).$$

Она обозначает, что количество элементов декартового произведения нескольких конечных множеств равно произведению количеств элементов этих множеств. Это и есть правило умножения.

Так как элементами декартового произведения n конечных множеств являются упорядоченные n -ки вида $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$, то получается, что данная формула позволяет подсчитывать число упорядоченных комбинаций, полученных из элементов множеств A_1, A_2, \dots, A_n .

Указанную задачу можно перефразировать так: сколько упорядоченных наборов можно составить, если первое место набора можно заполнить $N(A_1)$ способами, второе место — $N(A_2)$ способами, и так далее? Ответом является произведение количеств способов.

Правило умножения имеет несколько следствий.

Правило перестановок. Когда требуется из n -элементного базового множества извлечь произвольное n -элементное упорядоченное подмножество, **не возвращая** элементы обратно, то общее количество таких подмножеств вычисляется по формуле перестановок:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Данная задача может быть перефразирована так: сколькими способами можно переставить элементы n -элементного множества, выстроенные в ряд?

Произведение первых n натуральных чисел называется **факториалом** числа n и записывается $n!$.

Правило размещений. Когда требуется из n -элементного базового

множества извлечь произвольное m -элементное упорядоченное подмножество ($m \leq n$), **не возвращая** элементы обратно, то общее количество таких подмножеств вычисляется по формуле размещений:

$$A_n^m = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - (m - 2)) \cdot (n - (m - 1)).$$

Имеется ещё одна формула, более простая для запоминания:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n - m)!}.$$

Правило сочетаний. Когда требуется из n -элементного базового множества извлечь произвольное m -элементное **неупорядоченное** подмножество ($m \leq n$), **не возвращая** элементы обратно, то общее количество таких подмножеств вычисляется по формуле сочетаний:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - (m - 2)) \cdot (n - (m - 1))}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m}.$$

Имеется ещё одна формула, более простая для запоминания:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n - m)!}.$$

Правило размещений с повторениями. Когда требуется из n -элементного базового множества извлечь произвольное m -элементное **упорядоченное** подмножество ($m \leq n$), **возвращая** элементы обратно, то общее количество таких подмножеств вычисляется по формуле размещений с повторениями:

$$R_n^m = n^m.$$

3.2. Контрольные вопросы

1. Чем занимается комбинаторика?
2. Сформулируйте правило сложения.

3. Приведите частные случаи формулы включений и исключений.
4. Сформулируйте правило умножения.
5. Сформулируйте определение перестановки из n элементов. Укажите формулу для её вычисления.
6. Сформулируйте определение размещения из n элементов по m . Укажите формулу для его вычисления.
7. Сформулируйте определение сочетания из n элементов по m . Укажите формулу для его вычисления.
8. Сформулируйте определение размещения с повторениями из n элементов по m . Укажите формулу для его вычисления.

3.3. Типовые задачи

Задача 1. Сколькими способами из 25 учеников класса можно выбрать актив в следующем составе: культорг, физорг и редактор стенгазеты?

Решение. Для решения задачи требуется выделить упорядоченные трёхэлементные подмножества множества, содержащего 25 элементов, т.е. найти число размещений из 25 элементов по 3. Найдём по соответствующей формуле

$$A_{25}^3 = \frac{25!}{(25-3)!} = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800.$$

Задача 2. Сколькими способами можно расставить на 32 чёрных полях шахматной доски 12 белых и 12 чёрных шашек?

Решение. Поля для белых шашек можно выбрать C_{32}^{12} способами. После этого остаётся 20 полей, из которых можно C_{20}^{12} способами выбрать поля для чёрных шашек. Используя правило умножения, получаем, что искомое число расстановок равно $C_{32}^{12} \cdot C_{20}^{12}$.

Задача 3. Имеется 5 различных стульев и 7 рулонов обивочной ткани различных цветов. Сколькими способами можно выполнить обивку стульев?

Решение. Так как стулья различны, то их можно расположить в определенном порядке, и каждому способу обивки будет соответствовать строка длиной 5, составленная из данного 7-элементного множества цветов ткани. Число таких строк находится по формуле $R_n^m = n^m$. В нашем случае $R_7^5 = 7^5 = 16807$.

3.4. Задачи для самостоятельного решения

Правило сложения. Формула включений и исключений

1. Сколько имеется натуральных чисел, меньших 10000, в десятичной записи которых все цифры различны?

2. Сколько имеется шестизначных чисел, в десятичной записи которых «чётные» (0, 2, 4, 6, 8) и «нечётные» (1, 3, 5, 7, 9) цифры чередуются?

3. Сколько имеется четырёхзначных чисел, в десятичной записи которых встречается цифра 5?

4. Сколько имеется шестизначных чисел, в десятичной записи которых встречается хотя бы одна из цифр 1, 2, 3?

5. Сколько имеется пятизначных чисел, в десятичной записи которых встречаются одинаковые цифры?

6. Сколько имеется шестизначных чисел, в десятичной записи которых хотя бы одна цифра «нечётная»?

Правило умножения

1. Семья Ивановых в полном составе (мама, папа, и их дети Таня, Оля, Лена, Ваня, Игорь, Боря и Андрей) принимает участие в игре

«Дружная семья». Один из конкурсов игры — эстафета, на первом этапе которой соревнуются взрослые, на втором — мальчики, на третьем — девочки. Сколькими способами Ивановы могут сформировать команду для участия в эстафете?

2. Из города А в город В ведет шесть дорог, а из города В в город С — три. Сколько путей, проходящих через В, ведёт из А в С?

3. К концу первого года обучения в кулинарном колледже Иван научился готовить четыре первых блюда, пять вторых и три третьих. Сколько вариантов комплексных обедов, состоящих из первого, второго и третьего блюд, может приготовить Иван?

4. Сколько различных двузначных чисел можно получить, выкладывая в ряд две карточки с цифрами от 1 до 9 так, чтобы на первом месте стояли «четные», а на втором «нечетные» цифры?

5. Из города А в город В ведут четыре дороги. Сколькими способами можно съездить из города А в город В и обратно, если:

- 1) путешествие туда и обратно совершается по разным дорогам;
- 2) дороги туда и обратно выбираются независимо друг от друга.

6. Сколько имеется четырёхзначных чисел, составленных их цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, в десятичной записи которых все цифры различны?

7. Сколько имеется четырёхзначных чисел, составленных их цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, в десятичной записи которых соседние цифры различны?

8. Сколько имеется шестизначных чисел, составленных их цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, в десятичной записи которых все цифры различны?

9. Сколько имеется шестизначных чисел, составленных их цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, в десятичной записи которых соседние цифры различны?

10. У Саши десять марок, а у Вани двадцать. Сколькими способами можно осуществить обмен одной Сашиной марки на одну Ванину?

11. Сколькими способами можно рассадить за шестью партами 6 девочек и 6 мальчиков так, чтобы за каждой партой слева сидел мальчик, а справа — девочка?

12. В классе двадцать человек: 10 девочек и 10 мальчиков. Сколькими способами можно составить график дежурства по классу на десять дней так, чтобы каждый день дежурил один мальчик и одна девочка, и при этом никто из ребят не дежурил дважды?

Перестановки

1. У Ивана есть десять карточек, на которых записаны цифры от 0 до 9. Сколькими способами он может выложить их на столе в ряд?

2. У Ивана есть десять карточек, на которых записаны цифры от 0 до 9. Сколькими способами он может выложить их на столе в ряд так, чтобы непосредственно за цифрой 5 следовала цифра 6?

3. У Ивана есть десять карточек, на которых записаны цифры от 0 до 9. Сколькими способами он может выложить их на столе в ряд так, чтобы карточки, на которых записаны цифры 1, 2, 3 лежали рядом?

4. У Ивана есть десять карточек, на которых записаны цифры от 0 до 9. Сколькими способами он может выложить их на столе в ряд так, чтобы карточки, на которых записаны цифры 8 и 9, не лежали рядом?

5. Сколькими способами на одной полке можно разместить шесть книг по физике и шесть книг по математике так, чтобы книги по физике стояли правее всех книг по математике?

6. Сколькими способами на одной полке можно разместить шесть книг по физике и шесть книг по математике так, чтобы книги по физике чередовались с книгами по математике?

7. Сколько существует перестановок цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, в которых цифра 2 занимает одно из первых четырёх мест, а цифра 0 — одно из пяти последних?

8. Сколькими способами можно рассадить на стоящих в ряд 12 стульях 4 мальчика и 8 девочек так, чтобы на крайних стульях ряда сидели мальчики?

Перестановки с повторениями

1. Сколько разных шестибуквенных слов можно получить, переставляя буквы в слове «фартук»?

2. Сколько разных шестибуквенных слов можно получить, переставляя буквы в слове «физика»?

3. Сколько разных восьмибуквенных слов можно получить, переставляя буквы в слове «черчение»?

4. Сколько разных слов можно получить, переставляя буквы в слове «комбинаторика»?

5. Сколько имеется девятизначных чисел, в десятичной записи которых цифра 4 встречается три раза, цифра 5 — четыре раза, цифра 8 — два раза?

6. У мамы четыре одинаковых яблока и три одинаковых груши. Каждый день в течении семи дней она выдаёт сыну по одному фрукту. Сколькими способами она может распределить фрукты по дням?

7. Сколько различных семибуквенных слов можно составить, переставляя буквы в слове «потолок», если в полученных словах три буквы «О» не должны стоять рядом?

8. У Ивана восемь шаров: три синих и пять красных. Сколькими способами он может разложить их по восьми пронумерованным коробкам так, чтобы в каждой коробке оказалось ровно по одному шару?

9. Мама привезла в дом отдыха кулёк, в котором оказалось 24 карамельки, в том числе 7 малиновых, 4 яблочных, 5 лимонных, 6 персиковых и 2 апельсиновых. Каждый день в течение 24-х дневного отпуска она решила давать сыну по одной конфете. Сколькими

способами она может это сделать?

Сочетания и размещения

1. У Ани есть семь цветных карандашей. Мама нарисовала на листе бумаги девочку и предложила Ане раскрасить её шапочку, платье и туфельки, используя для каждого предмета одежды один цвет.

2. Сколькими способами Аня сможет раскрасить картинку, если она решила, что шапочка, платье и туфельки должны быть раскрашены в разные цвета?

3. Сколькими способами Аня сможет раскрасить картинку, если она готова раскрашивать шапочку, платье и туфельки как в разные, так и в одинаковые цвета?

4. В магазине продаются воздушные шары семи цветов. Саша решил купить для праздника три шара. Сколькими способами он может это сделать?

Разные задачи

1. Сколькими способами можно раздать четырем игрокам по одной карте из колоды, содержащей 36 карт так, чтобы карты были разных мастей?

2. Известно, что замочный код состоит из двух пятерок, трех единиц и четырех троек. Какое максимальное число проб придется сделать, чтобы открыть замок?

3. В спортивной секции занимаются 8 пятиклассников, 8 шестиклассников и 8 семиклассников. Сколькими способами их можно расставить по трем этапам эстафеты, если в команде должны быть представлены учащиеся всех классов?

4. Известно, что телефонный номер содержит две тройки, три четвёрки, одну пятёрку и четыре шестёрки. Какое максимальное число проб придется сделать, чтобы дозвониться абоненту?

5. В кондитерской имеются пирожные 8 видов. Оля хочет купить 6 пирожных. Сколькими способами она сможет это сделать, если а) она решила купить пирожные только разных видов; б) она не против того, чтобы пирожные оказались одинаковыми?

6. В камере хранения имеется 8 отсеков. Сколькими способами в ней можно разместить чемодан, сумку, ящик и пакет, если а) в каждый отсек можно поместить только одну вещь; б) в каждый отсек можно поместить до десяти вещей?

7. В магазине продаются саженцы роз 7 сортов. Сколько разных наборов из 5 саженцев может приобрести Иван Иванович, если а) он решил купить саженцы разных сортов; б) ему не важно, какого сорта окажутся выбранные им розы?

8. В кабину лифта девятиэтажного дома вошли три пассажира. Укажите, сколько существует способов разгрузки лифта, если а) на каждом этаже выходит не более одного пассажира; б) среди пассажиров могут оказаться живущие на одном этаже?

9. Сколько «слов» можно получить, переставляя буквы в слове «демонстрация», если первая и последняя буквы «слова» должны быть гласными?

10. В магазине продается 6 видов глазированных сырков. Сколькими способами можно купить 8 сырков на завтрак?

11. Известно, что замочный код состоит из 6 цифр. Сколько существует замочных кодов, содержащих хотя бы одну из цифр 0 или 2?

12. На родительском собрании в школе присутствуют 12 мам и 9 пап. Сколькими способами можно выбрать трех человек в родительский комитет так, чтобы он состоял из лиц одного пола?

13. В зрительном зале 18 кресел (8 в первом ряду и 10 во втором).

Сколькими способами там могут усесться 5 мальчиков и 6 девочек, если девочки должны занять места в первом ряду, а мальчики – во втором?

14. В шахматном кружке занимаются 9 пятиклассников, 7 шестиклассников и 4 семиклассника. Сколькими способами можно сформировать команду, если в неё должны войти три пятиклассника, два шестиклассника и один семиклассник?

15. Сколько «слов» можно получить, переставляя буквы в слове «выдающийся», если первые три буквы «слова» должны быть гласными?

16. В магазине продается 7 видов йогуртов. Сколькими способами мама может купить 9 йогуртов на завтрак?

17. В спортивной секции занимаются 8 девушек и 10 юношей. Между ними разыгрываются четыре путёвки в зимний лагерь. В скольких случаях путёвки достанутся лицам одного пола?

18. Известно, что шифр замка состоит из 8 цифр. Сколько существует замочных кодов, содержащих хотя бы одну нечетную цифру?

19. В хрестоматию по литературе включено 12 стихотворений Пушкина, 10 – Лермонтова 8 – Блока. К экзамену Ваня должен выучить по четыре стихотворения каждого автора. Сколькими способами он может сделать свой выбор?

20. За праздничным столом 16 мест.(8 с одной и 8 с другой стороны). Сколькими способами там могут усесться 8 женщин и 6 мужчин, если женщины не должны занимать четыре крайних места?

21. Сколько существует восьмизначных чисел, в которых цифра 0 встречается дважды, а 1 трижды?

22. В вазе стоят 9 гвоздик: 3 белого, 4 розового и 2 красного цвета. Сколькими способами можно раздать по одному цветку девяти девушкам?

23. Сколько «слов» можно получить, переставляя буквы в слове

«умножение», если буква «м» должна занимать одно из первых пяти мест?

24. В магазине продается 8 видов глазированных сырков. Сколькими способами мама может купить 6 сырков на завтрак, если она не хочет, чтобы все 6 сырков были одного вида?

25. За праздничным столом 18 мест.(9 с одной и 9 с другой стороны). Сколькими способами там могут усесться 4 женщин и 7 мужчин, если женщины не должны сидеть напротив друг друга?

26. В туристической секции занимаются 10 девушек и 10 юношей. Сколькими способами они могут разбиться на 5 команд так, чтобы в каждую команду вошли двое юношей и две девушки? Команды не занумерованы.

27. Сколько существует нечетных девятизначных чисел, в которых цифра ноль встречается трижды?

28. В вазе лежат 12 карамелек: 5 лимонных, 3 апельсиновых и 4 малиновых. Сколькими способами можно раздать по одной конфете двенадцати девочкам?

29. Сколько «слов» можно получить, переставляя буквы в слове «телевидение», если буква «л» должна занимать одно из первых семи мест, а буква «в» одно из шести последних?

30. В магазине продается 9 видов йогуртов. Сколькими способами мама может купить 5 йогуртов на завтрак, если она хочет купить йогурты не менее двух видов?

31. В классной комнате 20 мест.(по 2 места за 10 партами). Сколькими способами там могут занять места 8 мальчиков и 5 девочек так, чтобы у девочек не было соседей по парте?

32. В классе 6 девушек и 12 юношей. Сколькими способами они могут разбиться на 6 команд так, чтобы в каждую команду вошли двое

юношей и одна девушка? Команды не занумерованы.

3.5. Контрольные задания

Вариант 1.

1. В классе шестнадцать учеников. Из них семеро ходят в танцевальный кружок, одиннадцать занимаются плаванием. Сколько учеников занимаются и плаванием, и танцами?

2. У Васи семь бесплатных абонементов на однократное посещение семи фитнес-центров. Время посещения не зафиксировано. Сколько имеется способов последовательно посетить все указанные фитнес-центры?

3. У преподавателя четыре билета в кино. Он хочет выбрать из группы трёх студенток, чтобы вместе с ними сходить в кинотеатр. Сколькими способами он сможет это сделать, если в наличии имеется девять студенток?

4. В магазине имеется девять системных блоков в сборе и двенадцать мониторов. Сколькими способами можно подобрать комплект, состоящий из системного блока и монитора?

5. Сколькими способами можно рассадить в электричку, насчитывающую семь вагонов, трёх ненавидящих друг дружку старушек, чтобы все они сидели в разных вагонах?

Вариант 2.

1. Учащиеся изучают восемь предметов. В день можно ставить не более четырех различных пар. Сколькими способами можно сформировать расписание на один день, при условии, что в этот день не ставятся пары по одному и тому же предмету?

2. В классе девятнадцать учеников. Из них четырнадцать

увлекаются компьютерами, а трое занимаются восточными единоборствами и увлекаются компьютерами. Сколько учеников занимаются только восточными единоборствами, не интересуясь компьютерами?

3. Сколькими способами тренер может выбрать шесть студентов из группы в тринадцать студентов для формирования хоккейной команды?

4. В игре пяти студентам требуется рассесться на пяти стульях. Сколькими способами они могут это сделать?

5. В турнире по шахматам между 3А, в котором десять шахматистов, и 3Б, в котором одиннадцать шахматистов, игры проводятся только между учениками разных классов. Сколько партий можно составить таким образом?

Вариант 3.

1. У мамы шесть различных фруктов: яблоко, груша, апельсин, мандарин, персик и абрикос. Мама даёт ребенку по одному фрукту в каждый приём пищи. Сколькими способами она может распределить фрукты по этим приёмам пищи?

2. На почте имеется десять видов марок одинаковой цены и пять видов конвертов без марок. Сколькими способами можно сформировать письмо в виде конверта с маркой?

3. В классе пять учеников, которые учатся на отлично и хорошо. Также, трое учатся только на отлично, и двое только на хорошо. Сколько всего учеников, которые учатся на отлично или хорошо?

4. Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трёх горизонтальных полос, если в распоряжении имеется семь полос разного цвета?

5. Сколькими способами преподаватель может выбрать трёх студентов из группы в пятнадцать человек, чтобы отправить их на

математическую олимпиаду?

Вариант 4.

1. В варианте проверочной работы пять заданий на применение различных комбинаторных формул (как в этой проверочной работе). Сколько может быть различных вариантов, если варианты отличаются порядком применения формул?

2. В чемпионате участвует двенадцать команд. Сколькими способами три из них могут занять призовые места?

3. У людоеда в темнице томятся четырнадцать пленников. Сколько есть у людоеда способов выбрать из них троих, чтобы съесть их на обед?

4. В группе одиннадцать учеников. Из них трое летали на самолёте и путешествовали на поезде, а шестеро только летали на самолёте. Сколько учеников только ездили на поезде?

5. В магазине есть семь видов пиджаков, пять видов брюк и четыре вида галстуков. Сколькими способами можно купить комплект из пиджака, брюк и галстука?

Вариант 5.

1. Сколько различных трёхзначных чисел можно получить, пользуясь карточками с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

2. В буфете есть одиннадцать различных блюд. Нам нужно выбрать из них три блюда для того, чтобы хорошо поесть. Сколькими способами можно это сделать?

3. В языке аборигенов далекого острова имеется десять прилагательных, двадцать существительных и пятнадцать глаголов. Предложением называется всякое сочетание прилагательного, существительного и глагола. Сколько всего предложений имеется в этом языке?

4. Восемь студентов пишут ответы на вопросы экзамена. Сколько

существует способов последовательно вызвать их отвечать?

5. В городе девять мебельных магазинов. Из них в шести продается мягкая мебель, а в восьми продается корпусная мебель. Сколько магазинов продает как мягкую мебель, так и корпусную?

Вариант 6.

1. В городе одиннадцать супермаркетов. В девяти из них продаются продукты, в шести также имеются отделы промышленных товаров. В скольких супермаркетах есть как продуктовый, так и промышленный отделы?

2. В городе семь музеев. На посещение одного музея тратится один день. В распоряжении имеется три дня. Сколько у нас имеется способов выбрать три музея для посещения в эти три дня?

3. В городе пять различных достопримечательностей. Сколько можно составить различных экскурсий, если положить, что экскурсии отличаются порядком посещения достопримечательностей?

4. Кошка родила пять котят. Трёх из них желает забрать себе некоторая сильная и независимая женщина. Сколькими способами она это может сделать?

5. У Ани четыре разных платья и три разных пары туфель. Собираясь на вечеринку, она думает, что ей надеть. Сколько всего у Ани вариантов?

Вариант 7.

1. Проводятся соревнования по карате между двумя школами. На татами вызываются два участника, по одному из команд этих школ. В первой команде десять человек, во второй девять. Сколько всего может быть пар соревнующихся?

2. В классе двадцать один ученик. Из них пятнадцать изучают английский язык, четверо изучают как английский, так и немецкий.

Сколько учеников изучают только немецкий язык?

3. Семь бегунов совершают забег на сто метров. Сколько имеется способов распределить семь мест по результатам забега между этими бегунами?

4. У Романа восемь билетов в кино на разные фильмы (по два билета на сеанс) и восемь подруг. Сколько у него есть способов выбрать четырёх из них, чтобы сходить в кино?

5. У Марины десять лучших подруг в социальной сети, но всего четыре одинаковых бесплатных подарка. Сколькими способами Марина может выбрать подруг для того, чтобы отправить им эти подарки?

Вариант 8.

1. У Маши семь нарядов на каждый день недели. Сколько у неё есть способов в разном порядке надевать эти платья в течение недели?

2. Сколькими способами можно выбрать претендентов на конкурс «мисс и мистер университет» из студентов группы, в которой девять девочек и двенадцать мальчиков?

3. В классе семеро учеников занимаются бегом и велосипедом, пятеро — только бегом и семеро — только велосипедом. Сколько учеников в классе?

4. В клубе пять одинаковых беговых дорожек. В некоторый момент времени на эти дорожки пожелали стать девять человек. Сколькими способами из них можно выбрать пятерых, чтобы они первыми пошли на дорожки?

5. В январе тридцать один день. Сколькими способами можно выбрать три дня в январе для того, чтобы сходить на каток, на лыжню и в бассейн?

Вариант 9.

1. У Игоря есть семь различных книг, три из которых он хочет

подарить трём различным девушкам. Сколькими способами он может это сделать?

2. У Пети есть игрушечная железная дорога, в которой есть локомотив и шесть разных вагончиков. Сколько разных составов может сделать Петя?

3. Для полной комплектации команды не хватает двух игроков. Укажите, сколькими способами тренер может выбрать этих игроков из группы в семнадцать студентов?

4. В классе двадцать два ученика. Из них тринадцать ходят в кружок КВН, пятнадцать занимаются легкой атлетикой. Сколько учеников занимаются и легкой атлетикой, и КВН?

5. Сколько нужно издать словарей для того, чтобы выполнить перевод с любого из семи языков (русский, английский, немецкий, испанский, итальянский, португальский, французский) на любой другой из этих языков?

Вариант 10.

1. Сколькими способами семь бабушек могут сесть на семиместную скамейку?

2. В соревновании участвуют девять спортсменов. Сколько имеется способов занять трём из них призовые места: первое, второе и третье?

3. В хоре поют восемь человек. Сколькими способами учитель пения может выбрать из них четверых, чтобы отправить их на конкурс вокальных квартетов?

4. В сказке для совершения дальнего похода нужно было выбрать воина, колдуна, мастера и повара из десяти имевшихся воинов, трёх колдунов, семнадцати мастеров и пяти поваров. Сколько всего было способов это сделать?

5. Производственная фирма изготавливает игры. Из них семь игр

предназначены для использования на персональных компьютерах, а десять игр — на мобильных устройствах. Всего фирмой выпущено четырнадцать игр. Сколько из них предназначены как для игры на компьютере, так и на мобильном устройстве?

4. Случайные события и их вероятности

4.1. Основы теории

4.1.1. События

Случайный эксперимент — это набор условий, который может быть сформирован естественным или искусственным путём потенциально бесконечное количество раз.

При повторении случайного эксперимента результаты могут быть не одинаковы, поэтому имеет смысл рассматривать множество всех взаимоисключающих исходов эксперимента. Назовем его **множеством элементарных исходов случайного эксперимента**. Обычно его обозначают греческой буквой Ω .

Подмножество множества Ω назовем **случайным событием**, если множество Ω конечно или счётно. Только в этом случае в качестве события можно взять произвольное его подмножество. В более общем случае не всякое подмножество множества Ω может быть событием. События будем обозначать прописными латинскими буквами: A, B, C, \dots

Событие **происходит**, если в результате эксперимента осуществляется один из элементарных исходов, принадлежащих этому событию.

