ЗОВСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

А. В. Белошистая

Методика обучения математике в начальной школе

Курс лекций

ГУМАНИТАРНЫЙ ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР ВЛАДОС

ВУЗОВСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

А.В. Белошистая

Методика обучения математике в начальной школе

Курс лекций

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по специальностям педагогического образования в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Педагогика и методика начального образования»

Москва

ГУМАНИТАРНЫЙ ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР ВЛАДОС

2007

УДК 373.3.016:51(075.8)
ББК 74.262.21я73
Б43

Рецензенты:
доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой педагогического проектирования Мурманского педагогического университета ***Левитас Д.Г.***;
кандидат педагогических наук, доцент, заведующая кафедрой дошкольного и начального образования Мурманского Института повышения квалификации ***Жукова О.Г.***

Белошистая А.В.
Б43 Методика обучения математике в начальной школе : курс лекций : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по спец. «Педагогика и методика начального образования» / А.В. Белошистая. — М. : Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2007. — 455 с. : ил. — (Вузовское образование).
ISBN 978-5-691-01422-2.
Агентство CIP РГБ.

Курс лекций написан в соответствии с программой «Методика преподавания математики» для педагогических специальностей педвузов и педуниверситетов. Пособие не только ознакомит студентов с конкретными примерами обучения младших школьников математике, но и расширит педагогический и математический кругозор будущего учителя. В пособии рассмотрены методические вопросы организации личностно-ориентированного подхода к обучению математике (коррекционное обучение и работа со способными детьми), методы организации учебной деятельности на уроках математики, вопросы развития математического мышления младших школьников.

Пособие является своеобразным справочником по методике обучения математике, содержит советы и указания учебно-психологического и практического характера.

УДК 373.3.016:51(075.8)
ББК 74.262.21я73

ISBN 978-5-691-01422-2

Оглавление

Глава 1. Общие вопросы методики преподавания математики 5
Лекция 1.
Организация математического развития ребенка как способ реализации «Концепции непрерывного образования в системе дошкольного и начального образования» 5
Лекция 2.
Предмет, задачи и цели изучения курса методики преподавания математики в вузе 12
Лекция 3.
Традиционная и альтернативные системы обучения математике младших школьников 24
Лекция 4.
Психолого-педагогические основы организации математического развития младших школьников 43
Глава 2. Изучение чисел в начальной школе 48
Лекция 5.
Понятие числа и числа первого десятка 48
Лекция 6.
Разряды числа 57
Глава 3. Изучение арифметических действий в начальной школе 80
Лекция 7.
Вычислительные приемы сложения и вычитания для чисел первого и второго десятка 80
Лекция 8.
Вычислительные приемы сложения и вычитания для чисел первой сотни 101
Лекция 9.
Вычислительные приемы сложения и вычитания для чисел первой тысячи и многозначных чисел 128
Лекция 10.
Умножение 138
Лекция 11.
Деление 150
Лекция 12.
Особые случаи умножения и деления 155

Лекция 13.
Письменное умножение и деление 174
Лекция 14.
Приемы рациональных вычислений в начальных классах ... 187

Глава 4. Изучение величин в начальной школе 193
Лекция 15.
Основные величины, изучаемые в начальной школе 193

Глава 5. Геометрический материал в программе начальных классов 215
Лекция 16.
Элементы геометрии в начальной школе 215

Глава 6. Алгебраический материал в программе начальных классов 241
Лекция 17.
Элементы алгебры в начальной школе 241

Глава 7. Доли и дроби в курсе математики начальных классов 256
Лекция 18.
Система изучения дробей в начальной школе 256

Глава 8. Решение задач в начальной школе 266
Лекция 19.
Обучение младших школьников решению задач 266
Лекция 20.
Методика обучения решению задач 285
Лекция 21.
Использование приема моделирования при обучении решению задач 305

Глава 9. Методическая подготовка учителя к обучению математике в начальной школе 358
Лекция 22.
Подготовка учителя к уроку математики в начальных классах 358

Глава 10. Личностно-ориентированное обучение на уроках математики в начальной школе 401
Лекция 23.
Индивидуализация обучения математике как средство развития личности учащегося начальных классов 401

Литература 454

Глава 1

Общие вопросы методики преподавания математики

Лекция 1.

Организация математического развития ребенка как способ реализации «Концепции непрерывного образования в системе дошкольного и начального образования»

Математика сегодня — это одна из жизненно важных областей знания современного человечества, необходимая для существования человека в цивилизованном обществе. Широкое использование техники, в том числе и компьютерной, требует от индивида определенного минимума математических знаний и представлений.

Существуют различные взгляды на объем и качество этого необходимого для социализации минимума. Проблема создания оптимального курса математики для общеобразовательной школы более чем актуальна.

На сегодняшний день существует не менее пятнадцати учебников по математике для начальных классов, и почти все они рекомендованы Министерством образования и науки РФ к использованию в учебном процессе.

Последнее десятилетие XX в. характеризуется значимыми изменениями в подходах к определению целей начального математического образования. Эти изменения были порождены *сменой приоритетных целей обучения:* их обусловленностью на современном этапе проблемой воспитания личности ребенка на *основе личностно-ориентированного деятельностного подхода*[1].

Рассмотрим эти изменения. С этой позиции целесообразным будет тот курс математики для младших школьников, который позволял бы *средствами данного предмета реализовать идею развивающего обучения,* и в то же время обеспечивал усвоение

[1] См.: *Пышкало А.М., Давыдов В.В., Жирова Л.Е.* Концепция начального образования / Начальная школа. 1992. № 7—8.

соответствующих знаний и умений, готовил и позволял бы уже с первых шагов творчески использовать их при решении разнообразных задач как практического, так и теоретического характера.

Базовым положением упомянутой выше концепции является положение о том, что начальное звено в системе школьного образования обладает своей собственной непреходящей ценностью, и поэтому обязано предоставить ребенку возможность и условия самореализации в тех видах деятельности, которые являются ведущими в этом возрасте. Полагая учебную деятельность ведущим видом деятельности в этом возрасте, необходимо при построении системы (содержание, методы, средства, формы организации обучения) предусмотреть возможность самореализации ребенка при изучении конкретного содержания. Иными словами, ребенок младшего школьного возраста должен всегда видеть и понимать применимость своих знаний и умений в значимой *для него* практической деятельности.

Иными словами, *на данном этапе жизни ребенка образовательная система обязана предоставить ему возможность и условия самореализации в тех видах деятельности, которые являются ведущими в этом возрасте*.

В «Концепции непрерывного образования детей дошкольного и младшего школьного возраста» обозначены общие цели:

- воспитание нравственного человека;
- охрана и укрепление физического и психического здоровья детей;
- сохранение и поддержка индивидуальности ребенка, физическое и психическое развитие детей.

Знания, умения и навыки рассматриваются в системе непрерывного образования в качестве важнейшего *средства* развития ребенка.

В интервью с академиком А.А. Леонтьевым, приведенном после текста «Концепции», особо отмечено то, что «Концепция» не имеет целью обозначать чему и как учить, а призвана обозначить, что *именно в развитии ребенка должно обеспечить образование* и каким мы ожидаем видеть ребенка на пороге начальной, а затем средней школы.

Поскольку «Концепция» не уходит от содержательной характеристики образования, целесообразнее было бы предположить, что средством развития ребенка должно стать это содержание, а усвоение знаний умений и навыков — следствием достижения ребенком определенного уровня развития познавательной деятельности.

Применяя свои знания и умения в различных видах значимой для него деятельности, ребенок будет самоутверждаться и самореализовываться как *личность*. А задача педагога — сделать этот процесс успешным для ребенка, т. е. таким образом организовать условия этой деятельности, чтобы ребенок сумел справиться

со всеми ее проблемами, используя свои знания и умения. При этом, чем выше методическое мастерство педагога, тем незаметнее для ребенка становится его помощь в преодолении возникающих трудностей. Именно в этом случае возможно достижение ребенком эмоционального благополучия, стимулирование активности детей в различных видах деятельности, развитие компетентности в сфере отношений к миру, к людям, к себе; будут решаться обозначенные в «Концепции» **приоритетные задачи** непрерывного образования детей на ступени начальной школы:

- осознанное принятие ценностей здорового образа жизни и регуляция своего поведения в соответствии с ними;
- готовность к активному взаимодействию с окружающим миром (эмоциональная, интеллектуальная, коммуникативная, деловая и др.);
- желание и умение учиться, готовность к образованию в основном звене школы и самообразованию;
- инициативность, самостоятельность, навыки сотрудничества в разных видах деятельности;
- совершенствование достижений дошкольного развития (на протяжении всего начального образования); специальная помощь по развитию несформированных в дошкольном детстве качеств;
- индивидуализация процесса обучения, особенно в случаях опережающего развития или отставания.