Особым образом выделяются два события: **невозможное событие** \emptyset , которое в рамках данного случайного эксперимента произойти не может (оно не содержит в себе ни одного элементарного исхода), и **достоверное событие**, которое в рамках данного случайного эксперимента происходит всегда (оно совпадает с Ω).

Рассмотрение событий как множеств влечет естественное определение отношений и операций с событиями как отношений и

операций с множествами.

Событие A **влечет** событие B , если любой элементарный исход, входящий в A , входит и в B , то есть, имеется включение $A \subseteq B$.

Суммой событий A и B назовем событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий. Обозначим его $A \cup B$ или $A + B$. Данное событие включает в себя элементарные исходы, принадлежащие либо событию A , либо событию B .

Суммой событий A_1, A_2, \dots, A_n назовем событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий. Обозначим его через $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ или $A_1 + A_2 + \dots + A_n$.

Произведением событий A и B назовем событие, состоящее в одновременном появлении событий A и B . Обозначим его $A \cap B$ или AB . Данное событие включает в себя элементарные исходы, принадлежащие как событию A , так и событию B .

Произведением событий A_1, A_2, \dots, A_n назовем событие, состоящее в одновременном появлении всех этих событий. Обозначим его через $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ или $A_1 A_2 \dots A_n$.

Противоположным событию A или **дополнением к событию** A назовем событие, состоящее в неоявлении A . Обозначение \bar{A} . Оно включает в себя исходы, принадлежащие Ω , но не принадлежащие A , то есть, принадлежащие $\Omega \setminus A$.

Назовем события A и B **несовместными**, если $A \cap B = \emptyset$, то есть, несовместные события не могут появиться вместе в одном и том же эксперименте, и если произошло одно из двух несовместных событий, то другое определённо не произошло.

Назовем события A_1, A_2, \dots, A_n **попарно несовместными**, если для любых i и j ($i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$) выполняется $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Скажем, что события A_1, A_2, \dots, A_n образуют **полную группу**

событий, если все они попарно несовместны, и их объединение образует множество всех элементарных исходов: $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

Ряд экспериментов позволяет выделить подобные полные группы событий. Например, в эксперименте, когда из группы студентов выбирается один студент и рассматривается его пол, то мы имеем два события, образующие полную группу: $A_1 = \{\text{студент юноша}\}$ и $A_2 = \{\text{студент девушка}\}$. Аналогично, в ситуации, когда на блюде лежат пирожки трех видов (например, с мясом, с повидлом, с капустой) и выбирается один пирожок, имеется полная группа событий: $A_1 = \{\text{выбран пирожок с мясом}\}$, $A_2 = \{\text{выбран пирожок с повидлом}\}$, $A_3 = \{\text{выбран пирожок с капустой}\}$.

4.1.2. Вероятность

Вероятность события A можно расценивать как меру или оценку шанса наступления этого события. Данное предложение не является определением данного понятия, но лишь пояснением, зачем это понятие было введено.

Замечание 1. Для того, чтобы строго задать вероятность, в рамках теории вероятностей специальным образом задается система (алгебра) событий, а уж затем на этом множестве заводится собственно **вероятность** или **вероятностная мера** — вещественная функция P , которая обладает определёнными свойствами: неотрицательности, ограниченности и счётной аддитивности (суммируемости). Эти свойства будут описаны чуть ниже. Однако стоит заметить, что это не жёсткое определение. Вероятность можно задать разными способами, даже на одной и той же системе событий.

Основные свойства (аксиомы) вероятности:

1. вероятность любого события A неотрицательна: $P(A) \geq 0$;

2. для любого набора попарно несовместных событий

$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ выполняется равенство

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots$$

(вероятность суммы счетного числа попарно несовместных событий равна сумме их вероятностей);

3. вероятность достоверного события равна единице: $P(\Omega) = 1$.

Классическая схема вычисления вероятностей возникает в таких экспериментах, в которых выполняются два условия:

1. множество Ω всех элементарных исходов эксперимента **конечно**;
2. все элементарные исходы **равновозможны**.

Тогда вероятность события A определяется следующим образом:

$$P(A) = \frac{\text{число элементарных исходов, принадлежащих } A}{\text{число всех элементарных исходов в } \Omega}$$

(число исходов, благоприятных A , надо поделить на число всех исходов).

Рассмотрим пример. На подносе лежат восемь пирожков с мясом, семь пирожков с повидлом и десять пирожков с капустой. Внешне пирожки выглядят одинаково. Случайным образом выбирается один пирожок. Найти вероятность того, что это будет пирожок с мясом.

Всего у нас 25 пирожков, следовательно, это и есть количество всех возможных исходов эксперимента по выбору одного пирожка. Событие $A = \{\text{вынут пирожок с мясом}\}$ содержит 8 исходов, и поэтому

$$P(A) = \frac{8}{25} = 0.32,$$

то есть, 8 шансов из 25, что нам попадет пирожок с мясом.

С понятием вероятности тесно связано понятие относительной частоты события. Но это понятие применяется тогда, когда эксперимент

уже проведен и мы получили некоторые результаты. А именно, пусть эксперимент проводился n раз и в результате этого эксперимента некоторое событие A появилось k раз; тогда отношение $\frac{k}{n}$ называется **относительной частотой** события A .

Частота похожа на вероятность, но не тождественна ей. К примеру, вероятность выпадать гербу при однократном броске правильной монетки равна 0.5, но при проведении эксперимента, например, при 10 бросках монеты, герб может выпасть только один раз, и тогда относительная частота выпадения герба равна 0.1. Итак, вероятность – это величина теоретического плана, в то время как относительная частота тесно связана с фактически проведенным экспериментом.

Мы будем рассматривать только такие случайные эксперименты, которые можно повторить любое число раз и в достаточно длинных сериях испытаний относительные частоты интересующего нас элементарного исхода или события будут мало отличаться друг от друга от серии к серии. В этом случае принято говорить, что наблюдаемое событие обладает **статистической устойчивостью**. Тогда вероятность события можно оценить по его относительной частоте, и тем точнее, чем больше опытов проведено (частота будет приближаться к вероятности).

4.1.3. Вероятностные законы

Справедливы следующие свойства вероятности.

1. Вероятность невозможного события равна нулю: $P(\emptyset) = 0$.
2. Вероятность любого события A принадлежит отрезку $[0; 1]$:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

3. Вероятность суммы **конечного** числа попарно несовместных

событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

4. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

5. Сумма вероятностей событий A_1, A_2, \dots, A_n , образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$$

6. Для любых событий A и B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

7. Для любых событий A_1, A_2, \dots, A_n (формула включений и исключений):

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - \\ &- P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \dots - P(A_{n-1} \cap A_n) + \\ &+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \dots + P(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) - \\ &\dots \\ &+ (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned}$$

Дальнейшее изложение требует введения понятия условной вероятности. Условная вероятность определяется формулой. **Условная вероятность** события B , при условии, что произошло событие A (отсюда, $P(A) \neq 0$), равна

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Условная вероятность события B , при условии, что произошло событие A , указывает долю элементарных исходов, благоприятствующих событию B и присутствующих в событии A , среди всех элементарных исходов, находящихся в A . Формулу, определяющую условную вероятность, зачастую применяют для вычисления вероятности произведения событий A и B . Она именуется «теоремой умножения»:

7. $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$ (вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного события и условной вероятности другого события, при условии, что первое событие произошло),

8. $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots$
 $\dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$

Независимыми событиями называются такие события, если появление или непоявление одного из них не изменяет вероятности появления другого. Иначе говоря, $P(B|A) = P(B)$. Отсюда, теорема умножения для независимых событий:

9. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ (вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей).

Понятие независимости распространяется и на количество событий, большее двух.

10. События $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если для любых k из этих событий ($k \leq n$)

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

Проверка независимости нескольких событий — задача достаточно трудная. Обычно на практике заранее предполагается, что

независимость имеет место. Независимость событий, как правило, обеспечивается методикой проведения эксперимента. Когда говорят, что события независимы, то обычно подразумевается независимость в совокупности. Заметим, что если любые два события независимы, то отсюда не следует независимости всех событий.

Чтобы лучше понять суть понятия независимость, рассмотрим пример. Представим, что два студента учатся в одной и той же группе, живут в одной и той же комнате общежития и имеют один на двоих учебник. Они готовятся к зачету, и выучили 15 вопросов из 50. Чтобы сдать зачёт, надо ответить на один вопрос, вытягиваемый случайно из кучи вопросов.

Очевидно, что вероятность успеха зависит от того, каким по счету идет студент. Пусть $A = \{\text{студент, идущий первым, ответил на вопрос}\}$, $B = \{\text{студент, идущий вторым, ответил на вопрос}\}$.

Если вопросы не возвращаются в кучу, то студент, идущий первым, вытянет известный ему вопрос с вероятностью $P(A) = \frac{15}{50}$, а вероятность успеха студента, идущего вторым, зависит от того, что случилось с предыдущим студентом. Если первому студенту попался удачный вопрос, то $P(B|A) = \frac{14}{49}$, а если опыт первого студента был неудачен, то $P(B|\bar{A}) = \frac{15}{49}$. Видна зависимость вероятности второго события от наступления или ненаступления первого события, события A и B зависимы.

Если же преподаватель возвращает карточки с вопросами в кучу, то $P(B|A) = \frac{15}{50}$ — вероятность такая же, как если бы первого студента и его выбора не было вообще. В этом случае A и B оказываются независимыми.

12. Из теоремы умножения можно сделать вывод о вероятности

появления хотя бы одного события. Если в результате испытания может появиться n событий A_1, A_2, \dots, A_n , независимых в совокупности, имеющих вероятности p_1, p_2, \dots, p_n соответственно, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$P(A) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_n)$$

12. **Формула полной вероятности.** Пусть в опыте обязательно появляется одно и только одно из попарно несовместных событий H_1, H_2, \dots, H_n (полная группа событий) и A — некоторое событие, тогда:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)$$

13. **Формулы Байеса.** В ситуации, описанной в предыдущем пункте, имеем, что для любого события H_i ($i = 1, 2, \dots, n$) имеет место

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)}$$

4.2. Контрольные вопросы

1. Что понимают под случайным экспериментом, элементарным исходом?
2. Разъясните понятие события.
3. Приведите пример эксперимента, множеств элементарных исходов и событий.
4. Что понимают под невозможным и достоверным событиями?
5. Какие события называют несовместными? Приведите примеры таких событий.
6. Дайте классическое определение вероятности события, запишите его в виде математической формулы.

7. Чему равны вероятности невозможного и достоверного событий?
8. Что называют относительной частотой события? В чем состоит различие между вероятностью события и относительной частотой события? В чем состоит свойство устойчивости относительной частоты?
9. Что называется суммой и произведением событий?
10. Какое событие называется противоположным данному?
11. Какие события называются независимыми?
12. Какие события называются независимыми в совокупности?
13. Пусть несколько событий являются независимыми в совокупности. Являются ли они попарно независимыми? Пусть несколько событий являются попарно независимыми. Являются ли они независимыми в совокупности?
14. Какие события называются зависимыми? Приведите примеры таких событий.
15. Запишите формулу для вероятности совместного появления двух зависимых событий.
16. Дайте определение полной группы событий. Приведите примеры событий, образующих полную группу.
17. Чему равна сумма вероятностей событий, которые образуют полную группу?
18. Запишите формулу вероятности осуществления хотя бы одного из нескольких независимых в совокупности событий?
19. Запишите формулу полной вероятности.
20. Какие события называются гипотезами? Когда применяются формулы Байеса?

4.3. Типовые задачи

Пример 1. В коробке находится 10 шаров. 3 из них красные, 2 зеленые, а остальные белые. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет красным, зеленым или белым.

Решение. Появление красного, зеленого и белого шаров составляют полную группу событий. Обозначим появление красного шара — событие A , появление зеленого — событие B , появление белого — событие C . Тогда в соответствии с формулой классической вероятности:

$$P(A) = \frac{3}{10}, \quad P(B) = \frac{2}{10}, \quad P(C) = \frac{5}{10}.$$

Задача 2. Какова вероятность того, что наудачу выбранное число от 1 до 30 включительно является делителем числа 40?

Решение. Испытание состоит в том, что выбирается наудачу целое число. Число всех возможных исходов испытания равно 30. Событие A означает, что наудачу выбранное число является делителем числа 40. Этому событию благоприятствуют семь исходов испытания: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20. Следовательно, по классической схеме получим $P(A) = 7/30$.

Задача 3. Группа туристов из 12 юношей и 8 девушек выбирает по жребию хозяйственную бригаду из трех человек. Какова вероятность того, что в составе этой команды окажется два юноши и одна девушка?

Решение. Испытание состоит в том, что из 20 человек выбираются три. Так как выбор осуществляется по жребию, то все исходы испытания равновозможные и несовместные. Так как осуществляется бесповторный выбор без возвращения и без учета порядка в выбранном подмножестве, то число всех исходов испытания $n = C_{20}^3 = 1140$. Событие A заключается в том, что в составе выбранных окажутся два юноши и одна девушка, тогда число благоприятных исходов по правилу умножения будет равно $m = C_{12}^2 \cdot C_8^1 = 528$. Тогда искомая вероятность $P(A) =$

$$\frac{528}{1140} = \frac{44}{95}.$$

Задача 4. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0.7, а для второго 0.8. Оба стрелка должны сделать по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Найти вероятность того, что в мишень попадёт только один из стрелков.

Решение. Пусть $A_1 = \{\text{в мишень попал первый стрелок}\}$, $A_2 = \{\text{в мишень попал второй стрелок}\}$, тогда событие $A = \{\text{в мишень попал только один стрелок}\}$ состоит из двух **несовместных** случаев, в первом из которых в мишень попал первый стрелок и не попал второй, а во втором случае в мишень попал второй стрелок и не попал первый:

$$A = A_1\bar{A}_2 + A_2\bar{A}_1$$

Так как попадание одного стрелка не зависит от попадания другого, и по несовместности слагаемых в разложении события A , получаем:

$$P(A) = P(A_1)P(\bar{A}_2) + P(A_2)P(\bar{A}_1) = 0.7 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.8 = 0.38$$

Тот же результат можно получить другим способом: находим вероятности того, что оба стрелка попали в цель или оба промахнулись. Эти вероятности, соответственно, равны:

$$P(A_1A_2) = 0.7 \cdot 0.8 = 0.56, \quad P(\bar{A}_1\bar{A}_2) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06.$$

$$\text{Тогда } P(A) = 1 - P(A_1A_2)P(\bar{A}_1\bar{A}_2) = 1 - 0.56 - 0.06 = 0.38$$

Задача 5. Для сообщения об аварии установлены два независимо работающих прибора. Вероятность того, что при аварии срабатывает первый прибор, равна 0.98, для второго прибора такая вероятность равна 0.96. Найти вероятность того, что при аварии поступит сигнал хотя бы от одного прибора.

Решение. Через A обозначим событие, состоящее в том, что сигнал поступит от первого прибора, а через B — от второго. По условию дано, что $P(A) = 0.96$, $P(B) = 0.98$. Событие $A + B$ означает, что об аварии поступит сигнал хотя бы от одного прибора. События A , B совместные, но независимые. Тогда вероятность будет равна

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.96 + 0.98 - 0.96 \cdot 0.98 = 0.9992$$

Так как A и B независимы, то для вычисления искомой вероятности можно использовать иную формулу:

$$P(A + B) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 1 - (1 - 0.96) \cdot (1 - 0.98) = 0.9992.$$

Задача 5. Вероятность выигрыша по одному любому лотерейному билету равна 0.02. Найти вероятность выигрыша хотя бы по одному билету для владельца 4 билетов.

Решение. Условия задачи позволяют применить формулу $P(A) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_n)$. Так как $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0.02$, получим

$$P(A) = 1 - 0.98^4 = 0.0776.$$

Задача 6. Популяция людей насчитывает 19% больных определённой болезнью X . Имеется процедура диагностики этой болезни, которая признаёт пациента больным, при условии, что он реально болен, с вероятностью 0.99, и которая признаёт пациента больным, при условии, что он реально здоров, с вероятностью 0.02. Найти вероятность того, что пришедший на процедуру диагностики пациент будет признан больным.

Решение. Пусть $A = \{\text{пациент признан больным}\}$. Имеем две гипотезы: $H_1 = \{\text{пациент болен}\}$, $H_2 = \{\text{пациент здоров}\}$. Их вероятности, соответственно (следуют из условия задачи), равны

$P(H_1) = 0.19$, $P(H_2) = 0.81$. Условная вероятность признать пациента больным, если он в реальности болен, равна $P(A|H_1) = 0.99$, а условная вероятность признать пациента больным, если он в реальности здоров, равна $P(A|H_2) = 0.02$. Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A) = 0.19 \cdot 0.99 + 0.81 \cdot 0.02 = 0.2043$$

4.4. Задачи для самостоятельного решения

1. В урне находится 12 пронумерованных шаров. Опыт состоит в извлечении одного шара из урны. Требуется:

- 1) составить пространство элементарных событий для данного опыта;
- 2) указать элементарные события (исходы), благоприятствующие событиям: $A = \{\text{появление шара с нечетным номером}\}$, $B = \{\text{появление шара с четным шаром}\}$, $C = \{\text{появление шара с номером большим, чем } 3\}$, $D = \{\text{появление шара с номером меньшим, чем } 7\}$;
- 3) пояснить, что означают события \bar{B} , \bar{C} ;
- 4) указать, какие из пар событий A , B , C , D совместны, а какие нет;
- 5) указать, какие из этих пар событий образуют полную группу, а какие нет;
- 6) привести примеры невозможного и достоверного событий;
- 7) привести пример другого пространства элементарных событий в данном опыте.

2. Игральная кость бросается один раз. Описать пространство элементарных событий, указать элементарные события, благоприятствующие событиям: $A_1 = \{\text{выпало четное число очков}\}$; $A_2 = \{\text{выпало не менее 4 очков}\}$; $A_3 = \{\text{выпало более 6 очков}\}$.

3. Построить пространство Ω для следующих событий:

- 1) проводится одна игра в шахматы;

- 2) трижды подбрасывается монета;
- 3) подсчитывается число студентов группы, сдавших экзамен по математике.

4. Каждый из двух стрелков производит по одному выстрелу в мишень. Пусть $A = \{\text{первый стрелок попал в цель}\}$, $B = \{\text{второй стрелок попал в цель}\}$. Что означают события: а) $A + B$; б) AB ; в) $A\bar{B}$?

5. Три студента независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Пусть $A_1 = \{\text{первый студент решил задачу}\}$, $A_2 = \{\text{второй студент решил задачу}\}$, $A_3 = \{\text{третий студент решил задачу}\}$. Выразить через A_i ($i = 1, 2, 3$) следующие события:

- 1) $A = \{\text{все студенты решили задачу}\}$;
- 2) $B = \{\text{задачу решил только первый студент}\}$;
- 3) $C = \{\text{задачу решил хотя бы один студент}\}$;
- 4) $D = \{\text{задачу решил только один студент}\}$.

6. Из корзины, содержащей красные, желтые и белые розы, выбирается один цветок. Пусть $A = \{\text{выбрана красная роза}\}$, $B = \{\text{выбрана желтая роза}\}$, $C = \{\text{выбрана белая роза}\}$. Что означают события: а) \bar{A} ; б) $A + B$; в) AC ; г) $\bar{A} + \bar{B}$; д) $AB + C$?

7. Пусть A, B, C — три произвольных события. Выразить через A, B, C и их отрицания следующие события:

- 1) произошло только событие C ;
- 2) произошли все три события;
- 3) произошло по крайней мере одно из этих событий;
- 4) произошло по крайней мере два события;
- 5) ни одно событие не произошло;
- 6) произошло не более двух событий.

8. Из четырех карточек с номерами 1, 2, 3, 4 последовательно выбирают две. Составить пространство элементарных событий для этого

опыта, если его элементами служат:

- а) двузначные числа, образованные извлеченными карточками;
- б) суммы номеров, извлеченных карточек.

9. Из колоды игральных карт (всего их 36) извлекают одну. Составить не менее двух пространств элементарных событий для данного опыта.

10. Подбрасываются три монеты. Сколько имеется равновозможных исходов данного опыта? Составить события образующие полную группу. Привести примеры событий, не образующих полную группу. Указать подмножества множества Ω , соответствующие событиям: $A = \{\text{выпало не более одной решки}\}$; $B = \{\text{выпало ровно два герба}\}$.

11. На 6 одинаковых карточках написаны буквы «а», «в», «к», «М», «о», «с». Эти карточки наудачу разложены в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «Москва»?

12. В урне 4 белых и 5 черных шара. Из этой урны наудачу извлечены 3 шара. Какова вероятность того, что эти шары разного цвета? Одного цвета? Из них два белых и один черный? **13.** Какова вероятность того, что в написанном наудачу трехзначном числе две цифры одинаковы, а третья отличается от них?

14. В некоторый день недели во всех классах школы должно быть по 6 уроков. В этот день случайным образом ставятся в расписание 3 урока одного учителя и 2 урока другого. Какова вероятность того, что эти учителя не будут одновременно заняты?

15. 5 человек случайным образом рассаживаются на десятиместную скамейку. Какова вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом?

16. В ящике содержится 10 деталей, из них 6 без дефектов. Наудачу отбираются три детали. Найти вероятность того, что среди отобранных

окажется: а) все три без дефектов; б) все три с дефектом; в) две без дефектов и одна с дефектом.

17. В группе 5 юношей и 21 девушка. По жребию разыгрывают 3 билета в театр. Какова вероятность, что в театр пойдут: а) три девушки; б) две девушки и юноша; в) лица одного пола.

18. В классе 40 учеников, из которых 10 отличников. Класс наудачу разделен на две равные части. Какова вероятность того, что в каждой части по 5 отличников?

19. На 10 карточках написаны буквы «а», «а», «а», «м», «м», «т», «т», «е», «и», «к». После тщательного перемешивания карточки раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «математика»?

20. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что на костях выпадает четное число? Число очков, равное 10? Число очков, большее 10?

21. Цифры 1, 2, 3, 4 и 5 написаны на карточках и тщательно перемешаны. Случайным образом эти карточки разложены в ряд. Какова вероятность того, что получим четное число?

22. В урне 5 белых и 5 черных шаров. Из этой урны последовательно извлечены все шары по одному и разложены в ряд. Какова вероятность того, что цвета шаров чередуются?

23. Наудачу выбирают 5 военнослужащих из группы, состоящей из 4 офицеров и 12 солдат. Какова вероятность того, что в группе не более двух офицеров?

24. Владелец одной карточки лотереи «Спортлото» (6 из 49) зачеркивает 6 номеров. Какова вероятность того, что им будет угадано: а) все 6 номеров в очередном тираже; б) 5 или 6 номеров; в) по крайней мере 3 номера?

25. Из 980 абитуриентов, подавших заявление на первый курс университета, было зачислено 490 человек. Определить относительную частоту события {абитуриент зачислен}.

26. В группе из 25 студентов трое сдали экзамен по теории вероятностей на 5, шесть человек получили оценку 4, двенадцать 3, остальные 2. Определить относительную частоту события {экзамен сдан}.

27. На склад торгового центра завезено 120 мешков сахарного песка. Среди этих мешков 10 имели избыточную влажность. Для продажи случайно отобрали и расфасовали 15 мешков. Определить вероятность того, что на расфасовку поступило 2 мешка с избыточной влажностью.

28. Два стрелка сделали по одному выстрелу по мишени. Известно, что вероятность попадания в мишень для одного из стрелков равна 0.6, а для другого 0.7. Найдите вероятность того, что:

- а) только один из стрелков попадет в мишень;
- б) хотя бы один из стрелков попадет в мишень;
- в) оба стрелка попадут в мишень;
- г) ни один из стрелков не попадет в мишень;
- д) ни один из стрелков не попадет в мишень.

29. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна p , а для второго 0.7. Известно, что вероятность ровно одного попадания при одном выстреле обоих стрелков равна 0.38. Найдите p .

30. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0.2. Произведены 3 независимых измерения. Найдите вероятность того, что не более чем в одном измерении допущенная ошибка превысит заданную точность.

31. В ящике 10 деталей, среди которых 7 окрашенных. Сборщик наудачу достает 4 детали. Найдите вероятность того, что все взятые детали окрашенные.

32. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 0.01. Какова вероятность, купив 5 билетов, выиграть: а) по всем пяти билетам; б) ни по одному билету; в) хотя бы по одному билету?

33. Детали проходят 3 операции обработки. Вероятность получения брака на первой операции равна 0.02; на второй 0.03; на третьей 0.02. Найдите вероятность получения детали без брака после трех операций, предполагая, что получения брака на отдельных операциях являются независимыми событиями.

34. Для некоторого студента вероятность сдать первый экзамен равна 0.8; второй экзамен 0.9; третий 0.7. Определить вероятность того, что этот студент сдаст: а) все три экзамена; б) сдаст только один экзамен; в) сдаст хотя бы один экзамен.

35. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при 4 независимых выстрелах равна 0.9984. Найдите вероятность попадания при одном выстреле.

36. Среди облигаций займа половина выигрышных. Сколько облигаций надо взять, чтобы быть уверенным в выигрыше хотя бы на одну облигацию с вероятностью, большей 0.95?

37. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает ее наудачу. Найдите вероятность того, что ему придется сделать не более чем две неудачные попытки.

38. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.2. Произведено 10 выстрелов. Найдите вероятность поражения цели, если для этого достаточно хотя бы одно попадание.

39. Игра проводится до выигрыша одним из двух игроков двух

партий подряд (ничья исключается). Вероятность выигрыша партии каждым из игроков равна 0.5 и не зависит от исходов предыдущих партий. Найдите вероятность того, что игра окончится до 6 партий.

40. Студент успел подготовить к экзаменам 20 вопросов из 25. Какова вероятность того, что из трёх наудачу выбранных вопросов студент знает не менее двух?

41. Среди изготавливаемых рабочим деталей в среднем 4% брака. Какова вероятность того, что среди взятых на испытание 5 деталей не найдется ни одной бракованной?

42. Ящик содержит 90 годных и 10 дефективных деталей. Сборщик последовательно без возвращения достает из ящика 10 деталей. Найдите вероятность того, что среди взятых деталей: а) нет дефектных; б) хотя бы одна дефектная.

43. Какое событие более вероятно: событие $A = \{\text{при одновременном бросании 4 игральных костей появится хотя бы одна единица}\}$ или событие $B = \{\text{при 24 бросаниях 2 костей появятся хотя бы один раз 2 единицы}\}$?

44. Стрелок выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в неё в начале стрельбы равна 0.8, а после каждого выстрела уменьшается на 0.1. Найдите вероятность того, что он: а) промахнется все 3 раза; б) попадет хотя бы один раз; в) попадет 2 раза.

45. Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый и второй вопросы билета, равны 0.9; на третий — 0.8. Найдите вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить: а) на все вопросы; б) хотя бы на 2 вопроса.

46. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0.3, второй — 0.4, третий —

0.5. По условиям приема события, состоящее в том, что данный вызов будет услышан, независимы. Найти вероятность того, что корреспондент вообще услышит вызов.

47. Рабочий обслуживает три станка, работающие независимо друг от друга. Вероятность того, что за смену первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0.9, второй — 0.8, третий — 0.75. Найти вероятность того, что за смену: а) только один станок потребует внимания; б) хотя бы один станок потребует внимания; в) только третий станок потребует внимания рабочего.

48. Четверть билетов лотереи — выигрышные. Сколько билетов надо приобрести, чтобы с вероятностью, не меньшей 0.9, быть уверенным, что выиграет хотя бы один билет?

49. Стрелок производит выстрел по мишени до первого попадания. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0.5. Какова вероятность того, что по мишени будет произведено: а) 7 выстрелов; б) не более 7 выстрелов.

50. Вероятность одного попадания при одном залпе из двух орудий равна 0.35. Найти вероятность попадания при одном выстреле первым орудием, если для второго орудия эта вероятность равна 0,75.

51. При автоматическом изготовлении болтов допускается в среднем 3% брака. Какова вероятность того, что среди взятых для контроля 5 болтов не окажется: а) ни одного бракованного; б) один бракованный.

52. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих шаров наудачу взят один шар. Найдите вероятность того, что взят белый шар.

53. 60% учащихся в школе — девочки. 80% девочек и 75% мальчиков имеют билеты в театр. В учительскую принесли кем-то потерянный

билет. Какова вероятность того, что этот билет принадлежал девочке? Мальчику?

54. С первого станка-автомата на сборку поступают 40%, со второго — 30%, с третьего — 20%, с четвертого — 10% деталей. Среди деталей, выпущенных первым станком, 2% бракованных, вторым — 1%, третьим — 0.5% и четвертым — 0.2%. Найдите вероятность того, что поступившая на сборку деталь небракованная.

55. Из 20 студентов, пришедших на экзамен, 8 подготовлены отлично, 6 — хорошо, 4 — посредственно и 2 — плохо. В экзаменационных билетах имеется 40 вопросов. Студент, подготовленный отлично, знает все вопросы, хорошо — 35, посредственно — 25 и плохо — 10 вопросов. Некоторый студент ответил на все 3 вопроса билета. Найдите вероятность того, что он подготовлен: а) хорошо; б) плохо.

56. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0.8; 7 — с вероятностью 0.7; 4 — с вероятностью 0.6 и 2 — с вероятностью 0.5. Наудачу выбранный стрелок не попал в мишень. К какой группе вероятнее всего принадлежит этот стрелок?

57. Система обнаружения самолета из-за наличия помех в зоне действия локатора может давать ложные показания с вероятностью 0.05, а при наличии цели в зоне система обнаруживает ее с вероятностью 0.9. Вероятность появления противника в зоне равна 0.25. Определить вероятность ложной тревоги.

4.5. Контрольные задания

4.5.1. Контрольная работа №1. События

Вариант 1.

Баскетболист делает три броска в корзину. Определим следующие

события: $B_1 = \{\text{Попадание при первом броске}\}$, $B_2 = \{\text{Попадание при втором броске}\}$, $B_3 = \{\text{Попадание при третьем броске}\}$. Выразить через события B_1, B_2, B_3 указанные ниже события:

- 1) $A = \{\text{Все броски удачны}\}$.
- 2) $B = \{\text{Все броски неудачны}\}$.
- 3) $C = \{\text{Хотя бы один бросок удачный}\}$.
- 4) $D = \{\text{Хотя бы один бросок неудачный}\}$.
- 5) $E = \{\text{Только первый бросок удачный}\}$.
- 6) $F = \{\text{Только один бросок удачный}\}$.
- 7) $G = \{\text{Только первый бросок неудачный}\}$.
- 8) $H = \{\text{Только один бросок неудачный}\}$.
- 9) $I = \{\text{Неправда, что все броски удачны}\}$.
- 10) $J = \{\text{Неправда, что хотя бы один бросок удачный}\}$

Вариант 2.

Три прыгуна пытаются взять некоторую высоту. Определим следующие события: $A_1 = \{\text{Первый прыгун взял высоту}\}$, $A_2 = \{\text{Второй прыгун взял высоту}\}$, $A_3 = \{\text{Третий прыгун взял высоту}\}$. Выразить через события A_1, A_2, A_3 указанные ниже события:

- 1) $A = \{\text{Только первый прыгун не взял высоту}\}$.
- 2) $B = \{\text{Только один прыгун не взял высоту}\}$.
- 3) $C = \{\text{Неправда, что все прыгуны взяли высоту}\}$.
- 4) $D = \{\text{Неправда, что все прыгуны не взяли высоту}\}$.
- 5) $E = \{\text{Только второй прыгун взял высоту}\}$.
- 6) $F = \{\text{Хотя бы два прыгуна взяли высоту}\}$.
- 7) $G = \{\text{Хотя бы один прыгун взял высоту}\}$.
- 8) $H = \{\text{Хотя бы один прыгун не взял высоту}\}$.
- 9) $I = \{\text{Ни один из прыгунов не взял высоту}\}$.
- 10) $J = \{\text{Все прыгуны взяли высоту}\}$.

Вариант 3.

Три команды пытаются выйти в следующий круг игр. Определим следующие события: $C_1 = \{\text{Первая команда прошла в следующий круг}\}$, $C_2 = \{\text{Вторая команда прошла в следующий круг}\}$, $C_3 = \{\text{Третья команда прошла в следующий круг}\}$. Выразить через события C_1, C_2, C_3 указанные ниже события:

- 1) $A = \{\text{Только одна команда прошла в следующий круг}\}$.
- 2) $B = \{\text{Хотя бы одна команда прошла в следующий круг}\}$.
- 3) $C = \{\text{Ни одна команда не прошла в следующий круг}\}$.
- 4) $D = \{\text{Хотя бы одна команда не прошла в следующий круг}\}$.
- 5) $E = \{\text{Все команды прошли в следующий круг}\}$.
- 6) $F = \{\text{Неправда, что все команды прошли в следующий круг}\}$.
- 7) $G = \{\text{Неправда, что ни одна команда не прошла в следующий круг}\}$.
- 8) $H = \{\text{Только первая команда прошла в следующий круг}\}$.
- 9) $I = \{\text{Только две команды прошли в следующий круг}\}$.
- 10) $J = \{\text{Только вторая команда не прошла в следующий круг}\}$.

Вариант 4.

Три студента пришли в караоке-бар. Определим следующие события: $C_1 = \{\text{Первый студент умеет петь}\}$, $C_2 = \{\text{Второй студент умеет петь}\}$, $C_3 = \{\text{Третий студент умеет петь}\}$. Выразить через события C_1, C_2, C_3 указанные ниже события:

- 1) $A = \{\text{Неправда, что все студенты умеют петь}\}$.
- 2) $B = \{\text{Неправда, что ни один студент не умеет петь}\}$.
- 3) $C = \{\text{Только первый студент умеет петь}\}$.
- 4) $D = \{\text{Только третий студент не умеет петь}\}$.
- 5) $E = \{\text{Хотя бы один студент умеет петь}\}$.
- 6) $F = \{\text{Хотя бы один студент не умеет петь}\}$.
- 7) $G = \{\text{Хотя бы два студента не умеют петь}\}$.

8) $H = \{\text{Хотя бы два студента умеют петь}\}.$

9) $I = \{\text{Ни один студент не умеет петь}\}.$

10) $J = \{\text{Все студенты умеют петь}\}.$

Вариант 5.

Три студента сдают экзамен по прикладной статистике. Определим следующие события: $B_1 = \{\text{Первый студент сдал экзамен}\}$, $B_2 = \{\text{Второй студент сдал экзамен}\}$, $B_3 = \{\text{Третий студент сдал экзамен}\}$. Выразить через события B_1, B_2, B_3 указанные ниже события:

1) $A = \{\text{Хотя бы один студент сдал экзамен}\}.$

2) $B = \{\text{Хотя бы один студент не сдал экзамен}\}.$

3) $C = \{\text{Хотя бы два студента сдали экзамен}\}.$

4) $D = \{\text{Хотя бы два студента не сдали экзамен}\}.$

5) $E = \{\text{Все студенты сдали экзамен}\}.$

6) $F = \{\text{Все студенты не сдали экзамен}\}.$

7) $G = \{\text{Неправда, что все студенты сдали экзамен}\}.$

8) $H = \{\text{Неправда, что хотя бы один студент сдал экзамен}\}.$

9) $I = \{\text{Только первый студент сдал экзамен}\}.$

10) $J = \{\text{Только третий студент не сдал экзамен}\}.$

Вариант 6.

Три студента пошли в кино на некоторый фильм. Определим события: $B_1 = \{\text{Первому студенту понравился фильм}\}$, $B_2 = \{\text{Второму студенту понравился фильм}\}$, $B_3 = \{\text{Третьему студенту понравился фильм}\}$. Выразить через события B_1, B_2, B_3 указанные ниже события:

1) $A = \{\text{Всем студентам понравился фильм}\}.$

2) $B = \{\text{Ни одному студенту фильм не понравился}\}.$

3) $C = \{\text{Хотя бы одному студенту фильм не понравился}\}.$

4) $D = \{\text{Только одному студенту фильм не понравился}\}.$

5) $E = \{\text{Только первому студенту фильм понравился}\}.$

- 6) $F = \{\text{Только третьему студенту фильм не понравился}\}.$
- 7) $G = \{\text{Только двум студентам фильм понравился}\}.$
- 8) $H = \{\text{Хотя бы двум студентам фильм понравился}\}.$
- 9) $I = \{\text{Неправда, что фильм никому не понравился}\}.$
- 10) $J = \{\text{Неправда, что хотя бы одному студенту фильм понравился}\}.$

Вариант 7.

Три лыжника бегут дистанцию. Определим события: $L_1 = \{\text{Первый лыжник прошел дистанцию за нормативное время}\}$, $L_2 = \{\text{Второй лыжник прошел дистанцию за нормативное время}\}$, $L_3 = \{\text{Третий лыжник прошел дистанцию за нормативное время}\}$. Выразить через события L_1, L_2, L_3 указанные ниже события:

- 1) $A = \{\text{Только первый лыжник прошел дистанцию за нормативное время}\}.$
- 2) $B = \{\text{Только один лыжник прошел дистанцию за нормативное время}\}.$
- 3) $C = \{\text{Все лыжники прошли дистанцию за нормативное время}\}.$
- 4) $D = \{\text{Все лыжники не прошли дистанцию за нормативное время}\}.$
- 5) $E = \{\text{Неправда, что все лыжники прошли дистанцию за нормативное время}\}.$
- 6) $F = \{\text{Неправда, что хотя бы один лыжник прошел дистанцию за нормативное время}\}.$
- 7) $G = \{\text{Хотя бы один лыжник прошел дистанцию за нормативное время}\}.$
- 8) $H = \{\text{Хотя бы один лыжник не прошел дистанцию за нормативное время}\}.$
- 9) $I = \{\text{Хотя бы два лыжника не прошли дистанцию за нормативное время}\}.$
- 10) $J = \{\text{Только два лыжника не прошли дистанцию за нормативное время}\}.$

Вариант 8.

Три студента пошли на войну. Определим события: $A_1 = \{\text{Первый студент вернулся с войны}\}$, $A_2 = \{\text{Второй студент вернулся с войны}\}$, $A_3 = \{\text{Третий студент вернулся с войны}\}$. Выразить через события A_1 , A_2 , A_3 указанные ниже события:

- 1) $A = \{\text{Все студенты вернулись с войны}\}$.
- 2) $B = \{\text{Ни один студент не вернулся с войны}\}$.
- 3) $C = \{\text{Неправда, что хотя бы один студент вернулся с войны}\}$.
- 4) $D = \{\text{Неправда, что хотя бы один студент не вернулся с войны}\}$.
- 5) $E = \{\text{Только первый студент вернулся с войны}\}$.
- 6) $F = \{\text{Только один студент вернулся с войны}\}$.
- 7) $G = \{\text{Хотя бы один студент вернулся с войны}\}$.
- 8) $H = \{\text{Хотя бы один студент не вернулся с войны}\}$.
- 9) $I = \{\text{Только два студента вернулись с войны}\}$.
- 10) $J = \{\text{Хотя бы два студента не вернулись с войны}\}$.

Вариант 9.

Три девицы под окном пряли поздно вечерком и надеялись выйти замуж. Определим события: $A_1 = \{\text{Первая девица вышла замуж}\}$, $A_2 = \{\text{Вторая девица вышла замуж}\}$, $A_3 = \{\text{Третья девица вышла замуж}\}$. Выразить через события A_1 , A_2 , A_3 указанные ниже события:

- 1) $A = \{\text{Ни одна девица не вышла замуж}\}$.
- 2) $B = \{\text{Все девицы вышли замуж}\}$.
- 3) $C = \{\text{Неправда, что хотя бы одна девица вышла замуж}\}$.
- 4) $D = \{\text{Неправда, что хотя бы одна девица не вышла замуж}\}$.
- 5) $E = \{\text{Только третья девица вышла замуж}\}$.
- 6) $F = \{\text{Только одна девица вышла замуж}\}$.
- 7) $G = \{\text{Хотя бы одна девица не вышла замуж}\}$.
- 8) $H = \{\text{Хотя бы одна девица вышла замуж}\}$.

9) $I = \{\text{Только две девицы вышли замуж}\}$.

10) $J = \{\text{Хотя бы две девицы вышли замуж}\}$.

Вариант 10.

Утром выключили свет и три девушки, живущие в одном общежитии, собираясь на занятия, пытаются накраситься в темноте. Определим события: $A_1 = \{\text{Первая студентка накрасилась правильно}\}$, $A_2 = \{\text{Вторая студентка накрасилась правильно}\}$, $A_3 = \{\text{Третья студентка накрасилась правильно}\}$. Выразить через события A_1, A_2, A_3 указанные ниже события:

1) $A = \{\text{Ни одна студентка не накрасилась правильно}\}$.

2) $B = \{\text{Все студентки накрасились правильно}\}$.

3) $C = \{\text{Неправда, что хотя бы одна студентка накрасилась правильно}\}$.

4) $D = \{\text{Неправда, что хотя бы одна студентка не накрасилась правильно}\}$.

5) $E = \{\text{Только третья студентка накрасилась правильно}\}$.

6) $F = \{\text{Только одна студентка накрасилась правильно}\}$.

7) $G = \{\text{Хотя бы одна студентка не накрасилась правильно}\}$.

8) $H = \{\text{Хотя бы одна студентка накрасилась правильно}\}$.

9) $I = \{\text{Только две студентки накрасились правильно}\}$.

10) $J = \{\text{Хотя бы две студентки накрасились правильно}\}$.

4.5.2. Контрольная работа №2. Вероятности

Вариант 1.

1. В группе 20 студентов, среди которых в данный момент 12 здоровы и присутствуют на паре, 4 болеют простудой, а остальные болеют гриппом. Случайным образом последовательно выбирается три фамилии. Найти вероятности того, что...

- 1) все выбранные студенты здоровы.
- 2) все выбранные студенты больны.
- 3) все выбранные студенты болеют гриппом.
- 4) студенты выбраны в таком порядке: здоровый, больной гриппом, больной простудой.
- 5) среди выбранных студентов один здоров, один болен простудой, один болен гриппом.
- 6) среди выбранных студентов один здоров, а двое больны.

2. Два баскетболиста делают по одному броску в разные корзины площадки. Вероятность того, что первый баскетболист попадет в корзину, равна 0.7, а вероятность того, что второй баскетболист попадет в корзину, равна 0.9. Найти вероятности событий:

- 1) $A = \{\text{Оба баскетболиста попадут в корзину}\}$.
- 2) $B = \{\text{Ни один баскетболист не попадет в корзину}\}$.
- 3) $C = \{\text{Хотя бы один баскетболист попадет в корзину}\}$.
- 4) $D = \{\text{Хотя бы один баскетболист не попадет в корзину}\}$.

3. В магазине имеются 20 пар стёкол для автомобильных фар, причём 14 из них выпущены на фабрике «Восход», а остальные из них на фабрике «Закат». Вероятность того, что стекла, изготовленные на фабрике «Восход», имеют брак, равна 0.01, а вероятность того, что стекла, изготовленные на фабрике «Закат», имеют брак, равна 0.02. Найти вероятность того, что случайно выбранное в магазине стекло окажется бракованным.

Вариант 2.

1. В соревновании участвует 19 спортсменов, среди них 5 приехали из России, 9 из Китая, а остальные из США. Случайным образом последовательно выбирается три спортсмена. Найти вероятности того, что...

- 1) все выбранные студенты из России.
- 2) все выбранные студенты не из России.
- 3) все выбранные студенты либо из Китая, либо из США.
- 4) студенты выбраны в таком порядке: из Китая, из России, из США.
- 5) среди выбранных студентов один из Китая, один из России, один из США.
- 6) среди выбранных студентов один из Китая, а двое не из Китая.

2. Два стрелка делают по одному выстрелу в разные мишени. Вероятность того, что первый стрелок попадет в мишень, равна 0.9, а вероятность того, что второй стрелок попадет в мишень, равна 0.6. Найти вероятности следующих событий:

- 1) $A = \{\text{Оба стрелка попадут в мишени}\}$.
- 2) $B = \{\text{Ни один стрелок не попадет в мишень}\}$.
- 3) $C = \{\text{Хотя бы один стрелок попадет в мишень}\}$.
- 4) $D = \{\text{Хотя бы один стрелок не попадет в мишень}\}$.

3. В магазине имеются 30 офисных стульев, причём 13 из них выпущены на фабрике «Милка», а остальные из них на фабрике «Киска». Вероятность того, что стул, изготовленный на фабрике «Милка», имеет скрытый брак, равна 0.05, а вероятность того, что стул, изготовленный на фабрике «Киска», имеет скрытый брак, равна 0.07. Найти вероятность того, что случайно выбранный в магазине стул окажется бракованным.

Вариант 3.

1. На уроке физкультуры присутствовало 15 детей. Из них 5 детей смогли выполнить упражнение менее 10 раз, 7 детей выполнили упражнение от 11 до 15 раз, а остальные смогли выполнить упражнение от 16 и более раз. Случайным образом последовательно выбирается три фамилии. Найти вероятности того, что...

- 1) все выбранные школьники сделали упражнение менее 10 раз.

- 2) все выбранные школьники сделали упражнение не менее 10 раз.
- 3) все выбранные школьники сделали упражнение либо менее 10 раз, либо от 16 раз и более.
- 4) школьники выбраны в таком порядке: сделавший упражнение менее 10 раз, от 16 раз и более, от 11 до 15 раз.
- 5) среди выбранных школьников один сделал упражнение менее 10 раз, один более 15 раз, один от 11 до 15 раз.
- 6) среди выбранных школьников один сделал упражнение не менее 16 раз, а остальные сделали упражнение либо менее 11 раз, либо от 11 до 15 раз.

2. Два бегуна стремятся пробежать 100 метров менее, чем за 15 секунд. Вероятность того, что первый бегун сделает это, равна 0.6, а вероятность того, что второй бегун сделает это, равна 0.5. Найти вероятности следующих событий:

- 1) $A = \{\text{Оба бегуна выполняют норматив}\}$.
- 2) $B = \{\text{Ни один бегун не выполнит норматив}\}$.
- 3) $C = \{\text{Хотя бы один бегун выполнит норматив}\}$.
- 4) $D = \{\text{Хотя бы один бегун не выполнит норматив}\}$.

3. В магазине имеются 90 пакетов кефира, причём 55 из них выпущены на фабрике «Янта», а остальные из них на фабрике «Молочный остров». Вероятность того, что кефир, изготовленный на фабрике «Янта», испортился до конца срока годности, равна 0.03, а вероятность того, что кефир, изготовленный на фабрике «Молочный остров», испортился до конца срока годности, равна 0.09. Найти вероятность того, что случайно выбранный в магазине пакет кефира окажется испорченным.

Вариант 4.

1. В продаже 7 видов зубной пасты для детей, 10 видов пасты

для взрослых и 3 вида универсальных (для взрослых и детей). Случайным образом последовательно выбирается три наименования. Найти вероятности того, что...

- 1) все выбранные зубные пасты универсальные.
- 2) все выбранные зубные пасты не универсальные.
- 3) все выбранные пасты либо взрослые, либо универсальные.
- 4) пасты выбраны в таком порядке: универсальная, детская, взрослая.
- 5) среди выбранных паст одна детская, одна взрослая, одна универсальная.
- 6) среди выбранных паст одна универсальная, а остальные либо детские, либо взрослые.

2. Мастер и ученик мастера пытаются выточить из металлических заготовок сложную деталь. Вероятность того, что мастер сделает это без брака, равна 0.8, а вероятность того, что ученик сделает это без брака, равна 0.3. Найти вероятности следующих событий:

- 1) $A = \{\text{И мастер, и ученик сделают детали без брака}\}$.
- 2) $B = \{\text{Ни мастер, ни ученик не сделают детали без брака}\}$.
- 3) $C = \{\text{Хотя бы один из рабочих сделает деталь без брака}\}$.
- 4) $D = \{\text{Хотя бы один из рабочих не сделает деталь без брака}\}$.

3. В природе найдено 117 особей какомицли: с длинным хвостом и голубыми глазами (их насчитывается 36 от всей численности животных данного вида) и с коротким хвостом и карими глазами (остальные особи). Среди какомицли с длинным хвостом и голубыми глазами болеют болезнью Старка 3% особей, среди какомицли с коротким хвостом и карими глазами этой болезнью страдают 4% особей. Найти вероятность того, что случайно пойманный какомицли страдает от болезни Старка

Вариант 5.

1. В аудитории сидит 13 студентов, у 8 из них смартфоны на

android, у трех iphone, а у остальных обычные телефоны, не смартфоны. Случайным образом последовательно выбирается три студента. Найти вероятности того, что...

- 1) у всех выбранных студентов iphone.
- 2) у всех выбранных студентов не iphone.
- 3) у всех выбранных студентов либо iphone, либо android-смартфон.
- 4) телефоны выбраны в таком порядке: обычный телефон, iphone, android-смартфон.
- 5) среди выбранных телефонов один обычный, один iphone, один android-смартфон.
- 6) среди выбранных телефонов один обычный, а другие либо iphone, либо android-смартфоны.

2. (а) Два студента пытаются сдать экзамен. Вероятность того, что первый студент сделает это, равна 0.4, а вероятность того, что второй студент сделает это, равна 0.5. Найти вероятности следующих событий:

- 1) $A = \{\text{Оба студента сдадут экзамен}\}$.
- 2) $A = \{\text{Ни один студент не сдаст экзамен}\}$.
- 3) $A = \{\text{Хотя бы один студент сдаст экзамен}\}$.
- 4) $A = \{\text{Хотя бы один студент не сдаст экзамен}\}$.

(б) В природе найдено 35 особей виверн: с двумя рожками и раздвоенным языком (их насчитывается 16 от всей численности животных данного вида) и с тремя рожками и цельным языком (остальные особи). Среди виверн первого типа доживают до высыхания крыльев 9% особей, а среди виверн второго типа до указанного возраста доживают 7% особей. Найти вероятность того, что случайно пойманная виверна дожила до возраста высыхания крыльев.

Вариант 6.

1. В аудитории сидит 13 студентов, сдающих зачет. У 5 из них

вопрос по комбинаторике (К), у трех вопрос по теории вероятностей (ТВ), а у остальных вопрос по прикладной статистике (ПС). Случайным образом последовательно выбирается три студента. Найти вероятности того, что...