С этой точки зрения создание системы непрерывного образования на дошкольной и начальной ступени имеет ***цель***:

- сохранение самоценности каждого возрастного периода развития ребенка;
- формирование у дошкольника готовности к школьному обучению не на содержательном, а на деятельностном уровне, т.е. наличие сформированности умений учиться как фундаментальных новообразований, что обеспечит психологическую готовность ребенка к школе;
- освоение ребенком разных форм взаимодействия с окружающим миром;
- обеспечение индивидуализации процесса обучения и развития ребенка[1].

Все обозначенные выше цели создания системы непрерывного образования на дошкольной и начальной ступени требуют глубокой аналитической исследовательской деятельности от специалистов, разрабатывающих проблему преемственности между дошкольным и начальным звеном, поскольку вопросы формирования

[1] См.: Резолюция Всероссийского совещания руководителей органов управления образованием «Проблемы преемственности дошкольного и начального образования». Москва, октябрь, 1999 / Начальная школа. 2000. № 1. С. 6.

умений учиться как психологических новообразований в дошкольном возрасте являются практически не разработанными в теории дошкольного воспитания. Отсутствие преемственности между дошкольным и начальным школьным образовательным звеном в этом вопросе порождает как для ребенка, так и для учителя начальных классов сложнейшую проблему адаптации ребенка к условиям школьного обучения в первом классе. Многие психологи и специалисты коррекционного обучения полагают, что негативные последствия адаптационного стресса могут в дальнейшем оказать влияние на весь процесс обучения ребенка в начальной школе. То же самое можно сказать об уровне разработки одной из сложнейших на сегодняшний день проблем процесса организации обучения — его индивидуализации (как на дошкольном, так и на школьном этапе), особенно в случаях опережающего развития или отставания.

Содержательный объем начального математического образования ребенка определяется не столько количеством (перечнем) понятий и способов действий с ними, определенным программой обучения, сколько той ролью, которую может и должно сыграть это содержание в развитии личности ребенка в этот период. Традиционно учитель всегда был более озабочен процессом формирования знаний и умений младшего школьника. На это нацеливали программы, непременно снабженные перечнями четко обозначенных знаний и умений школьников на всех этапах обучения. На это всегда были негласно ориентированы требования преемственности обучения, понимаемой как наличие, главным образом, предметных знаний и умений школьников при переходе в среднее звено. И сегодня, на вопрос: «Что вы хотите от выпускника начальной школы?» абсолютное большинство предметников-математиков отвечает: «Умения считать, знания таблиц сложения и умножения, письменных алгоритмов действий и умения решать арифметические задачи». К сожалению, могут пройти еще годы и годы, пока новая образовательная парадигма будет осознанна и принята педагогами всех ступеней образования.

Как же на сегодня формулируются цели начального образования в общем и начального математического образования в частности в рассматриваемой Концепции и насколько это соотносится с традиционными требованиями средней школы к уровню математической подготовки выпускника начальной школы?

В Концепции отмечается, что начальное образование имеет свои характерные особенности, резко отличающие его от последующих этапов систематического школьного образования.

Во-первых, это первоначальное формирование учебно-познавательной деятельности детей и, в частности, познавательной мотивации.

Во-вторых, это становление самосознания и самооценки ребенка как субъекта новой для него деятельности («Я — ученик, школьник»).

В-третьих, это особое значение начального образования как базы всего последующего обучения применительно ко всем образовательным областям. Без овладения чтением, письмом, счетом и т. д. невозможно образование на следующих этапах.

В-четвертых, предполагается, что в начальной школе закладываются основы обобщенного и целостного представления о мире, человеке, его творческой деятельности, которые развиваются и дифференцируются в основной школе.

Специфика начальной школы как самоценного звена общей системы образования проявляется и в том, что каждый компонент его содержания способен «обслуживать» различные образовательные области и предметы, их составляющие, вносит свой вклад в развитие ребенка и его подготовку к дальнейшему образованию. Таким образом, содержание начального образования, выполняя одну из важнейших функций — *формирование готовности к дальнейшему образованию и самообразованию*, — может рассматриваться как пропедевтическое по отношению к содержанию образования в основной школе.

Исходя из сказанного, авторы Концепции считают, что нельзя прямо проецировать в содержание начального образования систему образовательных областей, принятых в основной школе. Применительно к начальной школе целесообразно говорить не об образовательной области, а о введении в образовательную область. Такое уточнение оправданно, так как, *во-первых*, определяет целевую направленность образования в начальной школе на общее развитие ребенка, *во-вторых*, подтверждает его непрерывность и преемственность с основной школой, *в-третьих*, подчеркивает специфику начального образования и необходимость ее учитывать при отборе содержания образования.

В таблице (с. 10) показана предлагаемая в Концепции преемственность между конкретным Введением в образовательную область, предложенным для начальной школы, и конкретной Образовательной областью, изучаемой в основном звене школы. Следует иметь в виду, что пропедевтическая роль каждого компонента начального образования по отношению к другим образовательным областям отражается на уровне содержания образования.

Рассматривая математику как образовательную область, прежде всего следует определить вклад данной образовательной области в развитие умения учиться как основного новообразования младшего школьника в результате его обучения в начальной школе.

Применительно к математическому содержанию формирование умения учиться, помимо рефлексии как центрального механизма,

Введение в образовательную область (начальная школа)	Образовательная область (основное звено школы)
Словесность	Филология
Математика	Математика
Человек и окружающий мир	Естествознание Обществознание Технология
Искусство и художественный труд	Искусство Технология
Физическая культура	Физическая культура

лежащего в основе изменений мышления, деятельности, коммуникации и самосознания, предполагает ***развитие***:

- интуитивного и логического мышления и соответствующего им математического языка;
- элементарных мыслительных операций (анализа, синтеза, сравнения, сериации, классификации и др.);
- умений оперировать знаково-символическими средствами, выражать содержание (объекты, явления, признаки, отношения, действия, преобразования) в разных знаково-символических формах, переходить от одного языка к другому, отделять содержание от формы его представления;
- начал творческой деятельности (пространственного воображения, способов решения задач, представления информации и др.).

В соответствии с этими целями развития проектируется предметное содержание учебной деятельности. *Образовательные цели* обучения математике младших школьников, достижение которых должно одновременно обеспечить перечисленные цели развития, могут быть сформулированы следующим образом:

1) овладение определенной системой математических понятий и общих способов действий по двум ведущим содержательным линиям: «Число и вычисления» и «Пространственные отношения. Геометрические фигуры. Измерение геометрических величин»;

2) овладение первоначальными представлениями о ведущем математическом методе познания реальной действительности — математическом моделировании;

3) формирование общего умения решать задачи.

Содержательная линия ***«Число и вычисления»*** дает учащимся возможность получить представления о натуральном числе как результате счета и измерения величин, понять особенности построения натурального ряда чисел, освоить принцип позиционной системы записи чисел, овладеть арифметическими действиями с натуральными числами и величинами.

Реализация в обучении второй линии ***«Пространственные отношения. Геометрические фигуры. Измерение геометрических величин»*** предоставляет школьникам возможность осознать геометрические формы как образы предметов окружающего мира; познакомиться с различными геометрическими фигурами, открыть некоторые их свойства через преобразование, конструирование, изображение, выполнение простейших дедуктивных умозаключений и измерений.

В процессе освоения данного содержания дети не только получают первоначальные представления о математическом моделировании, о структуре задачи и этапах ее решения, но происходит и развитие их логического мышления, мыслительных процессов, умений оперировать знаково-символическими средствами.

Математика изучается в течение всех четырех лет обучения в начальной школе, в базисном учебном плане она обозначена как часть федерального компонента. Нетрудно заметить, что первая из указанных образовательных целей определяет содержательное наполнение программы, а вторая и третья — характеризуют виды деятельности с математическими понятиями, включенными в программу.

Таким образом важнейшим итогом начальной математической подготовки ребенка является не только и не столько накопление определенного запаса предметных знаний и умений, сколько ***умственное развитие ребенка, формирование у него необходимых специфических познавательных и умственных умений***, которые являются базовыми для успешного усвоения в дальнейшем математического (и любого другого) содержания.

Рассмотренные тенденции изменения взглядов на цели и задачи начального математического образования порождают ряд проблем, которые становятся актуальными как для педагогов-практиков, так и для методической науки. Эти проблемы связаны с разработкой теоретических концепций, лежащих в основе построения обучающих курсов, с отбором их содержания, методов и форм организации деятельности детей в процессе их изучения.

Лекция 2.

Предмет, задачи и цели изучения курса методики преподавания математики в вузе

1. Методика обучения математике младших школьников как учебный предмет
2. Методика обучения математике младших школьников как педагогическая наука и как сфера практической деятельности

1. Методика обучения математике младших школьников как учебный предмет

Рассмотрим цель изучения курса «Методика обучения математике в начальной школе» в процессе подготовки будущего учителя начальной школы.

Общая задача курса — содействовать улучшению качества методической подготовки студентов факультета начального образования к осуществлению математического развития ребенка младшего школьного возраста.

Для качественного выполнения любой деятельности необходимо овладеть определенными знаниями и умениями. Особенность методических знаний и умений заключается в том, что они тесно связаны с психологическими, дидактическими и математическими знаниями. Чем лучше педагог осознает эту взаимосвязь, тем выше уровень его методической подготовки, тем больше его возможности в осуществлении творческой методической деятельности.

Приведем наглядный пример. Один педагог предлагает детям задание — «расставьте цифры по порядку», а другой говорит: «расставьте числа по порядку». Является ли разница в формулировке задания принципиальной и, если да, то кто из педагогов прав?

Приведенный пример представляет собой «методическую задачу», которую студент должен научиться «решать», т. е. разбирать ее и обосновывать свой ответ. Именно эта деятельность называется в практике «методический анализ» задания (или целого урока). Умение правильно проводить этот методический анализ говорит о высоком уровне профессиональной подготовки педагога. В данном примере основой для проведения методического анализа должно стать знание студентом математики: цифра — это лишь символ числа, соблюдать определенный порядок в расстановке символов нет нужды, поэтому первая формулировка неверна. Верной является вторая формулировка задания, поскольку числа в натуральном ряду выстраиваются по определенному принципу, суть которого состоит в том, что каждое последующее число должно быть на единицу больше предыдущего. Разница в формулировке задания является *принципиальной*, поскольку

первая формулировка говорит о плохом понимании педагогом смысла математических понятий, с которыми он работает на уроке.

Приведем другой пример. В 1 классе педагог иногда так формулирует задание: «посчитайте от 10 обратно». При этом имеется в виду, что ребенок должен назвать числительные в обратном порядке, начиная от 10. Формулировка задания является *неверной* с математической точки зрения, поскольку счет — процесс «векторный», он направлен в сторону увеличения номеров считаемых предметов. По определению, счет — это процесс нумерации элементов сосчитываемого множества, причем последний названный номер является характеристикой количественного состава множества. Таким образом, выполняя сформулированное выше задание, ребенок последним назовет номер «один», что по определению понятия «счет» должно являться количественной характеристикой сосчитываемого множества. Понятно, что это неверно. В данном случае педагог использует некорректную формулировку задания, что искажает его математический смысл. Следует просто попросить ребенка *назвать числа в обратном порядке*, начиная от 10.

Многие преподаватели, даже имеющие достаточно высокую категорию и стаж работы, считают, что некорректности, рассмотренные выше, несущественны, и не особенно важны, поскольку, речь идет всего лишь о формировании начальных математических представлений. Они полагают, что можно не заботиться о математической корректности, поскольку потом, в средней школе, ребенка переучат «как надо».

Нам представляется, что только недостаточное знание математики, а также психологии обучения и развития младшего школьника может привести к подобному мнению. В младшем школьном возрасте предполагается сформировать у ребенка начальные (элементарные) математические представления. Но «элементарные» не означает «примитивные», «неполноценные», «временные», которые в дальнейшем будут заменены на другие «неэлементарные».

Элементарные означают *первичные*, являющиеся элементами других более сложных понятий, с которыми ребенок познакомится в дальнейшем, причем элементарные понятия будут составлять их базу. Но это не означает, что они могут быть неверными! Опыт работы в области развития математических способностей позволяет нам утверждать, что начало знакомства с предметом, способы знакомства с ним, содержание и форма этого содержания чрезвычайно важны на начальных этапах. С этой точки зрения особенно ответственной является работа учителя начальных классов, формирующего у ребенка первые представления о предмете. Именно от него зависит, как будет ребенок воспринимать математику: признает ее стройной и ясной наукой или она навсегда останется для него тяжелым и ненавистным предметом.

Приведенные примеры говорят о том, что математические знания нужны учителю для того, чтобы правильно организовать знакомство детей с математическими понятиями и способами действия с ними. Очевидно, что грамотные методические действия учителя при проведении урока во многом зависят от уровня его математической подготовки. Особенно важно это в настоящее время, поскольку многие альтернативные программы расширяют список математических понятий, с которыми дети должны познакомиться уже в начальной школе, и это требует от учителя организации грамотной методической работы по изучению этих понятий с детьми. Помимо этого, уровень математической подготовки влияет на четкость и грамотность математической речи педагога, на правильность использования терминологии и обоснованность подбора методических приемов, связанных с изучением математических понятий.

На современном этапе речь идет не только о формировании математических представлений младшего школьника, но в большей мере о воспитании и *развитии ребенка в процессе обучения математике*. Реализация этого положения требует от будущего учителя владения не только частными (собственно методико-математическими), но и общими *дидактическими умениями*. Эти умения могут быть использованы при обучении не только математике, но и другому содержанию (обучение грамоте, развитие речи, ознакомление с природой и др.), поэтому их называют *общими*. Речь идет о структуре современного развивающего урока, о различных приемах организации деятельности учащегося (проблемная ситуация, эвристическая беседа, обучающий эксперимент и др.). В общем виде эти приемы могут быть реализованы на любом предметном содержании, но математическое содержание является *специфическим*, поскольку требует математической корректности работы с материалом.

Реализация развивающего обучения на уроке математики требует от учителя знания закономерностей психологии развития ребенка. Речь идет не просто об умении организовать внимание ребенка, использовать при обучении знакомые учителю закономерности запоминания и воспроизведения и т. п. Речь идет о том, что процесс обучения маленького школьника математическим знаниям должен играть роль стимула и двигателя личностного развития ребенка (развития когнитивной сферы, эмоционально-волевой сферы, становлению характера и коммуникативных умений ребенка и т. п.). Безусловно, без хороших психолого-педагогических знаний здесь обойтись невозможно. Однако для организации развивающего обучения недостаточно хорошо знать детскую психологию как таковую, необходимо специально изучать теории развивающего обучения и способы их методического преломления в конкретном уроке.

Анализ ситуаций, связанных с изучением конкретных математических понятий и с организацией деятельности детей на уроке математики, показывает, что деятельность учителя носит интегративный характер, так как обусловлена не только методической, но и математической, психологической и дидактической подготовкой. Сложный механизм этой интеграции обусловлен тем, что методические знания, представленные в виде конкретных методических рекомендаций и указаний к деятельности педагога, приемов изучения тех или иных математических объектов и способов действий с этими объектами, должны непременно включать:

а) вопросы частной методики, т. е. современные преемственные технологии изучения математических фактов, понятий, свойств, способов действий;

б) дидактические закономерности развивающего процесса обучения и воспитания, отражающиеся в дидактических принципах развивающего обучения;

в) психологические закономерности развивающего обучения, закономерности процесса усвоения ребенком знаний, умений и навыков.

Очевидно, что в рамках одной книги и одного курса невозможно рассмотреть все методические ситуации, которые могут возникнуть на практике. В данном пособии автор стремился очертить наиболее существенные аспекты поднятых проблем и вопросов с позиции развивающего обучения и личностно-деятельностного преемственного подхода к построению образовательного процесса в начальной школе.