- 1) у всех выбранных студентов вопросы по К.
- 2) у всех выбранных студентов вопросы не по К.
- 3) у всех выбранных студентов вопросы либо по ТВ, либо по ПС.
- 4) студенты выбраны в таком порядке: вопрос по К, вопрос по ТВ, вопрос по ПС.
- 5) среди выбранных студентов у одного вопрос по К, у одного вопрос по ТВ, у одного вопрос по ПС.
- 6) среди выбранных студентов у одного вопрос по ТВ, а у других либо вопрос по К, либо по ПС.

2. Два шахматиста играют с роботом. Вероятность того, что первый шахматист выиграет у робота, равна 0.6, а вероятность того, что второй шахматист сделает это, равна 0.2. Найти вероятности следующих событий:

- 1) $A = \{\text{Оба шахматиста выиграют у робота}\}$.
- 2) $B = \{\text{Ни один шахматист не выиграет у робота}\}$.
- 3) $C = \{\text{Хотя бы один шахматист выиграет у робота}\}$.
- 4) $D = \{\text{Хотя бы один шахматист не выиграет у робота}\}$.

3. На соревнования по стрельбе отправились 13 девочек и 17 мальчиков. Вероятность того, что девочка из ста возможных очков выбьет не менее девяноста, равна 0.6, а вероятность того, что мальчик из ста возможных очков выбьет не менее девяноста, равна 0.7. Найти вероятность того, что случайно выбранный участник соревнований выбьет не менее девяноста очков.

Вариант 7.

1. В группе студентов-танцоров 4 изучают сальсу, 8 бачату, а 6 кизомбу. Случайным образом последовательно выбирается три студента. Найти вероятности того, что...

- 1) все выбранные студенты изучают кизомбу.
- 2) все выбранные студенты изучают не кизомбу.
- 3) все выбранные студенты либо танцуют сальсу, либо бачату.
- 4) студенты выбраны в таком порядке: танцующие сальсу, потом бачату, потом кизомбу.
- 5) среди выбранных студентов один танцует сальсу, один бачату, один кизомбу.
- 6) среди выбранных студентов один танцует кизомбу, а другие либо сальсу, либо бачату.

2. Два автомобиля участвуют в ралли. Вероятность того, что первый автомобиль доберется до финиша, равна 0.8, а вероятность того, что второй автомобиль доберется до финиша, равна 0.9. Найти вероятности следующих событий:

- 1) $A = \{\text{Оба автомобиля доедут до финиша}\}$.
- 2) $B = \{\text{Ни один автомобиль не доедет до финиша}\}$.
- 3) $C = \{\text{Хотя бы один автомобиль доедет до финиша}\}$.
- 4) $D = \{\text{Хотя бы один автомобиль не доедет до финиша}\}$.

3. В некоторой стране сегодня родилось 66 девочек и 34 мальчика. Вероятность того, что в этой стране девочка доживет до пенсионного возраста в 60 лет, равна 0.7, а вероятность дожить до пенсионного возраста мальчику равна 0.6. Найти вероятность того, что случайно выбранный человек, рождённый сегодня, доживет до пенсионного возраста.

Вариант 8.

1. В группе студентов у 3 есть долг по математике, у 4 долг по

информатике и у 7 долг по психологии (у каждого из них только один долг). Случайным образом последовательно выбирается три студента. Найти вероятности того, что...

- 1) все выбранные студенты имеют долг по психологии.
- 2) все выбранные студенты имеют долг не по психологии.
- 3) все выбранные студенты имеют долг либо по математике, либо по информатике.
- 4) студенты выбраны в таком порядке: долг по математике, долг по информатике, долг по психологии.
- 5) среди выбранных студентов у одного долг по математике, у одного по информатике, у одного по психологии.
- 6) среди выбранных студентов у одного долг по психологии, а у других долг либо по математике, либо по информатике.

2. Два лучника стреляют по мишеням. Вероятность того, что первый лучник попадет в центр мишени, равна 0.7, а вероятность того, что второй лучник попадет в центр мишени, равна 0.9. Найти вероятности следующих событий:

- 1) $A = \{\text{Оба лучника попадут в центр мишени}\}$.
- 2) $B = \{\text{Ни один лучник не попадет в центр мишени}\}$.
- 3) $C = \{\text{Хотя бы один лучник попадет в центр мишени}\}$.
- 4) $D = \{\text{Хотя бы один лучник не попадет в центр мишени}\}$.

3. В ралли участвуют автомобили двух производителей: 15 машин изготовлено на заводе «Камаз», а 5 машин на заводе «Маз». Вероятность того, что автомобиль марки «Камаз» не сломается в дороге, равна 0.9, а для автомобиля марки «Маз» эта вероятность равна 0.8. С какой вероятностью случайно выбранная машина не сломается в дороге?

Вариант 9.

1. У пяти многодетных мам трое детей, у четырёх мам —

четверо детей, и у одной мамы пятеро детей. Случайным образом последовательно выбирается три многодетные мамы. Найти вероятности того, что...

- 1) все выбранные мамы имеют не более троих детей.
- 2) все выбранные мамы имеют менее пятерых детей.
- 3) все выбранные мамы имеют либо именно трёх детей, либо именно пятерых детей.
- 4) мамы выбраны в таком порядке: пятеро детей, четверо детей, трое детей.
- 5) среди выбранных мам у одной пятеро детей, у одной четверо, у одной трое детей.
- 6) среди выбранных мам у одной трое детей, а у других либо четверо детей, либо пятеро детей.

2. Два спортсмена играют в дартс. Вероятность того, что первый спортсмен попадет в центр мишени («глаз быка»), равна 0.7, а вероятность того, что второй стрелок попадет в центр мишени, равна 0.5. Найти вероятности следующих событий:

- 1) $A = \{\text{Оба спортсмена попадут в центр мишени}\}$.
- 2) $B = \{\text{Ни один спортсмен не попадет в центр мишени}\}$.
- 3) $C = \{\text{Хотя бы один спортсмен попадет в центр мишени}\}$.
- 4) $D = \{\text{Хотя бы один спортсмен не попадет в центр мишени}\}$.

(б) Во время эпидемии 6% населения заболевают гриппом. Анализ крови позволяет с вероятностью 0.98 определить больного гриппом, и с вероятностью 0.01 ошибается, признавая больным здорового человека. С какой вероятностью будет признан больным случайно выбранный гражданин?

Вариант 10.

1. В классе 17 детей с карими глазами, 6 с серыми, а 2 — с зелеными

глазами. Случайным образом последовательно выбирается три ребенка. Найти вероятности того, что...

- 1) все выбранные дети с карими глазами.
- 2) все выбранные дети не с карими глазами.
- 3) все выбранные дети либо с карими, либо с зелёными глазами.
- 4) дети выбраны в таком порядке: с зелёными глазами, с серыми глазами, с карими глазами.
- 5) среди выбранных детей один с зелёными глазами, один с серыми глазами, один с карими глазами.
- 6) среди выбранных детей один с зелеными глазами, а другие либо с карими, либо с серыми глазами.

2. Соревнуются два прыгуна на лыжах с трамплина. Вероятность того, что первый спортсмен преодолеет метку в 100 метров, равна 0.6, а для второго эта вероятность равна 0.3. Найти вероятности следующих событий:

- 1) $A = \{\text{Оба спортсмена преодолеют метку в 100 м}\}$.
- 2) $B = \{\text{Ни один спортсмен не преодолеет метку в 100 м}\}$.
- 3) $C = \{\text{Хотя бы один спортсмен преодолеет метку в 100 м}\}$.
- 4) $D = \{\text{Хотя бы один спортсмен не преодолеет метку в 100 м}\}$.

3. В некотором саду собрали 100 ящиков с персиками и 50 ящиков с грушами. Вероятность того, что при перевозке испортится ящик с персиками, равна 0.2, а для ящика с грушами такая вероятность равна 0.1. С какой вероятностью может испортиться случайно выбранный ящик?

5. Схема Бернулли

5.1. Основы теории

Если проводится некоторое количество испытаний, в результате которых может произойти или не произойти событие A , и вероятность появления этого события в каждом из испытаний не зависит от результатов остальных испытаний, то такие испытания называются **независимыми относительно события A** .

Допустим, что событие A наступает в каждом испытании с вероятностью p . Определим вероятность $P_n(k)$ того, что в результате n испытаний событие A наступит ровно k раз.

Эту вероятность можно найти, используя теоремы сложения и умножения вероятностей, как это делалось в рассмотренных выше примерах. Однако при достаточно большом количестве испытаний это приводит к очень трудоемким вычислениям. Таким образом, возникает необходимость разработать общий подход к решению поставленной задачи. Результатом явилась формула Бернулли.

Пусть в результате n независимых испытаний, проведенных в одинаковых условиях, событие A наступает с вероятностью p , а противоположное ему событие — с вероятностью $q = 1 - p$.

Обозначим A_i — наступление события A в испытании с номером i . Так как условия проведения опытов одинаковые, то эти вероятности равны.

Если в результате n опытов событие A наступает ровно k раз, то остальные $n - k$ раз это событие не наступает. Событие A может появиться k раз в n испытаниях в различных комбинациях, число которых равно количеству сочетаний из n элементов по k . Это

количество сочетаний находится по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Вероятность каждой комбинации равна произведению вероятностей:

$$p^k q^{n-k}$$

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получаем **формулу Бернулли**

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k q^{n-k}$$

Из теорем сложения и формулы Бернулли можно получить следующие полезные следствия. Вероятности того, что в n независимых испытаниях

1. успех не произойдет ни разу: $P_n(0) = q^n$;
2. успех появится хотя бы один раз: $P_n(k \geq 1) = 1 - q^n$;
3. все испытания окончатся успехом: $P_n(n) = p^n$;
4. число успехов будет не менее, чем k_1 : $P_n(k \geq k_1) = \sum_{k=k_1}^n P_n(k)$;
5. число успехов будет не более, чем k_2 : $P_n(k \leq k_2) = \sum_{k=0}^{k_2} P_n(k)$;
6. число успехов будет не менее, чем k_1 , но не более, чем k_2 :

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k).$$

Наивероятнейшая частота m появления события A удовлетворяет неравенствам:

$$np - q \leq m < np + p.$$

При достаточно больших n вероятности $P_n(k)$ очень малы, к тому же, их вычисление с помощью формулы Бернулли весьма затруднительно.

Довольно точную оценку дают приближенные формулы, полученные из предельных теорем Муавра-Лапласа.

Верна приближенная формула (следствие локальной теоремы Лапласа):

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ можно найти в статистических таблицах. Эта функция чётна, и при значениях $x > 4$ или $x < -4$ практически неотличима от нуля.

Справедлива формула (следствие интегральной теоремы Муавра-Лапласа):

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Формула дает хорошее приближение, если одновременно $np > 5$ и $nq > 5$.

Значения функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ можно найти в статистических таблицах. Эта функция нечётна, при $x > 4.5$ она практически неотличима от 0.5, а при $x < -4.5$ она очень близка к -0.5 .

В случае, когда n велико, а p мало, справедлива приближённая формула Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np.$$

5.2. Контрольные вопросы

1. Какие испытания называются повторными независимыми? Приведите примеры таких событий.
2. Запишите формулу Бернулли.

3. Что называют наивероятнейшей частотой (наивероятнейшем числом) появления событий? Как найти вероятность наивероятнейшей частоты? Каким неравенствам удовлетворяет наивероятнейшая частота?
4. Сколько может быть значений наивероятнейшей частоты? Какие значения примет наивероятнейшая частота, если: 1) $np - q$ — целое; 2) $np - q$ — не целое?
5. Когда применяется приближённая формула, следствие локальной теоремы Лапласа?
6. Перечислите свойства функции $\varphi(x)$.
7. Когда применяется приближённая формула Пуассона?
8. Когда применяется приближённая формула, следствие интегральной теоремы Лапласа?
9. Перечислите свойства функции $\Phi(x)$.

5.3. Типовые задачи

Задача 1. По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0.4. Найти вероятность того, что в цель попали не менее трех раз.

Решение. Вероятность не менее трех попаданий складывается из вероятности пяти попаданий, четырех попаданий и трех попаданий. Т.к. выстрелы независимы, то можно применить формулу Бернулли. В случае пяти попаданий из пяти возможных:

$$P_5(5) = \frac{5!}{5!0!} \cdot 0.4^5 = 0.01024$$

Четыре попадания из пяти выстрелов:

$$P_5(4) = \frac{5!}{4!1!} \cdot 0.4^4 \cdot 0.6 = 0.0768$$

Три попадания из пяти:

$$P_5(3) = \frac{5!}{3!2!} \cdot 0.4^3 \cdot 0.6^2 = 0.2304$$

Окончательно получаем вероятность не менее трех попаданий из пяти выстрелов:

$$P_5(3 \leq k \leq 5) = 0.01024 + 0.0768 + 0.2304 = 0.31744.$$

Задача 2. В магазин завезли 500 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой равна 0.002. Найти вероятность того, что магазин получит три разбитых бутылки.

Решение. Испытания, которые рассматриваются в задаче, удовлетворяют схеме Бернулли. По условию задачи $n = 500$, $p = 0.002$, $k = 3$. Так как n велико, а вероятность $p = 0.002$ очень мала, воспользуемся формулой Пуассона

$$\lambda = 500 \cdot 0.002 = 1, \quad P_{500}(3) \approx \frac{e^{-1}}{3!} \approx 0.0613$$

Задача 3. По статистическим данным среди специалистов с высшим и средним специальным образованием женщины составляют 60%. На предприятии 240 таких работников. Определить наивероятнейшее число специалистов-мужчин с высшим и средним специальным образованием и соответствующую ему вероятность.

Решение. Имеем: $n = 240$, $p = 0.4$, $q = 0.6$, следовательно, наивероятнейшее количество специалистов-мужчин m находится из неравенства:

$$240 \cdot 0.4 - 0.6 \leq m < 240 \cdot 0.4 + 0.4, \quad 95.4 \leq m \leq 96.4,$$

значит, $m = 96$.

Тогда

$$\begin{aligned} P_{240}(96) &\approx \frac{1}{\sqrt{240 \cdot 0.4 \cdot 0.6}} \varphi\left(\frac{96 - 240 \cdot 0.4}{\sqrt{240 \cdot 0.4 \cdot 0.6}}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{57.6}} \varphi(0) \approx 0.132 \cdot 0.3989 = 0.053 \end{aligned}$$

Задача 4. По результатам проверки качества отобранного для посева зерна всхожесть зерен составляет 80%. Определить вероятность того, что среди отобранных и высаженных 400 зерен прорастет от 270 до 330 штук.

Решение. По условию задачи известно, что $n = 400$, $k_1 = 270$, $k_2 = 330$, $p = 0.8$, $q = 0.2$. Для нахождения вероятности используем интегральную формулу Муавра-Лапласа.

$$\begin{aligned} P_{400}(270 \leq k \leq 330) &\approx \Phi\left(\frac{330 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}}\right) - \Phi\left(\frac{270 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}}\right) = \\ &= \Phi(1.25) - \Phi(-6.25) \approx 0.3944 - (-0.5) = 0.8944 \end{aligned}$$

5.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Вероятность приема радиосигнала при каждой передаче равна 0.8. Найти вероятность того, что при пятикратной передаче сигнал будет принят: а) 4 раза; б) больше четырех; в) не менее четырех раз.

2. Семь студентов, готовясь к экзамену, подготовили 60% вопросов программы. Каждый из них получает вопрос независимо от другого. Какова вероятность, что число студентов, получивших подготовленный вопрос: а) четыре; б) больше четырех.

3. По мишени произведено 3 выстрела. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.7. Найти вероятность n попаданий в мишень, где $n = 0, 1, 2, 3$.

4. Тест содержит 10 вопросов, на которые следует отвечать, используя одно из двух слов: да, нет. Какова вероятность получения не менее 80% правильных ответов, если использовать «метод угадывания»?

5. Письменная работа по математике состоит из 5 задач, причем за решение любой задачи ставится 1 балл. Вероятность решения задачи некоторого студента равна 0.6. Определить вероятность того, что студент получит за работу не менее 4 баллов.

6. В ящике находится 70% стандартных изделий. Найти вероятность того, что из 5 взятых наудачу деталей не более одной окажется нестандартной.

7. Корабль выходит из строя, если получит не менее 5 попаданий в надводную часть или 2 попадания в подводную часть. Найти вероятность выхода из строя корабля при 5 попаданиях, если вероятности попадания в надводную и подводную части при попадании в корабль относятся как семь к трем.

8. Оптовая база снабжает 10 магазинов, от каждого из которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0.7. Найти наивероятнейшее число заявок в день и его вероятность.

9. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.6. Найти наивероятнейшее число попаданий в цель и его вероятность, если произведено 4 выстрела.

10. Рабочий обслуживает 6 станков. Вероятность остановки в течении часа для каждого станка равна 0.7. Найти вероятность того, что в течении часа: а) четыре станка остановятся; б) остановятся хотя бы один.

11. Вероятность изготовления стандартной детали равна 0.8. Найти наивероятнейшее число деталей среди 8 отобранных и его вероятность.

12. Контрольное задание состоит из 5 вопросов, на каждый из

которых дается 4 варианта ответа, причем один из них правильный. Найти вероятность того, что, ученик не зная ни одного вопроса, даст:
а) 3 правильных ответа; б) не менее 3 правильных ответа.

13. В помещении 6 электролампочек. Вероятность того, что каждая лампочка останется исправной в течение года, равна 0.7. Найти: а) вероятность того, что в течение года придется заменить 2 лампочки; б) наимвероятнейшее число лампочек, которые будут работать в течение года.

14. Сколько раз надо подбросить игральную кость, чтобы наимвероятнейшее число выпадения шестерки было равно 5?

15. Жюри состоит из 5 членов, каждый из которых выносит верное решение с вероятностью 0.9. Какова вероятность того, что жюри вынесет верное решение, если решение принимается большинством?

16. При сложной обработке вероятность выхода детали отличного качества равна 0.8. Найти вероятность того, что при обработке 400 деталей, отличного качества будет 300 деталей.

17. Вероятность повреждения электролампы при перевозке равна 0.002. Найти вероятность того, что из 1000 лампочек при перевозке будет повреждено 4 лампы.

18. Вероятность того, что на странице книги могут оказаться опечатки, равна 0.015. Определить вероятность того, что с опечатками окажется не более трех страниц книги, содержащей 620 страниц.

19. Счетчик Гейгера регистрирует частицы, вылетающее из некоторого радиоактивного источника с вероятностью 0.002. какова вероятность того, что счетчик зарегистрировал 4 частицы, если за время наблюдения из источника вылетело 15000 частиц?

20. На первый курс университета поступило 480 человек. Найти наимвероятнейшее число студентов первого курса, проживающих до

поступления в университет в сельской местности и соответствующую ему вероятность, если численность городского населения в этом году составила 66%.

21. Прядильщица обслуживает 100 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течении одной минуты равна 0.002. Найти вероятность того, что в течении минуты произойдет хотя бы один обрыв нити.

22. Установлено, что в среднем 70% посетителей уходят из магазина с покупками. Чему равна вероятность того, что из 250 посетителей магазина покупки сделают: а) 190 человек; б) не менее 160 и не более 200; в) больше 150; г) меньше 200.

23. Предприятие выпускает 40% изделий высшего сорта. Какова вероятность, что среди 400 наудачу отобранных изделий высшего сорта будет: а) не менее 150 и не более 250; б) не менее 200; в) ровно 190.

24. Вероятность рождения мальчика примем равной 0.5. Найти вероятность того, что 200 новорожденных детей будет: а) 100 мальчиков; б) 110 мальчиков; в) от 90 до 110 мальчиков.

25. Вероятность выхода из строя за время t одного конденсатора равна 0.2. найти вероятность того, что за время t из 100 независимо работающих конденсаторов выйдут из строя: а) 25 конденсаторов; б) не менее 20 конденсаторов; в) от 14 до 26 конденсаторов.

26. Кинотеатр вмещает 730 зрителей. Найти вероятность того, что: а) 3 зрителя родились в один день; б) не более 3 зрителей родились в один день.

27. Учебник издан тиражом 10000 экземпляров. Вероятность того, что экземпляр учебника сброшюрован неправильно, равна 0.001. Найти вероятность того, что тираж содержит: а) ровно 5 бракованных книг; б) не более 2 книг; в) хотя бы одна бракованная книга.

5.5. Контрольные задания

Вариант 1.

Баскетболист делает четыре броска в корзину. Успехом считается попадание. Вероятность попадания в одном броске равна $p = 0.8$. Рассчитайте вероятности того, что баскетболист забросит мяч 0, 1, 2, 3, 4 раза. Укажите наиболее вероятное количество успехов. Далее с помощью найденных результатов найдите вероятности: (а) что число попаданий будет не меньше 3; (б) что число попаданий будет не больше 2; (в) что число попаданий будет от 1 до 3.

Вариант 2.

Стрелок делает четыре выстрела по мишени. Успехом считается попадание. Вероятность попадания в одном выстреле равна $p = 0.9$. Рассчитайте вероятности того, что стрелок попадёт в мишень 0, 1, 2, 3, 4 раза. Укажите наиболее вероятное количество успехов. Далее, с помощью найденных результатов, найдите вероятности: (а) что число попаданий будет не меньше 2; (б) что число попаданий будет не больше 3; (в) что число попаданий будет от 1 до 3.

Вариант 3.

Шахматист играет с суперкомпьютером пять игр. Успехом считается выигрыш шахматиста у суперкомпьютера. Вероятность выигрыша шахматиста в одной игре равна $p = 0.4$. Рассчитайте вероятности того, что гроссмейстер выиграет 0, 1, 2, 3, 4, 5 раз. Укажите наиболее вероятное количество успехов. Далее с помощью найденных результатов найдите вероятности: (а) что число выигранных партий будет не меньше 3; (б) что число выигранных партий будет не больше 2; (в) что число выигранных партий будет от 1 до 4.

Вариант 4.

Стрелок из лука делает пять выстрелов по мишени. Успехом считается попадание. Вероятность попадания в одном выстреле равна $p = 0.7$. Рассчитайте вероятности того, что стрелок попадёт в мишень 0, 1, 2, 3, 4, 5 раз. Укажите наиболее вероятное количество успехов. Далее с помощью найденных результатов найдите вероятности: (а) что число попаданий будет не меньше 2; (б) что число попаданий будет не больше 3; (в) что число попаданий будет от 1 до 3.

Вариант 5.

Студент отвечает на вопросы теста наудачу. В тесте 4 вопроса, на каждый из которых по пять ответов, среди которых только один верный. Успехом считается попадание в правильный ответ. Рассчитайте вероятности того, что студент ответит правильно на 0, 1, 2, 3, 4 вопроса. Укажите наиболее вероятное количество успехов. Далее с помощью найденных результатов найдите вероятности: (а) что число правильных ответов будет не меньше 2; (б) что число правильных ответов будет не больше 3; (в) что число правильных ответов будет от в пределах 1 до 3.

Вариант 6.

Швея в ателье гладит пять брюк из синтетической ткани. Вероятность того, что некоторые брюки могут быть прожжены, равна 0.1. Успехом считается случай, когда швея **не прожжет брюки**. Рассчитайте вероятности того, что швея успешно погладит брюки 0, 1, 2, 3, 4, 5 раз. Укажите наиболее вероятное количество успехов. Далее с помощью найденных результатов найдите вероятности: (а) что число успехов будет не меньше 3; (б) что число успехов будет не больше 2; (в) что число успехов будет от в пределах 1 до 4.

Вариант 7.

Молодая мама варит пять дней подряд по утрам манную кашу. Вероятность того, каша подгорит, равна 0.2. Успехом считается случай,

когда мама **не сожжет кашу**. Рассчитайте вероятности того, что мама успешно сварит кашу 0, 1, 2, 3, 4, 5 раз. Укажите наиболее вероятное количество успехов. Далее с помощью найденных результатов найдите вероятности: (а) что число успехов будет не меньше 3; (б) что число успехов будет не больше 2; (в) что число успехов будет от в пределах 1 до 4.

Вариант 8.

Забайкальский огородник наблюдает погоду в первые четыре дня июня. Вероятность того, что может случиться утренний заморозок, равна 0.1. Успехом считается то, что заморозок **не произойдет**. Рассчитайте вероятности того, что заморозка не будет 0, 1, 2, 3, 4 раза. Укажите наиболее вероятное количество успехов. Далее с помощью найденных результатов найдите вероятности: (а) что число успехов будет не меньше 2; (б) что число успехов будет не больше 3; (в) что число успехов будет от в пределах 1 до 3.

Вариант 9.

Принц ищет себе невесту среди пяти принцесс соседних королевств. Известно, что, в среднем, среди пяти принцесс четыре обладают вредным характером. Успехом считается то, что принцесса **не обладает вредным характером**. Рассчитайте вероятности того, что среди наблюдаемых принцесс 0, 1, 2, 3, 4, 5 не обладают вредным характером. Укажите наиболее вероятное количество успехов. Далее с помощью найденных результатов найдите вероятности: (а) что число успехов будет не меньше 4; (б) что число успехов будет не больше 4; (в) что число успехов будет от в пределах 1 до 3.

Вариант 10.