2. Методика обучения математике младших школьников как педагогическая наука и как сфера практической деятельности

Рассматривая методику обучения математике младших школьников как науку, необходимо, прежде всего определить ее место в системе наук, очертить круг проблем, которые она призвана решать, определить ее объект, предмет и особенности.

В системе наук методические науки рассматриваются в блоке *дидактики*. Как известно, дидактика подразделяется на ***теорию воспитания*** и ***теорию обучения***. В свою очередь, в теории обучения выделяют общую дидактику (общие вопросы: методы, формы, средства) и частные дидактики (предметные). Частные дидактики и называются по-другому — методики обучения или, как принято в последние годы — образовательные технологии.

Таким образом, методические дисциплины относятся к циклу педагогических, но в то же время, представляют собой сугубо предметные области, поскольку методика обучения грамоте, безусловно, очень сильно будет отличаться от методики обучения математике, хотя обе они являются частными дидактиками.

Методика обучения математике младших школьников — очень древняя и очень молодая наука. Обучение счету и вычислениям составляло необходимую часть обучения в древнешумерских и древнеегипетских школах. Об обучении счету рассказывают наскальные росписи эпохи палеолита. К первым учебным пособиям для обучения детей математике можно отнести «Арифметику» Магницкого (1703) и книгу В.А. Лая «Руководство к первоначальному обучению арифметике, основанное на результатах дидактических опытов» (1910)... В 1935 г. С.И. Шохор-Троцким был написан первый учебник «Методика обучения математике». Но лишь в 1955 г. появилась первая книга «Психология обучения арифметике», автор которой Н.А. Менчинская обратилась не столько к характеристике математической специфики предмета, сколько к закономерностям усвоения арифметического содержания ребенком младшего школьного возраста. Таким образом, появлению этой науки в ее современном виде предшествовало не только развитие математики как науки, но и развитие двух больших областей знания: общей дидактики обучения и психологии обучения и развития. В последнее время немаловажную роль в становлении методики обучения начинает играть психофизиология развития мозга ребенка. На пересечении этих областей рождаются сегодня ответы на три «вечных» вопроса методики обучения предметному содержанию:

1. *Зачем обучать?* Какова цель обучения маленького ребенка математике? Нужно ли это? И если нужно, то зачем?
2. *Чему обучать?* Какому содержанию следует обучать? Каков должен быть список математических понятий, предназначенных для изучения с ребенком? Есть ли какие-то критерии отбора этого содержания, иерархия его построения (последовательность) и чем они обоснованы?
3. *Как обучать?* Какие способы организации деятельности ребенка (методы, приемы, средства, формы обучения) следует отбирать и применять для того, чтобы ребенок мог с пользой усваивать отобранное содержание? Что понимать при этом под «пользой»: количество знаний и умений ребенка или что-то другое? Как учитывать при организации обучения психологические особенности возраста и индивидуальные различия детей, но в то же время «укладываться» в отведенное время (учебный план, программа, режим дня), а также учитывать реальное наполнение класса в связи с принятой в нашей стране системой коллективного обучения (классно-урочная система)?

Эти вопросы фактически определяют круг проблем любой методической науки. Методика обучения математике младших

школьников как наука, с одной стороны, обращена к конкретному содержанию, отбору и упорядочению его в соответствии с поставленными целями обучения, с другой — к педагогической методической деятельности учителя и учебной (познавательной) деятельности ребенка на уроке, к процессу усвоения отобранного содержания, управление которым осуществляет учитель.

Объект исследования этой науки — процесс математического развития и процесс формирования математических знаний и представлений ребенка младшего школьного возраста, в котором можно выделить следующие компоненты: цель обучения (Зачем учить?), содержание (Чему учить?) и деятельность учителя и деятельность ребенка (Как учить?). Эти компоненты образуют *методическую систему*, в которой изменение одного из компонентов вызовет изменение другого. Выше были рассмотрены видоизменения этой системы, которые повлекло изменение цели начального обучения в связи с изменением образовательной парадигмы в последнее десятилетие. Позже мы рассмотрим видоизменения этой системы, которые влекут за собой психолого-педагогические и физиологические исследования последнего полувека, теоретические результаты которых постепенно проникают в методическую науку. Можно также отметить, что немаловажным фактором изменения подходов к построению методической системы, являются изменения взглядов математиков на определение системы базовых постулатов для построения школьного курса математики. Например, в 1950—1970 гг. преобладающим было убеждение в том, что базовым для построения школьного курса математики должен быть теоретико-множественный подход, что отразилось на методических концепциях школьных учебников математики, а следовательно, требовало соответствующей направленности начальной математической подготовки. В последние десятилетия математики все больше говорят о необходимости развивать у школьников функциональное и пространственное мышление, что отражается в содержании учебников, изданных в 90-х годах. В соответствии с этим постепенно меняются и требования к начальной математической подготовке ребенка.

Таким образом, процесс развития методических наук тесно связан с процессом развития других педагогических, психологических и естественных наук.

Рассмотрим взаимосвязь методики обучения математике в начальной школе с другими науками.

1. *Методика математического развития ребенка использует основные идеи, теоретические положения и результаты исследований других наук.*

Например, философские и педагогические идеи играют основополагающую и направляющую роль в процессе разработки методической теории. Кроме того, заимствование идей других наук может служить основой разработки конкретных методических технологий. Так, идеи психологии и результаты ее экспериментальных исследований широко используются методикой для обоснования содержания обучения и последовательности его изучения, для разработки методических приемов и систем упражнений, организующих усвоение детьми различных математических знаний, понятий и способов действий с ними. Идеи физиологии об условно-рефлекторной деятельности, двух сигнальных системах, обратной связи и возрастных этапах созревания подкорковых зон мозга помогают понять механизмы приобретения умений, навыков и привычек в процессе обучения. Особое значение для развития методики обучения математике в последние десятилетия имеют результаты психолого-педагогических исследований и теоретических изысканий в области построения теории развивающего обучения (Л.С. Выготский, Ж. Пиаже, Л.В. Занков, В.В. Давыдов, Д.Б. Эльконин, П.Я. Гальперин, Н.Н. Поддъяков, Л.А. Венгер и др.). В основе этой теории лежит положение Л.С. Выготского о том, что обучение строится не только на завершенных циклах развития ребенка, но прежде всего на тех психических функциях, которые еще не созрели («зоны ближайшего развития»). Такое обучение способствует эффективному развитию ребенка.

2. *Методика творчески заимствует методы исследований, применяемых в других науках.*

Фактически любой метод теоретического или эмпирического исследования может найти применение в методике, поскольку в условиях интеграции наук методы исследования очень быстро становятся общенаучными. Так, знакомый студентам метод анализа литературы (составление библиографий, конспектирование, реферирование, составление тезисов, планов, выписывание цитат и т. п.) является универсальным и используется в любой науке. Метод анализа программ и учебников является общеупотребимым во всех дидактических и методических науках. Из педагогики и психологии методика заимствует метод наблюдения, анкетирования, беседы; из математики — методы статистического анализа и т. д.

3. *Методика использует конкретные результаты исследований психологии, физиологии высшей нервной деятельности, математики и других наук.*

Например, конкретные результаты исследований Ж. Пиаже процесса восприятия детьми младшего возраста сохранения количества породили целые серии конкретных математических заданий в различных программах для младших школьников: на специально построенных упражнениях ребенка учат понимать, что изменение формы предмета не влечет за собой изменения его количества

(например, при переливании воды из широкой банки в узкую бутылку повышается ее зрительно воспринимаемый уровень, но это не означает, что воды в бутылке стало больше, чем было в банке).

4. *Методика участвует в комплексных исследованиях развития ребенка в процессе его обучения и воспитания.*

Например, в 1980—2002 гг. появился целый ряд научных исследований процесса личностного развития ребенка младшего школьного возраста в ходе обучения его математике.

Обобщая вопрос о связи методики математического развития и формирования математических представлений у дошкольников, можно отметить следующее:

- нельзя вывести из какой-то одной науки систему методических знаний и методических технологий;
- данные других наук необходимы для разработки методической теории и практических методических рекомендаций;
- методика как и любая наука будет развиваться, если она будет пополняться все новыми и новыми фактами;
- одни и те же факты или данные могут быть интерпретированы и использованы различным (и даже противоположным) образом в зависимости от того, какие цели реализуются в образовательном процессе и какая система теоретических принципов (методология) принята в концепции;
- методика не просто заимствует и использует данные других наук, а перерабатывает их так, чтобы разработать способы оптимальной организации обучающего процесса;
- методологию[1], определяет соответствующая концепция математического развития ребенка; таким образом, *концепция* — это не что-то абстрактное, далекое от жизни и реальной образовательной практики, а теоретическая база, определяющая построение совокупности всех составляющих методической системы: цели, содержание, методы, формы и средства обучения.

Рассмотрим соотношение современных научных и «житейских» представлений об обучении математике младших школьников.

В основе любой науки лежит опыт людей. Например, физика опирается на приобретаемые нами в повседневной жизни знания о движении и падении тел, о свете, звуке, теплоте и многом другом. Математика тоже исходит из представлений о формах предметов окружающего мира, их расположении в пространстве, количественных характеристиках и соотношениях частей реальных множеств и отдельных объектов. Первая стройная математическая

[1] См.: «Система принципов и способов организации и построения теоретической и практической деятельности» (Философский энциклопедический словарь. М., 1983).

теория — геометрия Евклида (IV в. до н. э.) родилась из практического землемерия.

Совсем иначе обстоит дело с методикой. У каждого из нас есть запас житейского опыта обучения кого-нибудь чему-нибудь. Однако заниматься математическим развитием ребенка можно только обладая специальными методическими знаниями. Чем же ***отличаются специальные (научные) методические знания и умения от житейских представлений*** о том, что для обучения младшего школьника математике достаточно иметь некоторые представления о счете, вычислениях и решении простых арифметических задач?

1. *Житейские методические знания и умения конкретны*; они приурочены к конкретным людям и конкретным задачам. Например, мать, зная особенности восприятия своего ребенка, путем многократных повторений обучает ребенка называть числительные в правильном порядке и узнавать конкретные геометрические фигуры. При достаточном упорстве матери ребенок научается бегло называть числительные, распознает достаточно большое количество геометрических фигур, узнает и даже пишет цифры и т. п. Многие полагают, что именно этому следует научить ребенка перед школой. Гарантирует ли это обучение развитие математических способностей у ребенка? Или хотя бы дальнейшую успешность этого ребенка в математике? Опыт показывает, что не гарантирует. Сможет ли эта мать научить тому же другого ребенка, непохожего на ее ребенка? Неизвестно. Сможет ли эта мать помочь своему ребенку с усвоением другого математического материала? Скорее всего — нет. Чаще всего можно наблюдать картину, когда мать сама знает, например, как складывать или отнимать числа, решать ту или иную задачу, но объяснить даже своему ребенку так, чтобы он усвоил способ решения, не может. Таким образом, житейские методические знания характеризуются конкретностью, ограниченностью задачи, ситуаций и лиц, на которые они распространяются.

Научные же методические знания (знания образовательной технологии) стремятся *к обобщенности*. Они используют научные понятия и обобщенные психолого-педагогические закономерности. В научных методических знаниях (образовательных технологиях), состоящих из четко определяемых понятий, отражаются наиболее существенные их взаимосвязи, что позволяет формулировать методические закономерности. Например, опытный высокопрофессиональный учитель по характеру ошибки ребенка часто может определить, какие методические закономерности формирования данного понятия нарушались при обучении этого ребенка.

2. *Житейские методические знания носят интуитивный характер*. Это связано со способом их получения: они приобретаются путем практических проб и «прилаживаний». Таким путем идет

чуткая внимательная мать, экспериментируя и зорко подмечая малейшие положительные результаты (что нетрудно сделать, проводя с ребенком много времени. Часто сам предмет «математика» накладывает специфические отпечатки на восприятие родителей. Нередко можно слышать: «Я сама в школе с математикой мучилась, у него те же проблемы. Это у нас наследственное». Или наоборот: «У меня никаких проблем с математикой не было в школе, не пойму — в кого он такой уродился!» Распространено мнение, что математические способности у человека либо есть, либо нет, и ничего с этим не поделаешь. Мысль о том, что математические способности (также как и музыкальные, изобразительные, спортивные и другие) можно развивать и совершенствовать большинством людей воспринимается скептически. Такая позиция очень удобна для оправдания ничегонеделанья, но с точки зрения общеметодических научных знаний о природе, характере и генезисе математического развития ребенка она, конечно, неадекватна.

Можно сказать, что в отличие от интуитивных методических знаний, научные методические знания *рациональны* и *осознанны*. Методист-профессионал никогда не будет кивать на наследственность, «планиду», отсутствие материалов, плохое качество учебных пособий и недостаточное внимание родителей к учебным проблемам ребенка. У него имеется достаточно большой арсенал действенных методических приемов, нужно лишь отобрать из него те, которые являются для данного ребенка наиболее подходящими.

3. *Научные методические знания можно передать другому человеку*. Накопление и передача научных методических знаний возможны благодаря тому, что эти знания кристаллизуются в концепциях, закономерностях, методических теориях и фиксируются в научной литературе, учебных и методических пособиях, которые читают будущие педагоги, что позволяет им приходить даже на первую в своей жизни практику с достаточно большим багажом обобщенных методических знаний.

4. *Житейские знания о методах и приемах обучения получают обычно путем наблюдений и размышлений*. В научной же деятельности к этим методам добавляется *методический эксперимент*. Суть экспериментального метода состоит в том, что педагог не ждет стечения обстоятельств, в результате которого возникает интересующее его явление, а вызывает явление сам, создавая соответствующие условия. Затем он целенаправленно варьирует эти условия, чтобы выявить закономерности, которым данное явление подчиняется. Так рождается любая новая методическая концепция или методическая закономерность. Можно говорить о том, что при создании новой методической концепции, каждый урок становится таким методическим экспериментом.

5. *Научное методическое знание намного обширнее, разнообразнее, чем житейское*; оно обладает уникальным фактическим материалом, недоступным в своем объеме ни одному носителю житейских методических знаний. Материал этот накапливается и осмысливается в отдельных разделах методики, например: методика обучения решению задач, методика формирования понятия о натуральном числе, методика формирования представлений о дробях, методика формирования представлений о величинах и т. д., а также в отдельных отраслях методической науки, например: обучение математике в группах коррекции задержки психического развития, обучение математике в группах компенсации (слабовидящих, слабослышащих и др.), обучение математике детей с умственной отсталостью, обучение способных к математике школьников и т. д.

Разработка специальных отраслей методики обучения математике детей младшего возраста сама по себе является эффективнейшим методом общей дидактики обучения математики. Л.С. Выготский начинал работать с умственно отсталыми детьми — и в результате сформировалась теория «зон ближайшего развития», которая легла в основу теории развивающего обучения всех детей, в том числе и для обучения математике.

Не следует думать, однако, житейские методические знания являются вещью ненужной или вредной. «Золотая середина» состоит в том, чтобы видеть в малых фактах отражение общих принципов, а о том, как переходить от общих принципов к реальным жизненным проблемам, не написано ни в одной книге. Только постоянное внимание к этим переходам, постоянное упражнение в них может сформировать у педагога то, что называют «методической интуицией». Опыт показывает, что чем больше житейских методических знаний при этом имеется у педагога, тем больше вероятность формирования этой интуиции, особенно, если этот богатый житейский методический опыт постоянно сопровождается научным анализом и осмыслением.

Методика обучения математике младших школьников — это ***прикладная область знания*** (прикладная наука). Как наука она создавалась для усовершенствования практической деятельности педагогов, работающих с детьми младшего школьного возраста. Выше уже отмечалось, что методика математического развития как наука делает фактически свои первые шаги, хотя методика обучения математике имеет тысячелетнюю историю. На сегодня нет ни одной программы начального (и дошкольного) образования, которая обходится без математики. Но до недавнего времени речь шла только об обучении детей младшего возраста элементам арифметики, алгебры и геометрии. И лишь в последнее двадцатилетие XX в. стали говорить о новом методическом направлении — теории и практике *математического развития* ребенка.