В утренней спешке Петя не глядя выбирает пару носков. Успехом считается то, что носки **одинакового цвета**. Вероятность успеха равна

0.8. Всего Петя собирается в спешке пять дней в неделю. Рассчитайте вероятности того, что Петя выберет носки одинакового цвета 0, 1, 2, 3, 4, 5 раз за неделю. Укажите наиболее вероятное количество успехов. Далее с помощью найденных результатов найдите вероятности: (а) что число успехов будет не меньше 3; (б) что число успехов будет не больше 2; (в) что число успехов будет от v в пределах 1 до 4.

6. Случайные величины и их числовые характеристики

6.1. Основы теории

Случайной величиной называют величину, которая в результате испытания может принимать одно и только одно возможное значение с определенной вероятностью.

Замечание 2. Указанное предложение не является точным определением случайной величины. Для интересующихся приводим его здесь более мелким текстом.

Случайной величиной называется вещественная числовая функция $\xi(\omega)$, определенная на множестве Ω исходов случайного эксперимента, и обладающая свойством измеримости: для любого числа $x \in \mathbb{R}$ множество элементарных исходов ω , для которых значение случайной величины $\xi(\omega) < x$, принадлежит сигма-алгебре событий Σ .

Различают **дискретные** и **непрерывные** случайные величины.

Дискретной называется случайная величина, множество значений которой либо конечно, либо счетно.

Непрерывной называется случайная величина, которая может принимать любые значения из некоторых промежутков числовой прямой.

Особым образом рассмотрим дискретный случай.

Законом распределения случайной величины называется некоторое соответствие между значениями этой величины и вероятностями.

Для дискретной случайной величины X закон распределения удобно

задавать в виде таблицы:

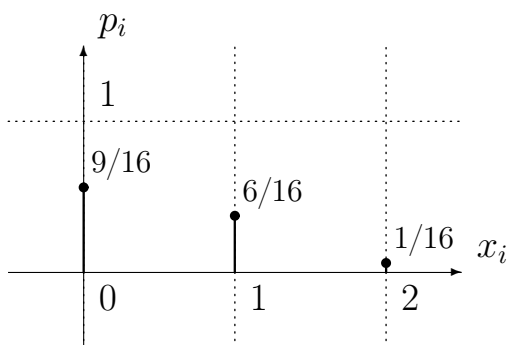
значения X	x_1	x_2	\dots	x_i	\dots
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	\dots	p_i	\dots

События $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n, \dots$ образуют полную группу, поэтому сумма вероятностей всех значений дискретной случайной величины равна единице: $\sum_i p_i = 1$. Это соотношение используют для проверки правильности составления закона распределения дискретной случайной величины.

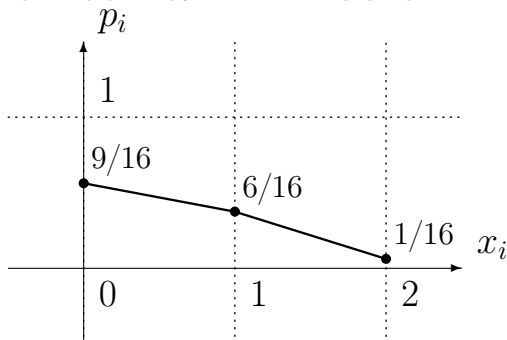
Дискретное распределение вероятностей можно изобразить столбиковой диаграммой — фигурой, состоящей из вертикальных отрезков, основания которых находятся в точках x_i , а длины этих отрезков равны, соответственно, p_i . Например, столбиковая диаграмма для распределения

x_i	0	1	2
p_i	9/16	6/16	1/16

имеет вид



Точки диаграммы могут быть соединены отрезками, получается так называемый **полигон относительных частот**.



Замечание 3. Полигон обычно используется для графического представления группированных данных, полученных из генеральной совокупности с непрерывным распределением, так как он является **аналогом функции плотности непрерывного распределения**. При этом ординаты точек совпадают с относительными частотами группированных значений выборки.

Важной характеристикой случайной величины является **функция распределения** $F(x)$, определяемая равенством: $F(x) = P(X < x)$. Эту функцию можно составить и для дискретной и для непрерывной случайной величины.

Для дискретной случайной величины с конечным множеством значений x_i ($i = 1, 2, \dots$) функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq x_1, \\ p_1, & \text{если } x_1 < x \leq x_2, \\ p_1 + p_2, & \text{если } x_2 < x \leq x_3, \\ \dots & \dots \\ p_1 + \dots + p_{n-1}, & \text{если } x_{n-1} < x \leq x_n, \\ 1, & \text{если } x_n < x. \end{cases}$$

Укажем важные свойства функции распределения:

1. Функция распределения является **неубывающей**. Для любых значений $a, b \in \mathbb{R}$ аргумента x выполняется следование: если $a < b$, то $F(a) \leq F(b)$.
2. Функция распределения является **ограниченной**: $0 \leq F(x) \leq 1$. Кроме того, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ (график функции распределения в направлении к $-\infty$ приближается к прямой $y = 0$ или сливается с ней, а в направлении к $+\infty$ приближается к прямой $y = 1$ или сливается с ней).

3. Функция распределения непрерывна слева: $\lim_{x \rightarrow a-0} F(x) = F(a)$.
4. $P(a < x < b) = F(b) - F(a)$.

Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называется число, равное сумме произведений всех значений этой величины на их вероятности:

$$M(X) = \sum_i x_i \cdot p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 \dots$$

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины.

Свойства математического ожидания:

1. $M(C) = C$ — математическое ожидание постоянной равно самой постоянной.
2. $M(CX) = CM(X)$ — постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания.
3. $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$ — математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий.
4. Если величины X и Y **независимы**, то математическое ожидание произведения этих величин равно произведению их математических ожиданий: $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

Свойства 3 и 4 могут быть обобщены на случай любого числа случайных величин.

Помимо среднего значения для случайной величины важно уметь характеризовать рассеяние её значений относительно математического ожидания. **Дисперсией** $D(X)$ случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения значений случайной величины от её математического ожидания: $D(X) = M((X - M(X))^2)$.

Свойства дисперсии:

1. $D(X) \geq 0$ — дисперсия случайной величины есть неотрицательное число.
2. $D(C) = 0$ — дисперсия постоянной величины равна нулю.
3. $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$ — постоянный множитель выносится за знак дисперсии в квадрате.
4. $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$ — дисперсия суммы **независимых** случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.
5. $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$ — дисперсия разности **независимых** случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

На практике для вычисления дисперсии удобнее использовать формулу: $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$, согласно которой для вычисления дисперсии от математического ожидания квадрата случайной величины X нужно вычесть квадрат её математического ожидания.

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется число, равное квадратному корню из дисперсии этой величины: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

6.2. Контрольные вопросы

1. Что такое случайная величина?
2. Назовите основные виды случайных величин.
3. Каково множество значений дискретной случайной величины?
4. Приведите примеры дискретных случайных величин.
5. Что называют законом распределения дискретной случайной величины?
6. Что такое столбиковая диаграмма?
7. Как определяется функция распределения $F(X)$?
8. Перечислите основные свойства функции распределения $F(X)$.

9. Выразите вероятность события $\{a < X < b\}$ с помощью функции распределения.
10. Как определяется математическое ожидание дискретной случайной величины?
11. Что характеризует математическое ожидание дискретной случайной величины?
12. Перечислите основные свойства математического ожидания.
13. Как определяются дисперсия и среднее квадратическое отклонение? Что можно сказать об их размерности?
14. Выведите формулу: $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.
15. Укажите свойства дисперсии.

6.3. Типовые задачи

Задача 1. В группе 20 студентов. По результатам экзаменационной сессии 15 студентов получают академическую стипендию, причем 6 из них — повышенную. Составить закон распределения случайной величины X — размера стипендии для наудачу выбранного студента этой группы, если академическая стипендия составляет 2300 руб., а повышенная — 3200 руб.

Решение. Чтобы составить закон распределения случайной величины, нужно перечислить её значения и указать их вероятности. Случайная величина X (размер стипендии) может принимать следующие значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 2300$, $x_3 = 3200$. Вероятности этих значений определим по классической схеме: $P(X = 0) = 5/20 = 0.25$, так как всего исходов 20, а благоприятных событию $X = 0$ (студент не получает стипендию) всего 5 исходов. Рассуждая похожим образом, получаем: $P(X = 2300) = 9/20 = 0.45$, $P(X = 3200) = 6/20 = 0.3$.

Закон распределения этой случайной величины имеет вид:

x_i	0	2300	3200
p_i	0.25	0.45	0.3

Проверим правильность решения, найдя сумму всех вероятностей:

$$\sum_{i=1}^3 p_i = 0.25 + 0.45 + 0.3 = 1$$

Задача 2. С вероятностью попадания при одном выстреле 0.7 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более четырёх выстрелов. Построить закон распределения случайной величины X — числа промахов. Составить функцию распределения этой случайной величины.

Решение. Случайная величина X — число промахов — может принимать следующие значения: 0, 1, 2, 3, 4.

Число промахов X будет равно 0, если охотник сразу попадет в дичь, т.е. $P(X = 0) = 0.7$.

Случайная величина примет значение, равное 1, если при первом выстреле охотник промахнётся, а при втором попадёт в дичь. Тогда $P(X = 1) = 0.3 \cdot 0.7 = 0.21$.

Охотник совершит два промаха при трёх выстрелах следующим образом: первый выстрел — промах, второй выстрел — промах, а третий — попадание. Вероятность такого случая $P(X = 2) = 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 0.063$.

Вероятность трёх промахов: $P(X = 3) = 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 0.0189$.

Случайная величина примет значение равное 4, если все четыре выстрела закончились промахом. $P(X = 4) = 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.3 = 0.0081$.

Таким образом, закон распределения числа промахов при стрельбе

по дичи имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0.7	0.21	0.063	0.0189	0.0081

Это пример **геометрического** распределения.

Проверка:

$$\sum_{i=1}^5 p_i = 0.7 + 0.21 + 0.063 + 0.0189 + 0.0081 = 1$$

Составим функцию распределения этой случайной величины. Имеем по определению, $F(x) = P(X < x)$.

Если $x \leq 0$, то событие $X < x \leq 0$ невозможно, т.к. случайная величина X не может принимать значения меньше 0, тогда для $x < 0$ $F(x) = 0$.

Пусть $0 < x \leq 1$, тогда $F(x) = P(X < 1) = P(X = 0) = 0.7$.

Если $1 < x \leq 2$, то $F(x) = P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.7 + 0.21 = 0.91$.

При $2 < x \leq 3$ $F(x) = P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.7 + 0.21 + 0.063 = 0.973$.

Для $3 < x \leq 4$, $F(x) = P(X < 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0.7 + 0.21 + 0.063 + 0.0189 = 0.9919$.

При $x > 4$ $F(x) = 1$.

Итак, получили функцию распределения случайной величины X —

числа промахов при стрельбе по дичи.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ 0.7, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 0.91, & \text{если } 1 < x \leq 2, \\ 0.973, & \text{если } 2 < x \leq 3, \\ 0.9919, & \text{если } 3 < x \leq 4, \\ 1, & \text{если } 4 < x. \end{cases}$$

Задача 3. В коробке 10 одинаковых карандашей, из них 4 красных, а остальные синие. Наудачу выбирают 3 карандаша. Составить закон распределения случайной величины X — числа красных карандашей среди выбранных. Найти числовые характеристики этой случайной величины.

Решение. Случайная величина может принимать значения $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Если $X = 0$, то это значит, что среди выбранных карандашей нет красных, т.е. все синие, и вероятность того, что случайная величина примет такое значение, равна:

$$P(X = 0) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

Значение случайной величины, равное 1, означает, что среди выбранных карандашей один красный и два синих.

$$P(X = 1) = \frac{C_4^1 \cdot C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{4 \cdot 15}{120} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}.$$

Если $X = 2$, то в выборке два красных и один синий карандаш.

$$P(X = 2) = \frac{C_4^2 \cdot C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{6 \cdot 6}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}.$$

Для $X = 3$ выборка состоит только из красных карандашей.

$$P(X = 3) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}.$$

Составим закон распределения этой случайной величины:

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

Проверим правильность составления закона:

$$\sum_{i=1}^4 p_i = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = \frac{5 + 15 + 9 + 1}{30} = 1$$

Вычислим числовые характеристики этой случайной величины.

Найдем математическое ожидание:

$$M(X) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{1}{30} = \frac{6}{5}.$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся известной формулой:

$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$. Имеем:

$$M(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{3}{10} + 3^2 \cdot \frac{1}{30} = 2.$$

Тогда

$$D(X) = 2 - \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{14}{25} = 0.56$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{14}{25}} = \frac{\sqrt{14}}{5} \approx 0.748$$

Задача 4. Независимые случайные величины X и Y имеют следующие законы распределения вероятностей:

x_i	1	4	y_j	-1	2
p_i	0.3	0.7	p_j	0.8	0.2

Найти закон распределения вероятностей и все числовые характеристики случайной величины $Z = 2X - Y + 3$ а) по свойствам числовых характеристик; б) по определению.

Решение. а) Найдем математическое ожидание случайной величины Z , используя свойства этой характеристики:

$$M(Z) = M(2X - Y + 3) = 2M(X) - M(Y) + 3.$$

Законы распределений случайных величин X и Y известны, найдём их математические ожидания.

$$M(X) = 1 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.7 = 3.1; \quad M(Y) = -1 \cdot 0.8 + 2 \cdot 0.2 = -0.4.$$

Тогда $M(Z) = 2 \cdot 3.1 - (-0.4) + 3 = 9.6$.

Аналогичным образом найдём дисперсию Z , используя свойства дисперсии:

$$D(Z) = D(2X - Y + 3) = 4D(X) + D(Y).$$

Вычислим $D(X)$ и $D(Y)$:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2; \quad D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2;$$

$$M(X^2) = 1 \cdot 0.3 + 16 \cdot 0.7 = 11.5; \quad M(Y^2) = 1 \cdot 0.8 + 4 \cdot 0.2 = 1.6;$$

$$D(X) = 11.5 - (3.1)^2 = 1.89; \quad D(Y) = 1.6 - (-0.4)^2 = 1.44.$$

Получим $D(Z) = 4D(X) + D(Y) = 4 \cdot 1.89 + 1.44 = 9$.

$$\sigma(Z) = \sqrt{D(Z)} = \sqrt{9} = 3.$$

б) Чтобы найти числовые характеристики случайной величины Z , используя их определения, нам необходимо составить закон распределения этой случайной величины. Найдём значения Z .

$$Z(X = 1, Y = -1) = 2 \cdot 1 - (-1) + 3 = 6;$$

$$Z(X = 1, Y = 2) = 2 \cdot 1 - 2 + 3 = 3;$$

$$Z(X = 4, Y = -1) = 2 \cdot 4 - (-1) + 3 = 12;$$

$$Z(X = 4, Y = 2) = 2 \cdot 4 - 2 + 3 = 6 = 9.$$

Теперь определим вероятности этих значений. Так как случайные величины X и Y независимы, то вероятность того, что пара (X, Y) примет значение (x_i, y_j) равна произведению вероятностей $P(X = x_i)$ и

$P(Y = y_j)$ (здесь $i = 1, 2; j = 1, 2$)

$$P(Z = 6) = P(X = 1) \cdot P(Y = -1) = 0.3 \cdot 0.8 = 0.24;$$

$$P(Z = 3) = P(X = 1) \cdot P(Y = 2) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06;$$

$$P(Z = 12) = P(X = 4) \cdot P(Y = -1) = 0.7 \cdot 0.8 = 0.56;$$

$$P(Z = 9) = P(X = 4) \cdot P(Y = 2) = 0.7 \cdot 0.2 = 0.14.$$

Получили закон распределения случайной величины Z :

z_k	3	6	9	12
p_k	0.06	0.24	0.14	0.56

$$\sum_{k=1}^4 p_k = 0.06 + 0.24 + 0.14 + 0.56 = 1$$

Вычислим математическое ожидание по определению:

$$M(Z) = 3 \cdot 0.06 + 6 \cdot 0.24 + 9 \cdot 0.14 + 12 \cdot 0.56 = 9.6.$$

Найдём значение дисперсии, пользуясь формулой, вытекающей из определения: $D(Z) = M(Z^2) - (M(Z))^2$.

$$M(Z^2) = 9 \cdot 0.06 + 36 \cdot 0.24 + 81 \cdot 0.14 + 144 \cdot 0.56 = 101.16.$$

$$D(Z) = 101.16 - (9.6)^2 = 9.$$

$$\sigma(Z) = \sqrt{D(Z)} = \sqrt{9} = 3.$$

Полученные значения совпадают со значениями числовых характеристик, найденных по свойствам.

6.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Составить закон распределения числа выпавших очков при однократном бросании игральной кости. Найти числовые характеристики этой случайной величины.

2. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены первый станок потребует внимания рабочего, равна 0.1; для второго и третьего станков эти вероятности равны 0.3 и 0.2 соответственно. Составить закон распределения случайной величины — числа станков, требующих внимания рабочего за смену. Построить многоугольник распределения.

3. На связке 5 ключей. Только одним из них можно открыть дверь. Найти закон распределения случайной величины — числа использованных ключей при открывании двери, вычислить числовые характеристики этой величины. Построить полигон относительных частот.

4. Выпущено 1000 билетов денежной лотереи. В лотерее разыгрываются один выигрыш в 5000 руб., пять выигрышей по 1000 руб., двадцать выигрышей по 100 руб. Составить закон распределения случайной величины — стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

5. Монета брошена 5 раз. Составить закон распределения случайной величины — числа появлений герба. Найти функцию распределения и построить её график.

6. Два стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0.6, для второго эта вероятность равна 0.5. Составить закон

распределения случайной величины — числа попаданий в мишень. Найти числовые характеристики этой величины.

7. В партии из восьми деталей три нестандартных детали. Наудачу выбираются три детали. Составить закон распределения случайной величины — числа стандартных деталей среди отобранных. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

8. В машине-экзаменаторе на каждый вопрос заложены четыре ответа, один из которых правильный. Студент не подготовился к экзамену, и ответ выбирает наудачу. Составить функцию распределения $F(x)$ случайной величины — числа верных ответов на четыре вопроса, предложенных студенту. Построить график $F(x)$.

9. В урне семь белых и три черных шара. Наудачу из урны извлекают три шара. Составить закон распределения случайной величины — числа белых шаров среди отобранных. Найти числовые характеристики этой величины.

10. В семье морских свинок в среднем 25% детёнышей рождаются коричневыми. Составить закон распределения случайной величины — числа коричневых детёнышей из трёх рождённых. Найти числовые характеристики этой величины.

11. Производятся последовательные испытания пяти приборов на надёжность. Каждый следующий прибор подвергают испытаниям лишь тогда, когда предыдущий оказался надёжным. Составить закон распределения случайной величины — количества испытаний приборов, если вероятность надёжной работы каждого прибора равна 0.8. Построить полигон относительных частот.

12. Урожайность пшеницы в некотором районе определяется рядом

распределения:

x_i	27	32	40
p_i	0.3	0.5	0.2

Здесь X — урожайность в ц/га. Найти математическое ожидание урожайности, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

13. Случайная величина X — число мальчиков в семье с пятью детьми. Считая события рождение мальчика и рождение девочки равновероятными, составить закон распределения случайной величины. Найти вероятности событий: $A = \{\text{в семье не менее двух, но не более трёх мальчиков}\}$; $B = \{\text{более трёх мальчиков}\}$; $C = \{\text{не менее одного мальчика}\}$. Построить функцию распределения этой случайной величины.

14. Из 20 контрольных работ, среди которых пять оценены на «отлично», наугад извлекают три работы. Составить функцию распределения числа оцененных на «отлично» работ среди выбранных. Найти вероятность $P(0 < x \leq 2)$.

15. Вероятность наброса кольца на колышек равна 0.8. Производится набрасывание шести колец либо до первого попадания, либо до полного израсходования этих колец. Составить закон распределения случайной величины — числа брошенных колец. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

16. Дискретная случайная величина имеет следующий закон распределения:

x_i	0	3	5	7	8
p_i	0.2	0.1	?	0.25	0.15

Определить вероятность $p_3 = P(X = 5)$. Найти числовые характеристики случайной величины.

17. Дискретная случайная величина может принимать только два значения: x_1 с известной вероятностью $p_1 = 0.4$ и x_2 , причём $x_1 < x_2$. Известны также математическое ожидание этой величины $M(X) = 3.2$ и дисперсия $D(X) = 0.96$. Найти закон распределения этой величины, функцию распределения $F(x)$, построить график функции распределения.

18. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

x_i	0	1	2	y_j	3	4
p_i	0.1	0.5	0.4	p_j	0.3	0.7

Составить закон распределения случайной величины $Z = 3X - Y + 1$. Найти числовые характеристики этой случайной величины, используя свойства числовых характеристик.

19. Урожай картофеля, поступающий для продажи на рынке от некоторого фермера, характеризуется рядом распределения:

x_i	600	800	900
p_i	0.35	0.5	0.15

По многолетним данным рыночные цены на картофель имеют тенденцию к следующему распределению:

y_j	40	50	70
p_j	0.3	0.6	0.1

Составить закон распределения случайной величины $Z = X \cdot Y$ — денежной выручки, полученной этим фермером от продажи картофеля на рынке. Найти числовые характеристики этой случайной величины, используя свойства числовых характеристик.

20. Баскетболист выполняет серию штрафных бросков. Вероятность попадания мяча в корзину при одном броске равна 0.6. Составить закон

распределения случайной величины — числа попаданий в корзину, если серия состоит из трёх бросков. Построить функцию распределения такой случайной величины.

6.5. Контрольные задания

Найти закон распределения вероятностей и все числовые характеристики случайной величины $Z = 3X - 2Y + 4$

а) по свойствам числовых характеристик;

б) по определению, если независимые случайные величины X и Y имеют следующие законы распределения вероятностей:

Вариант 1.

x_i	1	-3	5
p_i	0.1	0.4	0.5

y_j	2	-4
p_j	0.2	0.8

Вариант 2.

x_i	1	-3	5
p_i	0.2	0.3	0.5

y_j	2	-4
p_j	0.9	0.1

Вариант 3.

x_i	1	-3	5
p_i	0.3	0.4	0.3

y_j	2	-4
p_j	0.8	0.2

Вариант 4.

x_i	1	-3	5
p_i	0.4	0.5	0.1

y_j	2	-4
p_j	0.7	0.3

Вариант 5.

x_i	1	-3	5
p_i	0.5	0.2	0.3

y_j	2	-4
p_j	0.6	0.4

Вариант 6.

x_i	1	-3	5
p_i	0.7	0.1	0.2

y_j	2	-4
p_j	0.5	0.5

Вариант 7.

x_i	1	-3	5
p_i	0.5	0.3	0.2

y_j	2	-4
p_j	0.4	0.6

Вариант 8.

x_i	1	-3	5
p_i	0.3	0.3	0.4

y_j	2	-4
p_j	0.3	0.7

Вариант 9.

x_i	1	-3	5
p_i	0.1	0.3	0.6

y_j	2	-4
p_j	0.2	0.8

Вариант 10.

x_i	1	-3	5
p_i	0.5	0.1	0.4

y_j	2	-4
p_j	0.5	0.5

Вариант 11.

x_i	-1	3	-5
p_i	0.1	0.4	0.5

y_j	-2	4
p_j	0.2	0.8

Вариант 12.

x_i	-1	3	-5
p_i	0.2	0.3	0.5

y_j	-2	4
p_j	0.9	0.1

Вариант 13.

x_i	-1	3	-5
p_i	0.3	0.4	0.3

y_j	-2	4
p_j	0.8	0.2

Вариант 14.

x_i	-1	3	-5
p_i	0.4	0.5	0.1

y_j	-2	4
p_j	0.7	0.3

Вариант 15.

x_i	-1	3	-5
p_i	0.5	0.2	0.3

y_j	-2	4
p_j	0.6	0.4

Вариант 16.

x_i	-1	3	-5
p_i	0.7	0.1	0.2

y_j	-2	4
p_j	0.5	0.5

Вариант 17.

x_i	-1	3	-5
p_i	0.5	0.3	0.2

y_j	-2	4
p_j	0.4	0.6

Вариант 18.

x_i	-1	3	-5
p_i	0.3	0.3	0.4

y_j	-2	4
p_j	0.3	0.7

Вариант 19.

x_i	-1	3	-5
p_i	0.1	0.3	0.6

y_j	-2	4
p_j	0.2	0.8

Вариант 20.

x_i	-1	3	-5
p_i	0.5	0.1	0.4

y_j	-2	4
p_j	0.5	0.5

7. Непрерывные распределения

7.1. Основы теории

Случайная величина X имеет **абсолютно непрерывное распределение**, если существует неотрицательная вещественная функция $f(x)$, именуемая **функцией плотности распределения вероятностей** случайной величины X , такая что для любого отрезка $[x_1; x_2]$ имеет место соотношение

$$P(x_1 \leq \xi \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

Иными словами, для непрерывного распределения имеется неотрицательная функция $f(x)$, такая, что площадь под графиком этой функции на отрезке $[x_1; x_2]$ численно равна вероятности случайной величине X попасть в этот отрезок.

Укажем некоторые свойства абсолютно непрерывного распределения.