Это направление стало возможно в связи со становлением теории развивающего обучения ребенка младшего возраста. Данное направление в традиционной методике обучения математике, по-прежнему, является дискуссионным. Далеко не все педагоги сегодня стоят на позициях необходимости реализации развивающего обучения *в процессе* обучения математике, целью которого является не столько формирование у ребенка определенного списка знаний, умений и навыков предметного характера, сколько развитие высших психических функций, его способностей и раскрытие внутреннего потенциала ребенка.

Для прогрессивно мыслящего педагога очевидно, что *практические результаты* от развития данного методического направления должны стать несоизмеримо значительнее результатов просто методики обучения начальным математическим знаниям и умениям детей младшего школьного возраста, кроме того они должны быть качественно другими. Ведь познать нечто — значит овладеть этим «нечто», научиться им *управлять*.

Научиться управлять процессом математического развития (т. е. развитием математического стиля мышления) — задача, конечно, грандиозная, не решаемая в одночасье. Методика уже сегодня накопила множество фактов, показывающих, что новое знание педагога о сущности и смысле процесса обучения делает его в значительной степени другим: меняет его отношение как к ребенку, так и к содержанию обучения, и к методике. Познавая суть процесса математического развития, педагог меняет свое отношение к образовательному процессу (меняет себя!), к взаимодействию субъектов этого процесса, к его смыслу и целям. Можно сказать, что *методика — это наука, конструирующая педагога* как субъекта образовательного взаимодействия. В реальной практической деятельности сегодня это выразилось в видоизменениях форм работы с детьми: все больше внимания педагоги уделяют индивидуальной работе, поскольку очевидна обусловленность результативности процесса усвоения индивидуальными различиями детей. Все больше внимания педагоги уделяют продуктивным методам работы с детьми: поисковым и частично-поисковым, детскому экспериментированию, эвристической беседе, организации на уроках проблемных ситуаций. Дальнейшее развитие этого направления может привести к значительным содержательным видоизменениям программ математического образования младших школьников, поскольку многие психологи и математики в последние десятилетия выражают сомнение в верности традиционного наполнения программ начальной школы по математике преимущественно арифметическим материалом.

Не подлежит сомнению и тот факт, что ***процесс обучения ребенка математике является конструирующим для развития его***

личности. Процесс обучения любому предметному содержанию накладывает свой отпечаток на развитие познавательной сферы ребенка. Однако специфика математики как учебного предмета такова, что ее изучение в значительной мере может влиять и на общее личностное развитие ребенка. Еще 200 лет назад эту мысль высказал М.В. Ломоносов: «Математика хороша тем, что она ум в порядок приводит». Формирование системности мыслительных процессов — это лишь одна сторона развития математического стиля мышления. Углубление знаний психологов и методистов о различных сторонах и свойствах математического мышления человека показывает, что многие его важнейшие составляющие фактически совпадают с составляющими такой категории как общие интеллектуальные способности человека — это логичность, широта и гибкость мышления, пространственная подвижность, лаконизм и последовательность и т. д. А такие свойства характера как целеустремленность, упорство в достижении цели, умение организовать себя, «интеллектуальная выносливость», формирующиеся при активных занятиях математикой, уже являются личностными характеристиками человека.

На сегодня имеется целый ряд психологических исследований, показывающих, что систематическая и специальным образом организованная система занятий математикой активно влияет на формирование и развитие внутреннего плана действий, понижает уровень тревожности ребенка, развивая чувство уверенности и владения ситуацией; повышает уровень развития креативности (творческой активности) и общий уровень умственного развития ребенка. Все эти исследования подтверждают мысль о том, что математическое содержание является мощнейшим *средством развития* интеллекта и средством личностного развития ребенка.

Таким образом, теоретические исследования в области методики математического развития ребенка младшего школьного возраста, преломляясь через комплекс методических приемов и теорию развивающего обучения, реализуются при обучении конкретному математическому содержанию в практической деятельности учителя на уроке.

Лекция 3. Традиционная и альтернативные системы обучения математике младших школьников

1. Краткий обзор систем обучения.
2. Содержание обязательного минимума образования по математике в начальной школе.
3. Распределение по годам обучения программного материала по математике в альтернативных системах.

1. Краткий обзор систем обучения

В методических публикациях последнего двадцатилетия часто встречаются слова «традиционная система», «альтернативная система» обучения. Эти названия легко понимаются педагогами, работавшими в школе в 1980—1990 гг., но они не всегда понятны сегодняшним студентам и молодым учителям. Поясним происхождение и смысл этих названий.

В Советском Союзе была принята жесткая цензура школьных учебников. Учителям разрешалось работать только по тем учебникам, которые были утверждены и рекомендованы Министерством образования. По каждому предмету для начальной школы Министерством образования утверждался только один учебник. В 1968 г. был объявлен конкурс на написание учебника по математике для начальной школы. Из всех предложенных учебников был выбран и утвержден в качестве единого учебник, написанный авторским коллективом под руководством М.А. Бантовой и М.И. Моро. Этот учебник, в дальнейшем незначительно перерабатываясь, выдержал более 20 изданий, его стали называть традиционным. Долгие годы он был единственным для обучения математике в начальной школе.

Подобная политика позволяла создать единое образовательное пространство на всей территории бывшего Советского Союза, учились по одному и тому же учебнику и по единому учебному плану. С одной стороны, это было удобно, поскольку не возникало проблем в связи с переездами и сменой школы. Но, с другой стороны, эта система приводила к жесткой унификации образовательного процесса, при которой учитель был ориентирован главным образом на достижение каждым ребенком определенного уровня учебных норм и требований. Сегодня эту ориентацию называют «знаниевой парадигмой».

После развала Советского Союза стали публиковаться учебники других авторов, эти учебники стали называть «альтернативными». Некоторые из них были написаны еще в 70-е годы XX в. (учебники системы Л.В. Занкова, системы В.В. Давыдова и др.), другие изданы в 90-е годы (учебники Н.Я. Виленкина и Л.Г. Петерсон, учебники Н.Б. Истоминой и др.).

А.М. Пышкало[1] отмечает, что традиционный курс математики для начальных классов характеризуется определенной последовательностью изучаемых базисных понятий:

Число → Величина

[1] См.: Актуальные проблемы методики обучения математике в начальных классах / Под ред. М.И. Моро, А.М. Пышкало. М., 1977.

Основное внимание в нем сосредоточено на выработке навыков устных и письменных вычислений и на их применении к решению текстовых задач.

Та же последовательность изучаемых понятий характерна и для ряда альтернативных курсов (учебники системы Л.В. Занкова, учебники П.М. Эрдниева, Н.Б. Истоминой и др. авторов). Однако основная направленность методики обучения математики в этих системах другая: ее цель — интеллектуальное развитие ребенка. Как отмечает Н.Б. Истомина[1], несмотря на то, что в принципе любое обучение развивает ребенка, но при сравнении различных систем обучения очевидно, что в одних системах обучение как бы надстраивается над развитием (по словам Л.С. Выготского, «плетется в хвосте развития», оказывая на него стихийное влияние), а в других — целенаправленно обеспечивает его, «ведет за собой развитие» и активно использует его для усвоения новых понятий, знаний и умений. В первом случае мы имеем приоритет информационной функции обучения, его нацеленность на «отработку» знаний, умений и навыков, во втором — приоритет развивающей функции обучения, и это кардинально меняет построение процесса обучения.

В 70-е годы XX в. альтернативными назывались системы, в которых был принят другой порядок изучения математических понятий:

в системе В.В. Давыдова

величина → отношение → число

в учебниках К.И. Нешкова, А.М. Пышкало, В.Н. Рудницкой

множество → отношение → число → величина

в учебниках Н.Я. Виленкина, Л.Г. Петерсон

величина ↘
отношение → число
множество ↗

Сегодня альтернативным называют любой новый учебник по отношению к традиционному. Иногда в литературе можно встретить утверждение, что традиционным учебник Бантовой и Моро назван потому, что он не имеет развивающей направленности. Однако с методических позиций очевидно, что развивающая направленность урока более зависит от методики работы учителя и способов организации деятельности ребенка с содержанием учебника, чем от самого содержания. Многолетний опыт апробации

[1] См.: *Истомина Н.Б.* Методическая система развивающего обучения математике в начальной школе. Автореф... докт. дисс. М., 1995.

различных альтернативных учебников показал, что для получения развивающего эффекта недостаточно просто использовать в работе учителя новый учебник. Необходимо владеть методикой математического развития ребенка, чтобы реализовать развивающую функцию математического содержания учебника.

На сегодняшний день процесс написания новых вариантов учебников математики для начальной и основной школы продолжается, и, видимо, будет продолжаться, что является естественным методическим поиском и говорит о развитии методической науки. Для учителя важно научиться анализировать появляющиеся варианты учебников, понимать их содержательные и методические отличия, их соответствие обязательному минимуму образования. Проведение такого предварительного анализа необходимо для прогнозирования результатов обучения и хода обучающего процесса.

2. Содержание обязательного минимума образования по математике в начальной школе

На сегодняшний день по заданию Национального фонда подготовки кадров разработан проект «Требований к уровню подготовки выпускников» и «Обязательного минимума содержания образовательных программ» начального, основного и полного среднего образования. Эти документы являются основой создания государственных образовательных стандартов общего среднего образования.

«Требования к уровню подготовки выпускников» являются основным элементом образовательных стандартов. Они устанавливают уровень подготовки выпускников, реально достижимый, по мнению авторского коллектива, в практике массового обучения и обеспечивающий права и возможности обучающихся на получение полноценного и качественного общего образования.

«Обязательный минимум содержания образовательных программ» задает перечень дидактических единиц содержания образования, которые подлежат обязательному изучению в начальной, основной и полной средней школе.

В документе отмечается, что «при отборе содержания образования авторы проекта прежде всего следовали традиции, повинуясь императивному лозунгу "не навреди!". Тем не менее содержание обучения в проекте было подвергнуто определенной модернизации, отвечающей стратегическим направлениям развития отечественной системы образования».

«Главным направлением модернизации стало восстановление *педагогически и психологически обоснованной структуры содержания образования*, позволяющей преодолеть узко «знаниевую» парадигму, реализуемую в сегодняшней школе. С этой целью осуществлена достаточно серьезная разгрузка обязательного содержания путем исключения вопросов, не имеющих общеобразовательного значения, и переноса сложного технического материала в профильное обучение. Тем самым создаются условия для повышения качества образования за счет высвобождения учебного времени для отработки учебных и практических умений, освоения опыта эмоциональной и творческой деятельности»[1].

Отметим, что ни сам документ, ни сопутствующие ему публикации не содержат конкретной ссылки или представления упомянутой *педагогической и психологической теории обоснования структуры содержания образования.* Таким образом, представленное в основном государственном документе обоснование построения структуры содержания образования, носит действительно чисто императивный характер на уровне «здравого смысла». Общеизвестно, что никакой единой теории обоснования структуры содержания ни в педагогической, ни в психологической науке на сегодня не существует. Можно сказать, что «принципиальная особенность и трудность педагогической практики, которая существовала всегда и остается в силе до сегодняшнего дня, состоит в том, что объективные законы психического развития, на которые она могла бы опереться, до сих пор еще не известны. Педагогическая практика все еще в основном базируется, как медицина античности и средних веков, на интуитивных прозрениях, искусстве и эмпирическом опыте ее выдающихся представителей»[2]. Там же далее отмечается, что «пока знаний было не так много, можно было как-то выходить из положения за счет эмпирического нащупывания лучших способов их подачи или просто за счет увеличения времени, которое идет на усвоение». Именно это в свое время привело к очередной замене трехлетнего начального образования на четырехлетнее в начале 1990-х годов. «Но когда объем знаний возрастает, оба эти источника все больше теряют свою значимость»[3]. Поэтому, несмотря на сохранение четырехлетнего срока обучения в начальной школе, авторы рассматриваемого проекта вынуждены были пойти по пути «разгрузки обязательного содержания», что особенно сказалось на содержании математического образования.

В цитируемой монографии доктора психологических наук, профессора РАО Н.И. Чуприковой в связи с этим резюмируется необходимость и крайняя значимость разработки именно *психологических теорий обоснования как структуры содержания, так и технологий обучения* для различных возрастных категорий обучаемых. В рассматриваемом же документе ссылка на эту несуществующую теорию является главным обоснованием (наряду с признанием в следовании традициям) построения структуры и перечня дидактических единиц содержания образования.

Приводим содержание документа:

МАТЕМАТИКА

Требования к уровню подготовки выпускников

Изучение математики должно предоставить учащимся возможность:

- получить представление о натуральном числе и нуле, понять особенности натурального ряда чисел, научиться записывать и прочитывать натуральные числа в десятичной системе счисления;
- научиться выполнять устно и письменно вычисления с натуральными числами (в пределах миллиона): сложение, вычитание, умножение, деление, деление с остатком;
- получить представление о свойствах операций над натуральными числами, взаимосвязи между операциями; научиться находить неизвестный компонент арифметического действия;
- усвоить смысл отношений «больше на», «меньше на», «больше в», «меньше в» и их связь с арифметическими действиями; изображать на схемах отношения и использовать их при решении текстовых задач;
- усвоить правила порядка выполнения действий в числовых выражениях, научиться записывать решение текстовой задачи в виде выражения и по действиям; научиться составлять простые описания последовательности (алгоритм) действий;
- осознать геометрические формы как образы предметов окружающего мира; познакомиться с плоскими геометрическими фигурами (точка, прямая и кривая линии, отрезок, угол, многоугольник, окружность, круг), простейшими пространственными фигурами (куб, шар) и некоторыми их свойствами; научиться изображать геометрические фигуры на клетчатой бумаге;
- получить представление о величинах (длине, площади, массе, времени) и их измерении; усвоить единицы величин и соотношения между ними; научиться складывать и вычитать величины, умножать и делить величину на число;
- приобрести опыт измерения и вычисления длин отрезков и периметров многоугольников, научиться строить отрезок заданной длины, вычислять площадь прямоугольника;
- получить представление о зависимостях между величинами, характеризующими процессы движения, работы, «купли-продажи» и др.; научиться решать несложные текстовые задачи, используя знания об этих зависимостях;
- получить представление о высказывании, научиться строить логические рассуждения, выполнять мыслительные операции (анализ, синтез, сравнение, классификацию и др.).

[1] Обязательный минимум содержания образования. М., 2001. С. 5.
[2] *Чуприкова Н.И.* Умственное развитие и обучение. М., 1995. С. 5.
[3] Там же. С. 6.

Обязательный минимум содержания образования

Счет. Единицы счета. Натуральные числа от 1 до 1 000 000. Число и цифра нуль. Запись и названия чисел. Сравнение чисел. Знаки =, >, <.

Сложение чисел: слагаемые, сумма, знак сложения. Таблица сложения. Вычитание чисел: уменьшаемое, вычитаемое, разность, знак вычитания. Связь вычитания со сложением. Умножение чисел: множители, произведение, знак умножения. Таблица умножения. Деление чисел: делимое, делитель, частное, знаки деления. Связь деления с умножением. Действия с нулем.

Порядок выполнения действий в числовых выражениях. Скобки.

Перестановка слагаемых в сумме. Группировка множителей в произведении. Умножение суммы на число. Умножение числа на сумму.

Устные и письменные вычисления с натуральными числами.

Нахождение неизвестного компонента арифметических действий.

Точка. Линии: прямые, кривые. Отрезок. Угол. Прямой угол. Многоугольники: треугольник, прямоугольник, квадрат. Вершины и стороны многоугольника. Окружность и круг. Куб. Шар.

Измерение длин. Метр, сантиметр, миллиметр, километр.

Измерение площади. Квадратный сантиметр, квадратный метр. Вычисление площади прямоугольника.

Измерение времени. Секунда. Минута. Час. Сутки. Неделя. Месяц. Год. Век.

Измерение массы. Грамм, килограмм, тонна. Литр.

Решение текстовых задач с использованием отношений «больше на», «меньше на», «больше в», «меньше в» и зависимостей между величинами.

Анализ текста цитируемого документа показывает действительное значительное сокращение привычного даже для традиционных учебников математики для начальных классов содержания. Например, даже не упоминаются темы «Уравнения» и «Дроби». Поскольку данный перечень будет являться основой для разработки государственных стандартов, это означает, что задания, связанные с решением уравнений, нахождением долей и дробей чисел и величин, могут считаться лишь дополнительными при составлении контрольных срезов знаний. Упомянуты лишь несложные текстовые задачи, что можно трактовать как то, что в обязательный минимум входят лишь простые задачи.