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ (площадь под графиком функции $f(x)$ равна 1).
2. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ (по причине этого свойства мы имеем, что функция распределения $F(x)$ имеет название **интегральной функции распределения** случайной величины X).
3. $F'(x) = f(x)$ (по причине этого свойства мы имеем, что функция $f(x)$ имеет название **дифференциальной функции распределения** случайной величины X).
4. Если в x_0 функция распределения $F(x)$ непрерывна, то

$$P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x) dx = 0.$$

Пусть непрерывная случайная величина X задана дифференциальной функцией распределения $f(x)$. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины назовём несобственный интеграл:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Если возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $[a; b]$, то математическое ожидание вычисляется как определённый интеграл:

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx$$

Дисперсией непрерывной случайной величины называется математическое ожидание квадрата её отклонения:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx$$

Для практического вычисления дисперсии непрерывной случайной величины, по аналогии с дисперсией дискретной случайной величины, используется формула:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2$$

Среднее квадратическое отклонение определяется как корень квадратный из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Среди непрерывных случайных величин выделяют величины, имеющие функции распределения специального вида. Эти распределения исследованы более всего.

1. Равномерное на отрезке $[a; b]$. Плотность распределения:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a; b], \\ 0, & \text{если } x \notin [a; b]. \end{cases}$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a < x \leq b, \\ 1, & \text{если } x > b. \end{cases}$$

$$M\xi = (a+b)/2, D\xi = (b-a)^2/12.$$

2. Нормальное с параметрами a и σ . Плотность распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Функция распределения:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

$M\xi = a$, $D\xi = \sigma^2$. Математическое ожидание, мода и медиана нормального распределения совпадают.

Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина примет значение, принадлежащее промежутку $(\alpha; \beta)$, равна приращению функции Лапласа

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

Вероятность того, что нормально распределённая случайная величина отклонится от своего математического ожидания на величину, не большую δ , равна

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

3. Показательное с параметром λ . Плотность распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0 \end{cases}.$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0 \end{cases}.$$

$$M\xi = 1/\lambda, D\xi = 1/\lambda^2.$$

7.2. Контрольные вопросы

1. Что понимают под непрерывной случайной величиной? Привести примеры непрерывных случайных величин.
2. Чему равна вероятность события $X = x_0$, если случайная величина имеет абсолютно непрерывное распределение?
3. Как связаны между собой интегральная функция и дифференциальная функция распределения непрерывной случайной величины?
4. Как найти вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал с помощью функций распределения?
5. Как выглядят графики функций распределения для непрерывной случайной величины?
6. Укажите основные свойства дифференциальной функции распределения.
7. Как определяется математическое ожидание для непрерывной случайной величины?
8. Как находится дисперсия непрерывной случайной величины?

9. Какое непрерывное распределение называется равномерным? Укажите формулы для вычисления числовых характеристик равномерного распределения.
10. Какое непрерывное распределение называется нормальным? Каковы параметры нормального распределения? Чему равны числовые характеристики нормального распределения?
11. Как определяется вероятность попадания случайной величины распределенной по нормальному закону в заданный промежуток?
12. Какое непрерывное распределение называется показательным?

7.3. Типовые задачи

Задача 1. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2/6, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ -x^2/3 + 2x - 2, & \text{если } 2 < x \leq 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Найти вероятность попадания значений случайной величины в интервал от 1 до 2.5.

Решение.

$$P(1 < X < 2.5) = F(2.5) - F(1) = 11/12 - 1/6 = 9/12 = 0.75,$$

так как $F(2.5) = -2.5^2/3 + 2 \cdot 2.5 - 2 = 11/12$; $F(1) = 1^2/6 = 1/6$.

Задача 2. Функция $f(x)$ является плотностью вероятностей

непрерывной случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{A}{\cos^2 x}, & \text{если } 0 < x \leq \pi/4, \\ 0, & \text{если } x > \pi/4. \end{cases}$$

Найти коэффициент A . Вычислить вероятность того, что случайная величина примет значение из отрезка $[0; \pi/6]$.

Решение. Для определения коэффициента A воспользуемся свойством функции плотности вероятностей: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\pi/4} \frac{A}{\cos^2 x} dx + \int_{\pi/4}^{+\infty} 0 dx = \\ &= 0 + A \cdot \operatorname{tg} x \Big|_0^{\pi/4} = A(1 - 0) = A, \end{aligned}$$

откуда $A = 1$. Значит,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{1}{\cos^2 x}, & \text{если } 0 < x \leq \pi/4, \\ 0, & \text{если } x > \pi/4. \end{cases}$$

Для определения вероятности попадания значений случайной величины в интервал от 0 до $\pi/6$ вычислим определенный интеграл:

$$P(0 < X < \pi/6) = \int_0^{\pi/6} f(x) dx = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x \Big|_0^{\pi/6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - 0 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Задача 3. Непрерывная случайная величина X задана функцией

распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2/9, & \text{если } 0 < x \leq 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Найти функцию плотности распределения вероятностей $f(x)$ и числовые характеристики случайной величины: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение. Чтобы определить функцию плотности вероятностей, надо найти производную от функции распределения: $f(x) = F'(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ 2x/9, & \text{если } 0 < x \leq 3, \\ 0, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Числовые характеристики:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx + \int_0^3 \frac{2x^2}{9} dx + \int_3^{+\infty} x \cdot 0 dx = \\ &= \frac{2x^3}{27} \Big|_0^3 = \frac{2 \cdot 27}{27} - 0 = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2 = \int_{-\infty}^0 x^2 \cdot 0 dx + \int_0^3 \frac{2x^3}{9} dx + \int_3^{+\infty} x^2 \cdot 0 dx - 4 = \\ &= \frac{x^4}{18} \Big|_0^3 - 4 = \frac{81}{18} - 0 - 4 = 0.5. \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0.5} \approx 0.71$$

Задача 4. Непрерывная случайная величина X задана

дифференциальной функцией распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1, \\ a(x-1), & \text{если } 1 < x \leq 3, \\ 0, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Найти коэффициент a , интегральную функцию распределения $F(x)$ и числовые характеристики случайной величины.

Решение. Согласно свойству дифференциальной функции распределения $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^3 a(x-1) dx + \int_3^{+\infty} 0 dx = \\ &= \frac{a(x-1)^2}{2} \Big|_1^3 = 2a, \end{aligned}$$

и так как $2a = 1$, то $a = 0.5$.

Получаем:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1, \\ 0.5(x-1), & \text{если } 1 < x \leq 3, \\ 0, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Для определения интегральной функции воспользуемся соотношением: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

При $x \leq 1$ $f(x) = 0$, значит, $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.

При $1 < x \leq 3$ $f(x) = 0.5(x-1)$, значит,

$$F(x) = \int_{-\infty}^1 0 dt + \int_1^x 0.5(t-1) dt = 0 + \frac{(t-1)^2}{4} \Big|_1^x = \frac{(x-1)^2}{4}.$$

При $x > 3$ $f(x) = 0$, значит,

$$F(x) = \int_{-\infty}^1 0 dt + \int_1^3 0.5(t-1) dt + \int_3^{\infty} 0 dt = 0 + \frac{(t-1)^2}{4} \Big|_1^3 = 1.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1, \\ (x-1)^2/4, & \text{если } 1 < x \leq 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Определим числовые характеристики:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^1 x \cdot 0 dx + \int_1^3 0.5x(x-1) dx + \int_3^{+\infty} x \cdot 0 dx = \\ &= 0.5 \int_1^3 (x^2 - x) dx = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} \right) \Big|_1^3 = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^1 x^2 \cdot 0 dx + \int_1^3 0.5x^2(x-1) dx + \int_3^{+\infty} x^2 \cdot 0 dx - \frac{49}{9} = \\ &= 0.5 \int_1^3 (x^3 - x^2) dx - \frac{49}{9} = \left(\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_1^3 - \frac{49}{9} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{2/9} \approx 0.471$$

7.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Задана функция распределения вероятностей случайной величины X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -\pi/2, \\ \cos x, & \text{если } -\pi/2 < x \leq 0, \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$ и построить её график.

2. Задана функция плотности распределения вероятностей случайной величины X : $f(x) = \frac{A}{1+x^2}$. Найти а) коэффициент A ; б) функцию распределения $F(x)$; в) построить графики $F(x)$ и $f(x)$; г) вероятность попадания X в интервал $(-1; 3)$.

3. Задана функция плотности распределения вероятностей случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 3, \\ 1/3, & \text{если } 3 < x \leq 6, \\ 0, & \text{если } x > 6. \end{cases}$$

Требуется а) найти функцию распределения $F(x)$; б) построить графики $F(x)$ и $f(x)$; в) вычислить вероятность того, что значение случайной величины будет находиться в интервале $(2; 5)$.

4. Задана функция плотности распределения вероятностей случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 2, \\ c(x^2 - 2), & \text{если } 2 < x \leq 4, \\ 0, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент c ; б) построить функцию распределения $F(x)$; в) определить математическое ожидание $M(X)$; г) дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

5. Случайная величина X имеет интегральную функцию

распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -2, \\ 0.25x + 0.5, & \text{если } -2 < x \leq 2, \\ 1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Найти а) функцию плотности вероятностей $f(x)$; б) вычислить числовые характеристики; в) построить графики $F(x)$ и $f(x)$; г) найти $P(-3 < X < 1.5)$.

6. Найти коэффициент A и построить интегральную функцию распределения $F(x)$ случайной величины X , с заданной плотностью вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ A \cos 3x, & \text{если } 0 < x \leq \pi/6, \\ 0, & \text{если } x > \pi/6. \end{cases}$$

7. Вычислить дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X . Найти $P(2 < X < 3)$, если

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1, \\ 0.5(x - 1), & \text{если } 1 < x \leq 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

8. Найти числовые характеристики случайной величины X , построить графики $F(x)$ и $f(x)$, если

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -2, \\ ax^2 + 0.2, & \text{если } -2 < x \leq 3, \\ 0, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

9. Задана функция плотности распределения вероятностей случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -0.25, \\ ax, & \text{если } -0.25 < x \leq 0.75, \\ 0, & \text{если } x > 0.75. \end{cases}$$

Найти коэффициент a , интегральную функцию распределения $F(x)$, построить графики $F(x)$ и $f(x)$, найти числовые характеристики случайной величины.

10. Непрерывная случайная величина задана равномерно на отрезке $[1; 6]$. Составить функцию плотности распределения вероятностей $f(x)$ и функцию распределения $F(x)$, построить их графики.

11. На отрезке $[3; 6]$ непрерывная случайная величина распределена равномерно. Найти числовые характеристики этой случайной величины. Определить вероятность того, что случайная величина примет значение из промежутка $[4; 5]$.

12. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $a = -2$, $\sigma = 4$. Найти плотность распределения вероятностей этой случайной величины и построить её график.

13. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $M(X) = 2$, $D(X) = 25$. Найти $P(2 < X < 4)$; $P(-2 < X < 3)$.

14. Нормально распределённая случайная величина задана плотностью распределения вероятностей: $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-(x-1)^2/50}$. Найти $M(2X + 4)$; $D(2X + 4)$.

15. Рост взрослых мужчин является случайной величиной, которая распределена по нормальному закону. Пусть её математическое ожидание равно 176 см, а дисперсия 25 см². Найти плотность

распределения вероятностей и функцию распределения этой случайной величины. Вычислить вероятность того, что рост наугад выбранного мужчины будет находиться в пределах от 173 см до 180 см.

16. Известно, что вес вылавливаемых в прудах сазанов подчиняется нормальному закону с математическим ожиданием 600 г и средним квадратическим отклонением 70 г. Определить вероятность того, что вес наудачу взятого сазана будет: а) не менее 400 г.; б) не более 800 г.; в) в пределах от 500г до 700 г.

7.5. Контрольные задания

7.5.1. Контрольная работа №1

Задана интегральная функция распределения вероятностей $F(x)$. Найти функцию плотности распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание и дисперсию, построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Вариант 1.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{100}, & \text{если } 0 < x \leq 10, \\ 0, & \text{если } x > 10. \end{cases}$$

Вариант 2.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{81}, & \text{если } 0 < x \leq 9, \\ 0, & \text{если } x > 9. \end{cases}$$

Вариант 3.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{64}, & \text{если } 0 < x \leq 8, \\ 0, & \text{если } x > 8. \end{cases}$$

Вариант 4.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{49}, & \text{если } 0 < x \leq 7, \\ 0, & \text{если } x > 7. \end{cases}$$

Вариант 5.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{36}, & \text{если } 0 < x \leq 6, \\ 0, & \text{если } x > 6. \end{cases}$$

Вариант 6.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{25}, & \text{если } 0 < x \leq 5, \\ 0, & \text{если } x > 5. \end{cases}$$

Вариант 7.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{16}, & \text{если } 0 < x \leq 4, \\ 0, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

Вариант 8.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{9}, & \text{если } 0 < x \leq 3, \\ 0, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Вариант 9.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{4}, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ 0, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Вариант 10.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

7.5.2. Контрольная работа №2

Дана случайная величина X , имеющая нормальное распределение. Найти вероятность того, что она примет значение, принадлежащее промежутку $(\alpha; \beta)$ и вероятность того, что она отклонится от своего математического ожидания на величину, не большую δ .

Вариант	a	σ	α	β	δ
1	30	10	10	50	2
2	20	5	10	60	3
3	40	15	20	60	2
4	50	5	40	55	3
5	40	10	40	50	2
6	10	15	20	25	3
7	45	10	25	75	2
8	35	15	20	40	3

8. Первичная обработка выборочных данных

8.1. Основы теории

Научное исследование состоит из нескольких этапов. Первый — **обнаружение проблемы**, либо какого-либо неисследованного объекта или явления. Вторым этапом — **планирование наблюдения или эксперимента**, сбора данных для дальнейшей обработки. Третьим этапом — **сбор данных**, за которым следует четвёртый — **обработка данных**. Заметим, что методы обработки данных необходимо подобрать на этапе планирования эксперимента. Они естественным образом следуют из природы собираемых данных. После обработки данных следует пятый этап — **формулирование выводов**.

Рассмотрим более пристально второй этап, на котором необходимо определить, что именно (какую величину или величины) надо измерять, очертить множество объектов, которые надо будет измерить (подобрать так называемую генеральную совокупность исследуемых объектов), отобрать для исследования часть этого множества для непосредственного измерения (сделать выборку). Приведем здесь теоретические моменты, связанные с этим этапом.

Генеральная совокупность — множество тех элементов, которые нужно обследовать, и относительно которых необходимо сделать выводы (относительно распределения исследуемого параметра).

Выборочная совокупность или **выборка** — множество элементов, которые непосредственно проходят измерение.

Замечание 4. В математической статистике понятие генеральной совокупности не применяется, а термин «генеральная совокупность»

используется как образ, как метафора, и фактически **генеральная совокупность** — это множество значений случайной величины X , связанной со случайным испытанием.

Выборкой объёма n в математической статистике называют последовательность X_1, X_2, \dots, X_n попарно и в совокупности независимых и одинаково распределённых с X случайных величин.

Множество исследуемых объектов выступает как генератор случайных чисел, имеющий распределение величины X . В результате исследования мы получаем набор чисел — x_1, x_2, \dots, x_n , называемый **реализацией выборки**. Именно на его основе исследователю придется делать выводы **о распределении случайной величины X и его характеристиках**. В дальнейшем мы будем говорить о выборке, как о реализации выборки.

Основа выборки — список всех элементов генеральной совокупности. С помощью основы выборки и генератора равномерно распределённых случайных чисел можно получить так называемую простую случайную выборку.

Выборку объёма n будем называть **простой случайной выборкой**, если каждый элемент имеет одну и ту же вероятность быть выбранным в неё и каждый набор из n элементов имеет равную вероятность быть сформированным по сравнению с другими наборами такой же длины.

Если при формировании выборки каждый объект генеральной совокупности может быть выбран несколько раз, то такая выборка называется **выбором с возвращением** (выбранный элемент как бы возвращается в генеральную совокупность и поэтому получает возможность быть выбранным снова).

Если при формировании выборки каждый объект генеральной совокупности может быть выбран только один раз, то такая выборка называется **выбором без возвращения**. Заметим, что в этом случае

элементы выборки становятся статистически зависимы. Однако в случае, когда объём выборки существенно мал по сравнению с объёмом генеральной совокупности, этой зависимостью можно пренебречь.

Выборка должна быть такова, чтобы на её основе были сделаны правильные выводы о распределении изучаемого параметра. Это свойство выборки называется репрезентативностью.

Репрезентативность — это свойство выборки воспроизводить в себе основные характеристики генеральной совокупности. Данное свойство позволяет экстраполировать результаты исследования, полученные на ограниченном числе наблюдений, на всю генеральную совокупность, т.е. делать заключения о целом на основании части [3].

Сформировать нерепрезентативную выборку, а затем провести её статистический анализ — главная опасность выборочного метода. Нерепрезентативные выборки называют **смещенными**.

Кроме указанной опасности у исследователя есть опасность неправильного определения генеральной совокупности, а именно, получить **неоднородную** генеральную совокупность, то есть такую генеральную совокупность, в которой имеются **несколько распределений**. Иными словами, она состоит из нескольких подмножеств, каждое из которых имеет свое распределение. В дальнейших рассуждениях и при решении задач мы будем предполагать, что исследуемая генеральная совокупность однородна.

Далее нам надо затронуть вопросы, связанные с процессом измерения исследуемых параметров.

Измерение — это приписывание числовых форм объектам или событиям в соответствии с определенными правилами [8]. **Измерение** — это процедура, с помощью которой измеряемый объект сравнивается с некоторым эталоном и получает числовое выражение в определенном

масштабе или шкале [12].

Шкала — это множество элементов (числовых или нечисловых), которым ставятся в соответствие измеряемые объекты.

Существует четыре вида шкал:

1. Шкала наименований (или номинальная).

Шкальные значения зачастую представляют собой обычные слова, названия, имена (категории). Например, такими являются ответы {да, нет, не знаю}, результаты голосования {за, против, воздержался}. В шкале наименований значения нельзя упорядочить, нельзя сказать, какое значение больше, а какое меньше. Следовательно, в данных шкалах **порядок не определён**. Кроме того, нельзя ответить на вопросы, во сколько раз одно значение больше или меньше другого, или на сколько шкальных единиц одно значение больше или меньше другого. Отсюда следует, что в номинальных шкалах **не определены никакие арифметические операции**.

Методов обработки номинальных данных немного. Так, мы можем подсчитать, сколько раз в результате эксперимента появлялось то или иное значение (вычислить частоту значения), вычислить долевое (процентное) соотношение значений. Также можно, при измерении нескольких групп объектов, сравнивать частоту появления тех или иных значений, например, с помощью так называемого критерия Пирсона.

2. Шкала порядка. Если значения номинальной шкалы каким-либо образом упорядочить, присвоить значениям **ранги**, то мы получим шкалу порядка. Например, к такому виду шкал относятся упорядоченные по алфавиту фамилии студентов,

всевозможные рейтинги (баллы ЕГЭ и ОГЭ, рейтинги спортсменов). Следовательно, в данных шкалах **определён порядок**. Однако арифметические операции **не определены**, несмотря на то, что шкальные значения, ранги, могут быть записаны натуральными числами.

Методы обработки порядковых данных аналогичны методам обработки номинальных данных.

3. Шкалы разностей.

В шкалах разностей, кроме **наличия порядка**, **осмыслена операция вычитания** и можно ответить на вопрос, **на сколько** единиц шкалы одно шкальное значение отличается от другого. Именно поэтому такого рода шкалы именуется шкалами разностей. Также можно к одному шкальному значению прибавить некоторое количество единиц шкалы (не обязательно целое) и получить другое шкальное значение (**осмыслена операция сложения**).

К шкалам разностей относятся: шкалы температур по Цельсию, Фаренгейту, Реомюру; временная шкала, оперирующая понятиями «до новой эры», «новой эры».

Значения, измеренные в шкале разностей, могут быть изображены с помощью вещественной числовой прямой. Наличие порядка и арифметических операций сложения и вычитания позволяет сказать, что множества значений изучаемых в теории вероятностей случайных величин являются множествами значений шкал разностей. Именно в таких шкалах можно вычислять различного рода средние величины. Отсюда следует, что для наблюдений, измеренных в шкалах разностей применимы практически все методы статистических

исследований: построение статистических распределений, гистограмм, функций распределения, сравнение распределений, регрессионно-корреляционный анализ. Исключение составляет вычисление среднего геометрического и коэффициента вариации.

4. Шкалы отношений.

В шкалах отношений, кроме **наличия порядка**, и **осмысленных операций сложения и вычитания** также можно ответить на вопрос, **во сколько раз** одно шкальное значение отличается от другого, **осмыслена операция деления** (и обратная к ней — умножение шкального значения на вещественное число и получение другого шкального значения). Именно поэтому такого рода шкалы именуется шкалами отношений. Шкалы отношений имеют точку абсолютного нуля, в отличие от шкал разностей, в которых положение нуля, вообще говоря, выбирается произвольно. К шкалам разностей относятся: шкала температур по Кельвину; шкала измерения длительности процессов; шкалы длины, площади, объёма; шкала массы.

К данным, измеренным в шкалах отношений, применимы любые процедуры статистических исследований.

Исследователь должен понимать, в какой шкале проводится измерение изучаемых параметров, и, следовательно, соответственным образом подбирать методы статистической обработки собранных данных.

Далее затронем задачу **систематизации** и **табличного представления** собранных данных.

После того, как данные собраны, их нужно поместить в таблицу. Таблица должна создаваться по типу базы данных, а именно: каждый

столбец содержит однотипные данные, а каждая строка содержит информацию об одном измеренном объекте.

Перечислим несколько случаев, отличающихся количеством групп объектов и количеством измеряемых у одного объекта параметров. Для каждого случая приведем внешний вид таблицы, в которой собираются данные.

- 1. Одна группа, один измеряемый параметр.** Таблица должна содержать ключевой столбец, в котором будут порядковые номера измеренных объектов (например, школьников), может (но не обязана) содержать столбец с наименованиями измеренных объектов (например, фамилиями и инициалами школьников), и столбец, в котором записаны значения исследуемого параметра (например, рост школьника в см).

№	Ф.И.О.	Рост
1	Иванов И.И.	167
2	Петров П.П.	155
3	Сидоров С.С.	170

- 2. Одна группа, несколько измеряемых параметров.** Таблица должна содержать ключевой столбец, в котором будут порядковые номера измеренных объектов (например, школьников), может (но не обязана) содержать столбец с наименованиями измеренных объектов (например, фамилиями и инициалами школьников), и столбцы, в которых записаны значения исследуемых параметров (например, рост школьника в см, вес в кг и цвет волос, выраженный словом).

№	Ф.И.О.	Рост	Масса	Цвет
1	Иванов И.И.	167	62.530	Блондин
2	Петров П.П.	155	41.200	Брюнет
3	Сидоров С.С.	170	68.500	Шатен

3. Несколько групп, один измеряемый параметр.

Таблица должна содержать ключевой столбец, в котором будут порядковые номера измеренных объектов (например, школьников), столбец, по которому ведется разбиение испытуемых по группам и который содержит номера групп (классов, например), может (но не обязана) содержать столбец с наименованиями измеренных объектов (например, фамилиями и инициалами школьников), и столбец, в котором записаны значения исследуемого параметра (например, рост школьника в см).

№	Класс	Ф.И.О.	Рост
1	7А	Иванов И.И.	167
2	6Б	Петров П.П.	155
3	7А	Сидоров С.С.	170
2	6Б	Попова П.П.	149

4. Несколько групп, несколько измеряемых параметров.

Таблица должна содержать ключевой столбец, в котором будут порядковые номера измеренных объектов (например, школьников), столбец с номерами групп (классов, например), может (но не обязана) содержать столбец с наименованиями измеренных объектов (например, фамилиями и инициалами школьников), и столбцы, в которых записаны значения исследуемых параметров

(например, рост школьника в см, вес в кг и цвет волос, выраженный словом).

№	Класс	Ф.И.О.	Рост	Масса	Цвет
1	7А	Иванов И.И.	167	62.530	Блондин
2	6Б	Петров П.П.	155	41.200	Брюнет
3	6Б	Сидоров С.С.	170	68.500	Шатен
4	7А	Попова П.П.	161	52.350	Рыжий

Напоследок осветим вопросы, связанные с первичной обработкой данных, иначе называемой **разведывательным анализом** или **описательной статистикой**.

Задачей описательной статистики является получение так называемого выборочного статистического распределения, нахождение выборочной функции распределения, вычисление числовых характеристик выборочного распределения, а также визуализация данных. Описательная статистика призвана натолкнуть исследователя на предположения о виде распределения изучаемой величины (генерального распределения). К примеру, только взглянув на выборочные значения, можно сделать предположение о типе распределения: если значения практически не повторяются, то это может говорить о том, что распределение непрерывно; если же есть часто повторяющиеся значения, то это может служить в пользу дискретности распределения.

Перечислим основные выборочные характеристики, разыскиваемые в процессе первичного анализа выборочных данных.

Объём выборки — количество элементов в выборке. Обозначим его буквой n .

Частота того или иного выборочного значения — количество

повторений значения в выборке. Обозначение: n_i — частота значения x_i . Если всего k различных выборочных значений ($k \leq n$), то i находится в пределах от 1 до k .

Относительная частота того или иного выборочного значения — отношение частоты этого значения к объёму выборки. Обозначение: $p_i = n_i/n$ — относительная частота значения x_i .

Выборочная функция распределения определяется так:
для любого вещественного x

$$F_{\text{выб}}(x) = \frac{\text{сумма частот выборочных значений, меньших } x}{\text{объём выборки}}$$

Среднее выборочное — выборочный аналог математического ожидания, среднее арифметическое значений выборки, вычисляется по формуле

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_k p_k,$$

если в выборке k различных значений.

В случае выборки, полученной из непрерывного распределения, возможна операция **группирования выборки**. Для этого промежуток значений выборки от минимального до максимального надо разделить на несколько (равных) частей (**частичных интервалов**) и вычислить количество попаданий выборочных значений в тот или иной частичный интервал. При группировании выборки мы от непрерывного распределения переходим к дискретному, в котором выборочными значениями являются середины интервалов m_i , а частотами n_i являются вычисленные количества попаданий выборочных значений в тот или иной интервал. Соответственно вычисляются относительные частоты p_i . Тогда среднее выборочное для группированной выборки:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k m_i p_i = m_1 p_1 + m_2 p_2 + \dots + m_k p_k.$$

Здесь k — количество частичных интервалов.

Смещённая выборочная дисперсия — аналог дисперсии, характеризует квадрат разброса значений выборки около среднего выборочного и вычисляется по формулам:

$$D_{\text{выб}} = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 p_i = \sum_{i=1}^k x_i^2 p_i - (\bar{x})^2$$

Аналогична формула для группированной выборки, только x_i заменяется на m_i .

Несмещённая выборочная дисперсия вычисляется по формуле:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{выб}}$$

Выборочное смещённое среднее квадратическое отклонение:

$\sigma_{\text{выб}} = \sqrt{D_{\text{выб}}}$; выборочное несмещённое среднее квадратическое отклонение: $s = \sqrt{s^2}$.

Мода — выборочное значение, которое имеет наибольшую частоту, либо середина интервала, в котором сосредоточена наибольшая частота (последнее в случае группированной выборки).

Вариационный ряд — выборка, упорядоченная по возрастанию:

$$x^{(1)} \leq x^{(2)} \leq \dots \leq x^{(n)}$$

Значение $x^{(i)}$ называется **i -й порядковой статистикой**.

Кроме того, можно сказать, что если мы имеем порядковую статистику $x^{(i)}$, то она является **выборочным квантилем порядка** $p = \frac{i-1}{n}$. Отсюда следует, что не для всякого порядка p можно отыскать выборочный квантиль.

Размах выборки — разность между максимальным и минимальным элементами выборки. Обозначение: $w = x_{\max} - x_{\min} = x^{(n)} - x^{(1)}$.

Выборочная медиана — число m , делящее вариационный ряд пополам:

$$m = \begin{cases} \frac{x^{(k)} + x^{(k+1)}}{2}, & \text{если } n = 2k, \\ x^{(k+1)}, & \text{если } n = 2k + 1. \end{cases}$$

Заметим, что если мода, медиана и среднее выборочное примерно равны, то это может натолкнуть на предположение о том, что генеральное распределение — нормальное.

8.2. Контрольные вопросы

1. Опишите этапы научного исследования.
2. Что такое генеральная совокупность?
3. Что такое выборка?
4. Что такое основа выборки?
5. Что такое простая случайная выборка?
6. Что такое выбор без возвращения и выбор с возвращением?
7. Опишите понятие репрезентативности выборки.
8. Опишите процесс измерения.
9. Что такое шкала?
10. Дайте характеристику шкал по видам: номинальные, порядка, разностей, отношений.
11. Сформулируйте определения: объёма выборки, частоты некоторого значения выборки, относительной частоты значения выборки, выборочной функции распределения, среднего выборочного, смещённой и несмещённой выборочных дисперсий, смещённого и несмещённого выборочных средних квадратических отклонений, моды, вариационного ряда, размаха выборки, выборочной медианы, выборочного квантиля.

8.3. Типовые задачи

Задача 1. Определите вид шкалы: (а) перечень студентов: {Иванов, Петров, Сидоров, Павлов, Алексеев, Александров}; (б) возраст человека в годах; (в) место, занятое спортсменом на соревновании; (г) высота географической точки над уровнем моря.

Решение. (а) номинальная; (б) отношений; (в) порядка; (г) разностей.

Задача 2. Выполнить первичную обработку данных, измеренных в шкале отношений или шкале разностей. Сделать это вручную (в крайнем случае, пользуясь калькулятором).

У тридцати школьников некоторого класса была измерена масса тела (в кг). Исходные данные: 46, 54, 51, 52, 52, 46, 50, 52, 50, 49, 55, 54, 49, 43, 50, 55, 47, 47, 52, 53, 50, 49, 52, 49, 56, 45, 46, 49, 51, 49.

Решение. Чтобы выполнить первичную обработку данных, необходимо сделать следующие шаги.

1. Сортировка. Упорядочим выборку по возрастанию (получим **вариационный ряд**). Надо постараться не потерять ни одно значение: 43, 45, 46, 46, 46, 47, 47, 49, 49, 49, 49, 49, 49, 50, 50, 50, 50, 51, 51, 52, 52, 52, 52, 53, 54, 54, 55, 55, 56.

Из упорядоченной выборки видно: минимальное значение $x_{\min} = 43$, максимальное значение $x_{\max} = 56$, размах выборки $w = x_{\max} - x_{\min} = 56 - 43 = 13$.

2. Группировка выборки и исследование группированной выборки. Так как шкала массы есть шкала отношений, и, кроме того, так как масса потенциально непрерывная величина, то можно перейти от негруппированной выборки к группированной. Для этого промежуток значений выборки от минимального до максимального надо разделить на

несколько равных частей и вычислить количество попаданий значений в тот или иной частичный интервал.

Как выбрать количество интервалов k ? Известно (по формуле Стэрджесса): $k = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$. Тогда для выборок с объёмом от 8 до 15 значений нужно 4 интервала, для выборок с объёмом от 16 до 31 значений нужно 5 интервалов, для выборок с объёмом от 32 до 65 значений уже нужно 6 интервалов (и так далее). У нас выборка объёмом в 30 значений, поэтому мы разбиваем промежуток от 43 до 56 на 5 интервалов. Итак, число интервалов равно $k = 5$.

Вычислим длину d одного частичного интервала. Для этого надо размах выборки поделить на число интервалов: $d = w/k = 13/5 = 2.6$.

Для дальнейших вычислений построим табличку (i — номер промежутка, a_i — левые концы промежутков, b_i — правые концы промежутков, $m_i = (a_i + b_i)/2$ — середины промежутков, n_i — частоты, $p_i = n_i/n$ — относительные частоты, $n = 30$ — объём выборки, $h_i = p_i/d$ — высоты столбцов гистограммы, f_i — накопленная относительная частота). Будем её последовательно заполнять.

i	a_i	b_i	m_i	n_i	p_i	h_i	f_i
1							
2							
3							
4							
5							

В первые два столбца поместим левые и правые концы интервалов: начиная от $x_{\min} = 43$ с шагом $d = 2.6$ мы получим ряд значений:

i	a_i	b_i	m_i	n_i	p_i	h_i	f_i
1	43.0	45.6					
2	45.6	48.2					
3	48.2	50.8					
4	50.8	53.4					
5	53.4	56.0					

В третий столбец мы поместим координаты середин интервалов. Чтобы их вычислить, нужно к левым концам интервалов прибавить половину длины интервала. Так как длина интервала равна 2.6, то половина этой длины равна 1.3, поэтому к левому концу каждого интервала мы прибавим 1.3.

Для чего вычисляются середины интервалов? Дело в том, что, группируя выборку, мы от непрерывного распределения переходим к дискретному, заменяющему в некотором смысле непрерывное распределение. Дискретное распределение задается множеством значений величины и множеством частот. Отсюда, множество значений величины мы формируем из точек — середин интервалов, а частоты того или иного значения будут равны частотам попадания исходных данных в соответствующий интервал.

i	a_i	b_i	m_i	n_i	p_i	h_i	f_i
1	43.0	45.6	44.3				
2	45.6	48.2	46.9				
3	48.2	50.8	49.5				
4	50.8	53.4	52.1				
5	53.4	56.0	54.7				

В четвертый столбец мы поместим частоту попадания значений выборки в каждый промежуток. Это вычисляется вручную.

i	a_i	b_i	m_i	n_i	p_i	h_i	f_i
1	43.0	45.6	44.3	2			
2	45.6	48.2	46.9	5			
3	48.2	50.8	49.5	10			
4	50.8	53.4	52.1	8			
5	53.4	56.0	54.7	5			

Сумма частот должна быть равна объёму выборки n . У нас $n = 30$.
Вычисляем: $2 + 5 + 10 + 8 + 5 = 30$.

Далее найдем относительные частоты p_i . Для этого нужно поделить частоты на объём выборки: $p_i = n_i/n$. К примеру, первая относительная частота равна $p_1 = 2/30 \approx 0.067$, вторая относительная частота равна $p_2 = 5/30 \approx 0.167$, и так далее.

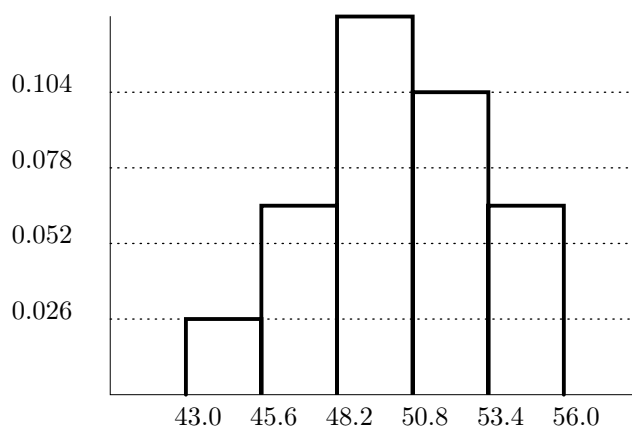
i	a_i	b_i	m_i	n_i	p_i	h_i	f_i
1	43.0	45.6	44.3	2	$2/30 \approx 0.067$		
2	45.6	48.2	46.9	5	$5/30 \approx 0.167$		
3	48.2	50.8	49.5	10	$10/30 \approx 0.333$		
4	50.8	53.4	52.1	8	$8/30 \approx 0.267$		
5	53.4	56.0	54.7	5	$5/30 \approx 0.167$		

3. Графическое представление выборки. Числовые данные плохо воспринимаются человеком. Человеку ближе образы. Представим выборку графически, построив гистограмму.

Гистограмма является аналогом функции плотности, следовательно, её площадь должна быть равна 1. Для того, чтобы обеспечить это требование, надо вычислить высоты столбцов гистограммы, поделив относительную частоту на длину частичного интервала: $h_i = p_i/d$. Так, высота первого столбца равна $h_1 = p_1/d \approx 0.067/2.6 \approx 0,026$, высота второго столбца равна $h_2 = p_2/d \approx 0.167/2.6 \approx 0,064$, и так далее.

i	a_i	b_i	m_i	n_i	p_i	h_i	f_i
1	43.0	45.6	44.3	2	0.067	0.026	
2	45.6	48.2	46.9	5	0.167	0.064	
3	48.2	50.8	49.5	10	0.333	0.128	
4	50.8	53.4	52.1	8	0.267	0.103	
5	53.4	56.0	54.7	5	0.167	0.064	

Теперь можно строить гистограмму. На каждом частичном интервале построим прямоугольник с высотой, равной вычисленному значению в таблице.

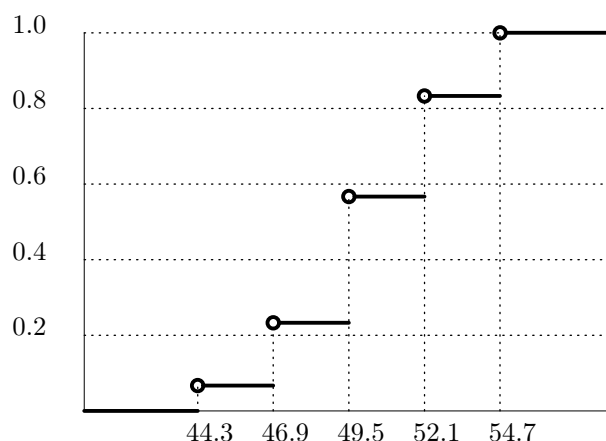


Теперь построим график функции выборочного распределения. Для этого нужно вычислить накопленные относительные частоты и поместить их в последний столбец.

Первая накопленная частота равна первой относительной частоте 0.067. Вторая накопленная частота равна сумме предыдущей накопленной частоты и второй относительной частоты: $0.067 + 0.167 = 0.234$. Третья накопленная частота равна сумме предыдущей накопленной частоты и третьей относительной частоты: $0.234 + 0.333 = 0.567$. Продолжая так далее, необходимо получить последнюю накопленную частоту, равную 1.

i	a_i	b_i	m_i	n_i	p_i	h_i	f_i
1	43.0	45.6	44.3	2	0.067	0.026	0.067
2	45.6	48.2	46.9	5	0.167	0.064	0.233
3	48.2	50.8	49.5	10	0.333	0.128	0.567
4	50.8	53.4	52.1	8	0.267	0.103	0.833
5	53.4	56.0	54.7	5	0.167	0.064	1.000

Построим теперь ступенчатый график, делая ступеньки над серединами промежутков, высоты которых равны значениям накопленной относительной частоты.



Нам остается только вычислить две числовые характеристики выборочного распределения — среднее выборочное \bar{x} и несмещённую выборочную дисперсию s^2 .

Чтобы вычислить среднее выборочное, надо перемножить середины интервалов на относительные частоты и все произведения сложить:

$$\bar{x} = 44.3 \cdot 0.067 + 46.9 \cdot 0.167 + 49.5 \cdot 0.333 + 52.1 \cdot 0.267 + 54.7 \cdot 0.167 = 50.28$$

Следовательно, средняя масса тела класса школьников равна 50.28 кг.

Чтобы вычислить несмещённую дисперсию, надо сначала все середины интервалов возвести в квадрат, умножить на соответствующие относительные частоты, все произведения сложить и из результата вычесть квадрат среднего выборочного. Так мы вычислим

смещённую дисперсию D_B . Затем надо полученное число умножить на дробь $n/(n - 1)$, где n — объём выборки.

$$D_B = 44.3^2 \cdot 0.067 + 46.9^2 \cdot 0.167 + 49.5^2 \cdot 0.333 + \\ + 52.1^2 \cdot 0.267 + 54.7^2 \cdot 0.167 - (50.28)^2 = 8.63, \\ s^2 = 8.63 \cdot \frac{30}{29} = 8.93$$

Тогда несмещённое среднее квадратическое отклонение равно $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{8.93} \approx 2.99$. Следовательно, средний разброс значений массы тела школьников (около среднего выборочного) равен 2.99 кг.

8.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Определите вид шкал:

1. Перечень студентов: {Алексеев, Антонов, Иванов, Павлов, Петров, Сидоров}
2. Возраст человека в секундах, измеренный со сколь угодно высокой точностью.
3. Шкала измерительной миллиметровой линейки.
4. Метрическая шкала измерения длины как таковая.
5. Шкала медицинского градусника.
6. Шкала измерения градусов по Цельсию как таковая.
7. Шкала измерения градусов по Кельвину как таковая.
8. Шкала электронного секундомера, измеряющего время с точностью до тысячных долей секунды.
9. Шкала времени, использующая понятия «до нашей эры», «нашей эры».
10. Электронные весы, измеряющие массу с точностью до грамма.

11. Шкала массы как таковая.
12. Номера выпусков газет.
13. Баллы ЕГЭ или ОГЭ.
14. Рейтинг шахматистов (найдите в Википедии статью Рейтинг Эло).
15. Рейтинг теннисистов АТР (найдите в Википедии статью Рейтинг АТР).
16. Номер, который присваивается спортсмену на соревновании (например, номер на футболке)
17. Количество волос на голове.
18. Количество ног у животного.
19. Перечень кафедр университета.
20. Перечень факультетов университета.
21. Перечень 256 основных цветов, используемых в HTML (при программировании web-ресурсов).
22. Количество выполненных упражнений.
23. Время, за которое спортсмен пробегает дистанцию 100 м, 200 м, 400 м и т.п.
24. Дистанция, которую спортсмен преодолевает (в беге, плавании и т.п.) за 1 мин.
25. Количество ударов сердца в минуту (частота сердечных сокращений, ЧСС).
26. Уровень артериального давления (два значения — систолическое и диастолическое).
27. Система данов в боевых искусствах.
28. Время выполнения задачи (например, по математике).
29. Балл, полученный в психологическом тесте.
30. Оценка, полученная на экзамене: {2, 3, 4, 5}
31. Перечень видов темперамента: {холерик, сангвиник, флегматик,

меланхолик}

32. Уровень воды в реке (над какой-то отметкой).
33. Давление воздуха (в миллиметрах ртутного столба).
34. Скорость какого-либо объекта (в м/с или км/ч).
35. Видимая звёздная величина (0 величина — яркость самой светлой звезды, Сириуса; 1 величина — звёзды, сияющие в два раза тусклее Сириуса; 2 величина — звёзды, светящие в 4 раза тусклее Сириуса и т.д.)
36. Громкость звука (в дБ).
37. Частота звука, электрического тока (в Гц).
38. Нумерация страниц в книге.
39. Рейтинг студента.
40. Количество друзей в социальной сети.
41. Удовлетворенность чем-либо: {очень низкая, низкая, средняя, высокая, очень высокая}
42. Ценовой показатель товара: {бесплатный товар, очень дешёвый товар, дешёвый товар, средняя цена, дорогой товар, очень дорогой товар}
43. Субъективная оценка качества обслуживания в каком-либо заведении: {очень плохое, плохое, среднее, хорошее, очень хорошее}
44. Рейтинг фильмов IMDb.
45. Рейтинг фильмов МРАА {G, PG, PG-13, R, NC-17}
46. Возрастной рейтинг информационной продукции РФ {0+, 6+, 12+, 18+}.
47. Величина заработной платы (в рублях).

2. Выполнить первичную обработку данных (вручную).

2.1. Измеряемая величина — рост студентов одной группы в см.

Исходные данные: 174, 168, 170, 170, 172, 168, 161, 160, 167, 170, 174, 169, 164, 165, 166, 173, 168, 173, 167, 167.

2.2. Измеряемая величина — наибольшее (систолическое) давление студентов одной группы в мм рт ст. Исходные данные: 111, 118, 116, 114, 115, 116, 127, 124, 123, 117, 117, 127, 120, 125, 118, 119, 115, 119, 129, 124.

2.3. Измеряемая величина — масса тела студентов одной группы в кг. Исходные данные: 48, 46, 50, 50, 51, 49, 48, 51, 49, 48, 48, 45, 57, 51, 52, 51, 49, 51, 57, 48.

2.4. Измеряемая величина — наименьшее (диастолическое) давление студентов одной группы в мм рт ст. Исходные данные: 65, 62, 69, 74, 73, 71, 79, 72, 74, 70, 72, 66, 74, 64, 70, 75, 73, 74, 68, 74.

8.5. Контрольные задания

Выполнить первичную обработку данных (можно использовать программные средства, такие, как Microsoft Excel или OpenOffice Calc).

Вариант 1. Даны результаты измерений роста (в см) группы студентов-юношей: 173.3; 187.4; 180.1; 171.9; 174.0; 176.3; 181.6; 170.4; 178.1; 180.3; 173.0; 174.3; 170.2; 182.2; 172.4; 172.1; 177.6; 170.7; 178.1; 170.9; 178.0; 168.3; 174.0; 165.7; 167.6; 172.7; 176.8; 171.1; 177.2; 181.8; 180.6; 171.7; 177.2; 175.4; 171.0; 179.3; 173.4; 170.8; 174.6; 171.3; 181.9; 166.0; 181.8; 168.5; 178.8.

Вариант 2. Даны результаты измерений роста (в см) группы студентов-девушек: 165.4; 161.8; 169.8; 165.4; 162.5; 164.8; 162.5; 166.6; 164.1; 168.8; 170.8; 165.1; 169.9; 165.3; 169.0; 166.4; 168.6; 174.6; 168.7; 159.6; 167.9; 169.6; 163.2; 169.0; 170.6; 167.6; 163.1; 162.9; 165.8; 165.8; 165.8; 164.2; 168.7; 171.7; 162.6.

Вариант 3. Даны результаты измерений времени реакции (в секундах) на тепловой раздражитель. 5.12; 6.08; 4.98; 4.19; 4.35; 6.00; 5.93; 5.64; 4.94;

4.15; 5.53; 5.46; 5.19; 4.97; 5.52; 3.65; 4.22; 4.58; 4.47; 4.61; 4.68; 5.05; 5.72; 5.29; 4.42; 5.57; 4.94; 5.42; 3.82; 5.51; 5.38; 4.79; 5.08; 4.16; 5.65; 4.60; 5.72; 5.48; 4.74; 4.61.

Вариант 4. Даны результаты измерений ошибок, делаемых людьми при оценке расстояния до некоторого удаленного объекта (в м). -1.4; 2.9; 1.3; -2.3; 1.6; 1.4; 0.1; 0.6; 2.0; 2.5; 1.7; -0.9; -0.7; -2.6; -2.0; 0.5; -2.8; 2.1; 0.1; -2.9; -1.7; 2.1; 0.8; -1.3; -2.8; -2.2; -1.5; -1.1; 0.4; -1.1; -1.2; 0.1; -0.9; -1.6; 0.4.

Вариант 5. Даны результаты измерений ошибок, делаемых людьми при оценке величины объекта (в м), удаленного на расстояние 100 м. -1.1; 1.4; -0.9; -1.6; 0.7; 1.4; 1.0; -1.0; 1.6; 2.9; -1.1; -0.8; -1.4; 1.6; -0.2; -2.6; 1.8; -2.3; -0.5; -0.4; -0.2; -2.2; -0.2; -2.3; 2.5; 0.1; 2.0; 0.8; 0.5; -2.1; -2.0; -1.4; 2.8; -0.5; 0.5; -1.4; 0.2; -0.3; -2.0; 1.8; -2.6; -1.0.

Вариант 6. Даны результаты измерений времени решения задачи поиска пути в лабиринте (в мин). 3.1; 2.9; 3.4; 2.9; 3.1; 2.9; 3.0; 2.8; 3.0; 3.0; 2.9; 2.6; 3.2; 3.1; 3.2; 3.6; 2.7; 2.8; 3.2; 2.9; 2.9; 2.8; 3.0; 2.9; 3.1; 3.1; 2.6; 3.0; 2.7; 2.5; 2.8; 3.1; 2.9; 3.1; 3.3.

Вариант 7. Даны результаты измерений времени решения математической задачи (в мин). 9.8; 4.0; 7.1; 5.9; 7.1; 8.2; 3.6; 9.9; 7.9; 6.7; 5.0; 3.2; 5.7; 6.1; 3.6; 6.1; 7.2; 6.7; 9.2; 9.6; 8.9; 9.9; 5.8; 9.2; 3.0; 3.4; 8.0; 6.7; 3.9; 2.1; 6.4; 9.9; 4.3; 5.9; 7.1; 8.7; 7.1; 7.8; 6.2; 8.2.

Вариант 8. Даны результаты измерений времени реакции (в миллисекундах) на световой раздражитель. 42; 130; 51; 284; 100; 294; 100; 252; 55; 112; 90; 259; 118; 106; 54; 70; 190; 235; 240; 158; 55; 221; 294; 53; 231; 142; 272; 273; 128; 53; 62; 292; 230; 140; 173; 209; 40; 184; 148; 88.

Вариант 9. Даны результаты измерений IQ студентов некоторого курса. 118; 93; 62; 117; 55; 103; 82; 89; 118; 97; 97; 109; 87; 101; 123; 128; 115; 110; 99; 91; 127; 111; 107; 95; 82; 79; 96; 92; 92; 82; 98; 95; 79; 97; 89; 133; 84; 92;

85; 118.

Вариант 10. Даны результаты измерений массы (в кг) студентов некоторого курса. 60.9; 46.1; 77; 49.5; 56.9; 57.5; 58.2; 62.5; 82.4; 53; 62.8; 73.6; 52.8; 62; 77.3; 61.5; 62.5; 78.7; 55.9; 67.2; 74.3; 46.3; 74.9; 89.5; 73.7; 76.7; 72.9; 66.3; 62.7; 69.1; 71.2; 59.4; 61.1; 50.8; 62.4; 64.6; 71.5; 62.2; 73.4; 65.

9. Исследование взаимосвязей между случайными величинами

9.1. Основы теории

Зачастую в процессе исследования с одного и того же объекта снимаются значения нескольких параметров. Следовательно, вместо одномерной выборки мы получаем многомерную. Простейшая ситуация — когда выборка двумерна, то есть, измеряются две величины. Например, у одного и того же школьника может измеряться как рост X , так и масса тела Y . В этом случае выборка будет представлять собой множество пар

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$$

(здесь выборка представлена как последовательность пар случайных величин). На практике, конечно, мы имеем дело с массивом пар чисел:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

Указанный массив пар можно представить графически, если каждой паре (x_i, y_i) сопоставить точку на координатной плоскости. Полученный массив точек называется **корреляционным полем**.

Встает вопрос о связи между величинами X и Y . При этом понятие *связь* можно рассматривать с разных сторон. Изложим этот вопрос с точки зрения теоретических случайных величин.

1. Величины могут быть связаны **функциональной зависимостью**

$Y = f(X)$. Например, масса тела может быть равна росту за вычетом ста: $Y = X - 100$. Показателем наличия **линейной функциональной зависимости** $Y = aX + b$

является так называемый **коэффициент корреляции Пирсона**, вычисляемый по формуле:

$$r(X, Y) = M \left(\frac{X - M(X)}{\sqrt{D(X)}} \cdot \frac{Y - M(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \right),$$

который представляет собой математическое ожидание произведения нормированных случайных величин X и Y . Говорят, что случайные величины **коррелированы**, если коэффициент корреляции не равен нулю. Если он равен нулю, то говорят, что величины **не коррелированы**. Коэффициент корреляции ограничен: $-1 \leq r(X, Y) \leq 1$.

2. Величины могут быть (вероятностно) **зависимы**. Так, в дискретном случае условие **независимости** имеет вид:

$$P(X = x \text{ и } Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y).$$

Если величины зависимы, то это условие **не выполняется**.

3. Наконец, можно рассматривать связь между случайными величинами следующим образом. Пусть случайные величины не связаны функционально, но среднее значение величины Y при каждом конкретном значении величины X , то есть, условное среднее или условное математическое ожидание $M(Y|X)$ функционально зависит от X , то есть, $M(Y|X) = f(X)$. Связь такого типа называется **регрессией**. Функция $f(X)$ называется **функцией регрессии**. В простейшем случае функция регрессии линейна: $M(Y|X) = aX + b$.

Для приведенных выше видов связей справедливы следующие утверждения:

1. Если величины X и Y независимы, то они и не коррелированы. Обратное утверждение (если случайные величины не

коррелированы, то они и независимы) в общем случае не имеет места.

2. Если величины X и Y коррелированы, то они зависимы. Обратное утверждение (если величины зависимы, то они и коррелированы) также не имеет места в общем случае.
3. $|r(X, Y)| = 1$ тогда и только тогда, когда X и Y линейно функционально зависимы, то есть, $Y = aX + b$. Отсюда можно вывести интерпретацию коэффициента корреляции, как параметра, показывающего, насколько связь между случайными величинами близка к линейной функциональной зависимости. Чем ближе значение коэффициента корреляции к 0, тем менее выражено наличие линейной зависимости, а чем ближе к +1 или к -1, тем более выражено наличие линейной зависимости.
4. Если $r(X, Y) = 0$, то это не говорит о том, что между величинами нет функциональной зависимости. Линейной зависимости нет, но она может быть нелинейна.

Пусть нам дан массив $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, который представляет собой реализацию двумерной выборки. Необходимо оценить наличие корреляционной связи и регрессионной связи между измеряемыми величинами X и Y .

Выборочный коэффициент корреляции вычисляется по формуле:

$$r_{\text{выб}} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})n_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 n_i} \sqrt{\sum_{j=1}^k (y_j - \bar{y})^2 n_j}},$$

где n_{ij} — частота пары (x_i, y_j) , $n_i = \sum_{j=1}^k n_{ij}$, $n_j = \sum_{i=1}^m n_{ij}$,

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^m x_i \cdot \frac{n_i}{n}, \quad \bar{y} = \sum_{j=1}^k y_j \cdot \frac{n_j}{n} \quad (\text{выборка группирована по каждой паре}).$$

Если известно, что функция регрессии **линейна**, то есть, $\bar{y}_x = ax + b$, где \bar{y}_x есть условное среднее выборочное величины Y , то коэффициенты a и b вычисляются с помощью **метода наименьших квадратов**, при котором разыскивается минимум суммы квадратов отклонений значений функции регрессии от выборочных значений величины Y , а именно, $\min_{a, b} \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$. Указанный метод даёт следующие формулы для вычисления коэффициентов a и b :

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

Здесь все суммы берутся при i , изменяющемся от 1 до n (выборка негруппирована).

Замечание 5. Также можно искать коэффициенты функции регрессии $\bar{x}_y = cy + d$. Кроме того, метод наименьших квадратов применим не только при условии линейности функции регрессии.

Коэффициенты уравнения $\bar{y}_x = ax + b$ линии регрессии Y на X и уравнения $\bar{x}_y = cy + d$ линии регрессии X на Y могут быть найдены иным способом. Имеется представление этих уравнений в симметричной форме:

$$\bar{y}_x = r_{\text{выб}} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}) + \bar{y}, \quad \bar{x}_y = r_{\text{выб}} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y}) + \bar{x}$$

или

$$\bar{y}_x = r_{\text{выб}} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot x + \left(\bar{y} - r_{\text{выб}} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot \bar{x} \right),$$

$$\bar{x}_y = r_{\text{выб}} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot y + \left(\bar{x} - r_{\text{выб}} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot \bar{y} \right)$$

Отсюда

$$b = \bar{y} - r_{\text{выб}} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot \bar{x}, \quad a = r_{\text{выб}} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x},$$

$$d = \bar{x} - r_{\text{выб}} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot \bar{y}, \quad c = r_{\text{выб}} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}.$$

Здесь $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ — среднее выборочное X , $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ —

среднее выборочное Y , $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ — выборочное

среднеквадратическое отклонение X , $\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$ —

выборочное среднеквадратическое отклонение Y , $r_{\text{выб}}$ — выборочный

коэффициент корреляции, в случае негруппированной выбоки формулы для его вычисления:

$$r_{\text{выб}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n(\bar{y})^2}}.$$

Рассмотрим случай, когда массив пар (x_i, y_i) ($i=1 \dots n$) **упорядочен по возрастанию значений величины X** (то есть, $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$). При этом значения величины Y могут и **не быть** упорядочены.

Заменяем каждое значение x_i его **рангом** u_i во множестве значений величины X (в частности, если все значения x_i различны, то ранги совпадают с порядковыми номерами значений $u_i = i$), а каждое значение y_i заменим его рангом v_i во множестве значений величины Y . Получим массив пар рангов (представим его в виде таблицы)

u_i	u_1	u_2	u_3	\dots	u_{n-1}	u_n
v_i	v_1	v_2	v_3	\dots	v_{n-1}	v_n

Выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена

$$\rho_{\text{выб}} = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2}{(n-1)n(n+1)}$$

Он также располагается в пределах от -1 до $+1$: $-1 \leq \rho_{\text{выб}} \leq 1$.

Если обе выборки упорядочены по возрастанию, то для всех $i = 1 \dots n$

выполняется $u_i - v_i = 0$, и тогда $\rho_{\text{выб}} = 1$. Если же выборка Y была упорядочена строго по убыванию, то $\rho_{\text{выб}} = -1$. Итак, выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена отражает меру совпадения последовательностей рангов выборочных значений.

Пусть теперь R_1 — количество рангов, находящихся во второй строке таблицы рангов, лежащих правее v_1 и строго больших v_1 , R_2 — количество рангов, находящихся во второй строке таблицы, лежащих правее v_2 и строго больших v_2 , и так далее, до R_{n-1} , равного количеству рангов, находящихся во второй строке таблицы, лежащих правее v_{n-1} и строго больших v_{n-1} .

Суммируем эти числа: $R = R_1 + R_2 + \dots + R_{n-1}$.

Тогда **выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла**

$$\tau_{\text{выб}} = \frac{4R}{(n-1)n} - 1.$$

Его значение располагается в пределах от -1 до $+1$: $-1 \leq \tau_{\text{выб}} \leq 1$. Если обе выборки упорядочены по возрастанию, то $\tau_{\text{выб}} = 1$. Если же выборка Y упорядочена строго по убыванию, то $\tau_{\text{выб}} = -1$. Итак, выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла также отражает меру совпадения последовательностей рангов выборочных значений.

9.2. Контрольные вопросы

1. Что такое корреляционное поле?
2. Опишите виды связи между случайными величинами. Дайте им характеристику, сформулируйте утверждения, которые справедливы для различных видов связи между случайными величинами.
3. Как вычислить выборочный коэффициент корреляции Пирсона?

4. Какой метод используется для вычисления параметров функции регрессии?
5. Как вычислить выборочные коэффициенты ранговой корреляции Спирмена и Кендалла?

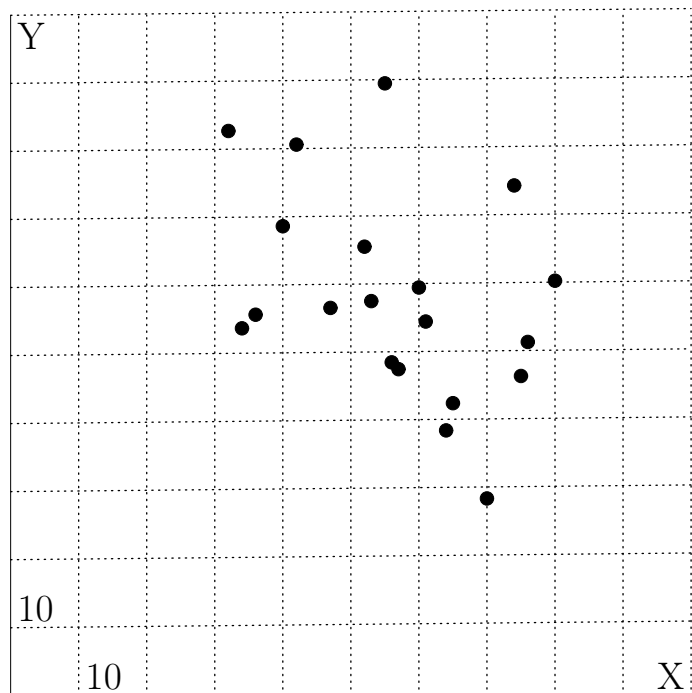
9.3. Типовые задачи

Задача 1. Дан массив, состоящий из двадцати пар измерений непрерывной двумерной величины (X, Y) , сделанных в сильной шкале (разностей или отношений):

(32; 83); (34; 54); (36; 56); (40; 69); (42; 81); (47; 57); (52; 66); (53; 58);
(55; 90); (56; 49); (57; 48); (60; 60); (61; 55); (64; 39); (65; 43); (70; 29);
(74; 75); (75; 47); (76; 52); (80; 61).

(а) Построить корреляционное поле. (б) Вычислить коэффициент корреляции Пирсона. Высказать суждение о тесноте линейной связи между измеряемыми величинами. (в) Вычислить выборочные характеристики выборок X и Y и найти уравнения линий линейной регрессии Y на X и X на Y . (г) Вычислить выборочные коэффициенты ранговой корреляции Спирмена и Кендалла. Высказать суждение о мере совпадения рангов выборок.

Решение. (а) Корреляционное поле:



(б) Для дальнейших вычислений нам необходимо составить вспомогательную таблицу (в ней данные уже упорядочены по возрастанию значений x_i ($i = 1 \dots 20$), последние два столбца — ранги

значений x_i и y_i):

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$	u_i	v_i
1	32	83	1024	6889	2656	1	19
2	34	54	1156	2916	1836	2	8
3	36	56	1296	3136	2016	3	10
4	40	69	1600	4761	2760	4	16
5	42	81	1764	6561	3402	5	18
6	47	57	2209	3249	2679	6	11
7	52	66	2704	4356	3432	7	15
8	53	58	2809	3364	3074	8	12
9	55	90	3025	8100	4950	9	20
10	56	49	3136	2401	2744	10	6
11	57	48	3249	2304	2736	11	5
12	60	60	3600	3600	3600	12	13
13	61	55	3721	3025	3355	13	9
14	64	39	4096	1521	2496	14	2
15	65	43	4225	1849	2795	15	3
16	70	29	4900	841	2030	16	1
17	74	75	5476	5625	5550	17	17
18	75	47	5625	2209	3525	18	4
19	76	52	5776	2704	3952	19	7
20	80	61	6400	3721	4880	20	14
Σ	1129	1172	67791	73132	64468	210	210

Дадим пояснения, как заполнялась таблица. В первом столбце находятся порядковые номера измерений. Во второй столбец помещены упорядоченные по возрастанию значения x_i . В третий столбец — значения y_i , связанные с x_i в каждой паре. Видно, что они не

упорядочены. В четвертый и пятый столбцы помещены квадраты значений x_i и y_i соответственно, а в пятый — произведения $x_i y_i$ этих значений по каждой паре.

Предпоследний столбец содержит ранги выборочных значений x_i . Так, если выборочные значения различны, то ранги совпадают их с порядковыми номерами в упорядоченной выборке. Если несколько выборочных значений совпадают, то в качестве их ранга (одного на всех) берется **среднее арифметическое их порядковых номеров**. В нашем случае нет совпадающих элементов, как среди x_i , так и среди y_i (этот факт говорит в пользу непрерывности их распределений). Последний столбец содержит ранги выборочных значений y_i . Так как значения не упорядочены по возрастанию, то и ранги, соответственно, расставлены в том же порядке, в каком расположены y_i .

В последней строке располагаются суммы по каждому столбцу (для их вычисления и в целом, для работы с большими массивами чисел советуем использовать электронные таблицы). С их помощью получаем:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1129}{20} = 56.45, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1172}{20} = 58.6,$$

$$r_{\text{выб}} = \frac{64468 - 20 \cdot \frac{1129}{20} \cdot \frac{1172}{20}}{\sqrt{67791 - 20 \cdot \left(\frac{1129}{20}\right)^2} \sqrt{73132 - 20 \cdot \left(\frac{1172}{20}\right)^2}} \approx -0.398$$

Выборочный коэффициент корреляции отрицателен (это говорит о том, что при увеличении значений X значения Y , в целом, уменьшаются), но он более близок к нулю, чем к -1 , следовательно, степень выраженности линейной функциональной связи невелика.

(в) выборочные средние уже вычислены: $\bar{x} = 56.45$, $\bar{y} = 58.6$.

Выборочные среднеквадратические отклонения:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{67791}{20} - \left(\frac{1129}{20}\right)^2} \approx 14.256,$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{73132}{20} - \left(\frac{1172}{20}\right)^2} \approx 14.921.$$

Тогда коэффициенты уравнений линий регрессии $\bar{y}_x = ax + b$ и $\bar{x}_y = cy + d$:

$$b = \bar{y} - r_{\text{выб}} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot \bar{x} \approx 58.6 + 0.398 \cdot \frac{14.921}{14.256} \cdot 56.45 \approx 82.12,$$

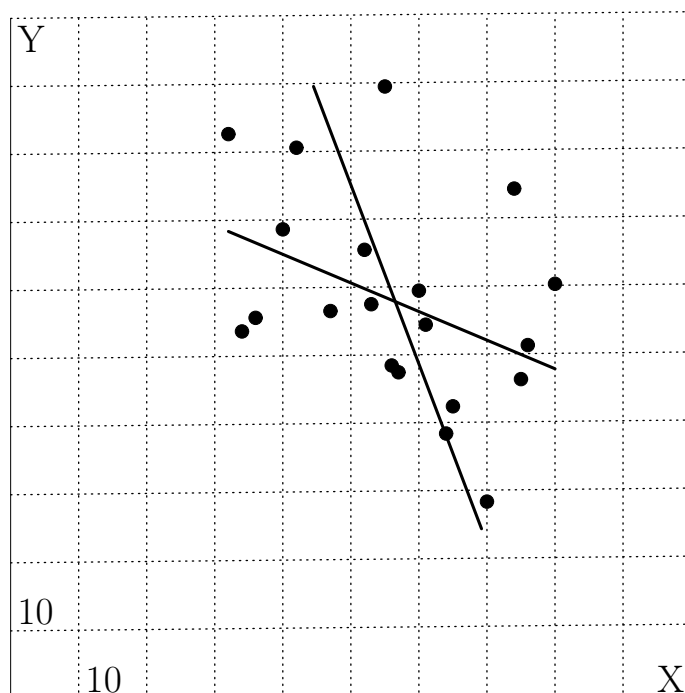
$$a = r_{\text{выб}} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \approx -0.398 \cdot \frac{14.921}{14.256} \approx -0.42,$$

$$d = \bar{x} - r_{\text{выб}} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot \bar{y} \approx 56.45 + 0.398 \cdot \frac{14.256}{14.921} \cdot 58.6 \approx 78.71,$$

$$c = r_{\text{выб}} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \approx -0.398 \cdot \frac{14.256}{14.921} \approx -0.38.$$

Значит, уравнение линии регрессии Y на X : $\bar{y}_x = -0.42x + 82.12$, а уравнение линии регрессии X на Y : $\bar{x}_y = -0.38y + 78.71$.

Добавим на координатную плоскость к корреляционному полю линии регресси:



(г) Для вычисления выборочных коэффициентов ранговой корреляции составим табличку:

i	u_i	v_i	$u_i - v_i$	$(u_i - v_i)^2$	R_i
1	1	19	-18	324	1
2	2	8	-6	36	11
3	3	10	-7	49	9
4	4	16	-12	144	3
5	5	18	-13	169	1
6	6	11	-5	25	6
7	7	15	-8	64	2
8	8	12	-4	16	4
9	9	20	-11	121	0
10	10	6	4	16	5
11	11	5	6	36	5
12	12	13	-1	1	2
13	13	9	4	16	2
14	14	2	12	144	5
15	15	3	12	144	4
16	16	1	15	225	4
17	17	17	0	0	0
18	18	4	14	196	2
19	19	7	12	144	1
20	20	14	6	36	
Σ				1906	67

В столбцах с первого по третий находятся данные из предыдущей

таблицы — порядковые номера элементов, ранги выборочных значений. В четвёртый столбец помещены разности рангов, а в пятый — квадраты этих разностей. Наконец, в последнем столбце располагаются величины R_i . Напомним, как они вычисляются. Так, первый элемент третьего столбца $v_1 = 19$, и ниже его только один элемент строго больше его: 20. Значит, $R_1 = 1$. Далее, $v_2 = 8$, и ниже его одиннадцать элементов, больших его: 10, 16, 18, 11, 15, 12, 20, 13, 9, 17, 14. Следовательно, $R_2 = 11$. Остальные числа последнего столбца вычислены аналогичным методом.

Последняя строка содержит необходимые суммы. Тогда выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена равен

$$\rho_{\text{выб}} = 1 - \frac{6 \cdot 1906}{(20 - 1) \cdot 20 \cdot (20 + 1)} \approx -0.433.$$

Выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла равен

$$\tau_{\text{выб}} = \frac{4 \cdot 67}{(20 - 1) \cdot 20} - 1 \approx -0.295.$$

Выборочные коэффициенты ранговой корреляции оказались отрицательны (это говорит о том, что ранги v_i располагаются в порядке, в целом, противоположном к порядку рангов u_i), но они невелики, следовательно, связь рангов не сильна.

9.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Дан массив, состоящий из двадцати пяти пар измерений непрерывной двумерной величины (X, Y) , сделанных в сильной шкале (разностей или отношений):

(46.6; 50.0), (42.2; 51.2), (36.2; 54.4), (51.6; 57.4), (42.0; 58.0),
 (58.5; 59.9), (56.6; 61.4), (61.4; 62.2), (61.7; 62.3), (62.2; 63.1),

(41.7; 65.6), (68.3; 68.4), (66.3; 70.4), (68.1; 70.6), (53.0; 71.9),
(62.4; 73.1), (70.4; 73.2), (52.5; 77.3), (73.6; 78.1), (73.2; 80.5),
(74.1; 85.7), (77.4; 92.4), (91.5; 104.3), (93.3; 104.5), (93.5; 113.4).

Пользуясь электронными таблицами, выполнить задания:
(а) Построить корреляционное поле. (б) Вычислить коэффициент корреляции Пирсона. Высказать суждение о тесноте линейной связи между измеряемыми величинами. (в) Вычислить выборочные характеристики выборок X и Y и найти уравнения линий линейной регрессии Y на X и X на Y . (г) Вычислить выборочные коэффициенты ранговой корреляции Спирмена и Кендалла. Высказать суждение о мере совпадения рангов выборок.

9.5. Контрольные задания

Обработать двумерные массивы данных, как это было показано выше в примерах.

Вариант 1. (11.8; 5.3), (12.4; 7.7), (16.8; 22), (8.9; 5.4), (13.9; 15),
(11.8; 18.6), (20; 27.9), (11.5; 12.2), (15.6; 21.9), (14.6; 17.8).

Вариант 2. (21.6; 29.4), (15.4; 25.5), (26.3; 33.9), (14.2; 18.5), (16; 19.7),
(13.8; 31.4), (15.3; 22.2), (18; 19.4), (7.5; 8.9), (15.8; 21.7).

Вариант 3. (15.4; 14.9), (18.9; 20.8), (19.7; 26.6), (15.8; 21.9), (10.9; 13.7),
(16.6; 21.2), (23.3; 38.2), (12.7; 20.7), (13.9; 17), (18.9; 31.2).

Вариант 4. (9.9; 23.5), (6.1; 6.4), (15.2; 12.6), (20.3; 24.8), (16.1; 23),
(13; 12.6), (27.1; 35.4), (18.2; 24.2), (20.3; 29.9), (12.6; 23.7).

Вариант 5. (18.1; 17.6), (11.3; 14), (13.6; 9.9), (15.4; 19.7), (15.1; 20.4),
(18.8; 20.7), (8.1; 14.9), (17.6; 27.2), (22.4; 28.8), (18.3; 17.2).

Вариант 6. (8.5; 15), (14; 28.5), (13.8; 9.8), (6; 20.1), (22.1; 28.4),
(16.4; 14.6), (12.1; 12), (12.1; 19.8), (16.7; 32.7), (16.4; 17.2).

Вариант 7. (4.1; 9.5), (14.7; 19.9), (22.2; 28.7), (17.1; 17.5), (7.9; 16.2), (13.6; 15.4), (8.3; 14.2), (16.5; 13.9), (16.2; 23), (15.5; 22).

Вариант 8. (19.9; 20.1), (15.4; 20.8), (9.3; 5.8), (19.1; 20.2), (13.1; 23.7), (15.2; 13.7), (19.6; 26.2), (12.8; 13.1), (9.8; 4.6), (13; 15.9).

Вариант 9. (13.6; 10.6), (11.2; 14.1), (22.4; 26.5), (18.6; 19), (17.5; 19.9), (2.6; 18.2), (13.3; 16.2), (13; 15.3), (19.6; 25), (16.6; 20).

Вариант 10. (11; 13.8), (8.9; -1.5), (17; 14.4), (9.9; 1.8), (22.7; 26.9), (25.8; 38), (21.9; 25.1), (19.9; 20.3), (16.1; 13.7), (21.9; 36.7).

Заключение

Современный уровень педагогической науки и профессиональный стандарт педагога требуют от выпускника, обучавшегося на одноименном направлении, сформированных компетенций в области готовности к проведению научно-педагогического исследования. Настоящий практикум призван помочь учащемуся в их формировании.

Представленное издание служит будет полезно всем студентам первого курса, обучающимся по педагогическим направлениям, так как дисциплина, в поддержку которой создан данный практикум, входит в учебный план различных профилей направлений указанной группы.

Все замечания по содержанию данного учебного издания можно направлять на электронный почтовый ящик: anatanza@mail.ru. Авторы будут признательны за любые конструктивные предложения, направленные на улучшение издания.

Библиография

1. Андрухаев Х. М. Сборник задач по теории вероятностей; Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по спец. 2104 «Математика», «Математика с доп. спец. физика» и 2105 «Физика с доп. спец. математика» / Под ред. А. С. Солодовникова. — М.: Просвещение, 1985. — 160 с.
2. Битинас Б. Многомерный анализ в педагогике и педагогической психологии. — Вильнюс: НИИ школ Министерства просвещения Литовской ССР, 1971. — 348 с.
3. Большой толковый социологический словарь (Collins). В 2 т. Т. 2 (П-Я); пер. с англ. — М.: Вече, АСТ, 1999. — С. 158.
4. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М. : «Высшая школа», 1979. — 400 с.
5. Математическая энциклопедия. Гл. ред. И. В. Виноградов. Т. 3. — М. : «Наука», 1981. — 1184 с.
6. Математический энциклопедический словарь / Под ред. Ю. В. Прохорова. — М. : «Советская энциклопедия», 1988. — 848 с.
7. Сборник задач по математике для втузов. Часть 4: Учебное пособие для втузов/ Под общей редакцией А.В. Ефимова и А.С. Пospelова. — М.: Издательство физико-математической литературы, 2003. — 432 с.
8. Стивенс С. С. Экспериментальная психология. В 2-х т. Т. 1. — М. : Иностранная литература, 1960. — 686 с.
9. Стивенс С. С. Экспериментальная психология. В 2-х т. Т. 2. — М. : Иностранная литература, 1963. — 1035 с.
10. Чернова Н.И. Математическая статистика: Учеб. пособие. —

Новосибирск: СибГУТИ, 2009. — 90 с.

11. Чернова Н.И. Теория вероятностей: Учебное пособие. — Новосибирск: СибГУТИ, 2009. — 128 с.

12. Ядов В.А. Социологическое исследование: методология, программа, методы. — М.: Наука, 1972. — 352 с.