Любой из существующих ныне учебников математики для начальной школы содержит намного более длинный перечень дидактических единиц по математике. Однако в случае принятия данного проекта в качестве действующей нормы, это даст возможность учителю опускать значительную часть материала учебников или давать ее как необязательную.

В случае принятия этого документа в качестве нормативного возникает проблема очередной разработки новых учебников по математике для 5—6 классов, поскольку сегодняшние учебники

(включая написанные за последнее пятилетие) рассчитаны на значительно больший объем знаний выпускников начальной школы, чем это оговорено рассматриваемым документом.

3. Распределение по годам обучения программного материала по математике в альтернативных системах

Рассмотрим распределение программного материала по годам обучения в пяти системах обучения для начальных классов, рекомендованных Министерством образования и науки РФ для обучения в 12-летней школе (четыре года обучения в начальной школе).

Распределение программного материала по математике в системе Л.В. Занкова

В системе Л.В. Занкова для четырехлетней системы обучения использовались учебники И.И. Аргинской для трехлетней школы. Учитель самостоятельно распределял материал на более длительный срок обучения детей. Дополнительно к этим учебникам имеются тетради на печатной основе авторов Е.П. Бененсон и Л.С. Итиной.

Для четырехлетней начальной школы на сегодня существует комплект «учебник—тетрадь» для 1 класса *вместо* учебника — четыре тетради на печатной основе тех же авторов. Для 2 и 3 классов — учебник авторов И.И. Аргинской, Е.И. Ивановской и для 4 класса разрабатывается учебник этих же авторов (Самара, 2001).

Приведем ориентировочное программное распределение тем в этих пособиях, составленное на основе анализа этих учебников, сборника «Программы для начальных классов 1—3 по системе Л.В. Занкова» (М., 1998) и статьи И.И. Аргинской «Математика в системе общего развития» (Начальная школа: плюс — минус. 2000, № 4).

1 класс

Сравнение множеств. Взаимно-однозначное соответствие элементов. Знаки сравнения. Число как характеристика класса эквивалентных множеств. Число и цифра. Сравнение чисел.

Нумерация в пределах 100. Разрядный состав. Сложение и вычитание в пределах 10 и в пределах 20 (с переходом через десяток). Правила порядка выполнения действий в выражениях без скобок и со скобками. Переместительное и сочетательное свойства сложения.

Числовые равенства и неравенства. Верные и неверные равенства.

Уравнения (в том числе вида $x + 3 = 12$, $17 - x = 9$). Правила взаимосвязи компонентов сложения и вычитания.

Точка. Отрезок. Прямая, ломаная, кривая. Замкнутые и незамкнутые кривые и ломаные. Луч. Углы (прямой, тупой, острый). Их буквенное обозначение.

Длина отрезка. Сумма и разность отрезков. Многоугольники: треугольник, прямоугольник, квадрат, ромб. Треугольники равносторонние, разносторонние, равнобедренные.

Меры длины: сантиметр (см).

Знакомство с задачей в 1 классе не предполагается.

(Составлено по содержанию учебника-тетради — в 4 ч. Самара, 1999.)

2 класс

Нумерация в пределах 100. Сложение и вычитание в пределах 100. Умножение и деление. Таблицы умножения и деления в пределах 100. Особые случаи умножения и деления (с 0 и 1). Все случаи порядка выполнения действий (в выражениях без скобок с действиями одной и разных ступеней, со скобками и действиями всех видов). Уравнения с умножением и делением. Взаимосвязь компонентов действий умножения и деления. Деление с остатком.

Трехзначные числа.

Уравнения вида $(a + b) + x = c + e$ и др. Неравенства вида $a + x > b$, $x - a < b$ и т. п. Системы простых неравенств.

Длина отрезка. Длина ломаной. Многоугольники. Четырехугольники, прямоугольники. Периметр многоугольника. Прямоугольные и равнобедренные треугольники. Ромб.

Объемные тела: призма, пирамида, конус, цилиндр, шар. Основание, ребро, грань, вершина многогранника.

Масса: килограмм (кг). Сложение и вычитание масс.

Емкость: литр (л).

Время и его единицы измерения: сутки, неделя, год. Час и минута. Часы. Календарь.

Меры длины: сантиметр (см), метр (м), дециметр (дм), миллиметр (мм).

Умножение и деление величин на натуральное число.

Знакомство с задачей. Простые и составные задачи на все действия.

3 класс

Нумерация в пределах 1000.

Вычисления в пределах 1000: сложение и вычитание трехзначных чисел.

Разряды и классы: многозначные числа.

Внетабличное умножение и деление. Умножение и деление многозначных чисел на однозначное число.

Выражения с большим количеством действий и скобок. Неравенства вида $x - 4 > 6$, $x : 2 < 10$ и т. п. Системы простых неравенств.

Римская нумерация.

Уравнения (в том числе вида $(31 + x) - 18 = 23$).

Дроби: сравнение дробей, сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями. Приведение к общему знаменателю. Нахождение дроби от числа и числа по его дроби. Смешанные числа. Неправильные дроби.

Числовой луч. Координаты точки на числовом луче. Координаты целых и дробных чисел.

Углы и их градусная мера. Сложение и вычитание углов. Окружность, дуга и радиус окружности. Свойство диаметра.

Изображения объемных тел на плоскости. Проекции объемных тел. Развертки многогранников. Проекции многогранников.

Площадь прямоугольника. Меры площади: $см^2$, $мм^2$, $км^2$, $дм^2$, $м^2$. Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда.

Длина: километр (км), миллиметр (мм). Масштаб.

Масса: тонна (т), центнер (ц).

Простые и составные задачи на все действия.

4 класс

Нумерация многозначных чисел: разряды и классы. Действия с многозначными числами. Выражения с большим количеством действий и скобок.

Класс миллионов.

Точные и приближенные числа. Правило округления. Погрешность измерений.

Дроби: основное свойство дроби. Сложение и вычитание дробей с одинаковыми и разными знаменателями. Умножение и деление дроби на натуральное число.

Положительные и отрицательные числа: запись, изображение на числовой прямой, сравнение. Координаты точки на числовой прямой.

Действия с именованными числами, содержащие несколько действий (3–6 действий).

Уравнения и неравенства разной степени трудности (в том числе с дробями, содержащих неизвестное в обеих частях и др.).

Степень: возведение в степень, основание степени, показатель степени. Таблицы степеней некоторых чисел.

Диагонали многоугольника. Свойство диагоналей прямоугольника. Классификации треугольников (по углам, по сторонам). Площадь прямоугольного треугольника. Площадь многоугольника. Площадь поверхности прямой призмы и пирамиды.

Объемные тела: проекции, развертки, изображения на плоскости. Объем параллелепипеда.

Меры объема: $мм^3$, $см^3$, $км^3$, $дм^3$. Объем произвольной прямой призмы.

Составные задачи всех видов. Алгебраический способ решения задач (составление уравнения).

Составлено по содержанию учебников авторов И.И. Аргинской, Е.И. Ивановской (Самара, 2001).

Распределение программного материала по математике в системе В.В. Давыдова

В системе В.В. Давыдова существует несколько вариантов учебников математики для начальных классов различных авторских коллективов: учебники А.М. Захаровой, Т.И. Фещенко; учебники В.В. Давыдова, С.Ф. Горбова, Г.Г. Микулиной, О.В. Савельевой.

3-2681

Все эти комплекты учебников были разработаны для системы 1—3, в настоящее время идет работа по реорганизации этих учебников для системы 1—4. Наиболее распространен на сегодня учебник Э.И. Александровой, он включен в Федеральный перечень учебников для начальной школы.

Приведем программное распределение тем в пособиях Э.И. Александровой, составленное на основе анализа учебников, сборника «Программы для начальной общеобразовательной школы. Система Д.Б. Эльконина — В.В. Давыдова» (М., 2001) и статьи Э.И. Александровой «Особенности нового курса математики в начальной школе» (Начальная школа: плюс — минус, 2000, № 4).

1 класс

Сравнение предметов (по форме, цвету, материалу, длине, составу частей, массе, площади, объему. Периметр как длина «границы» любой плоской геометрической фигуры. Различия между прямой, лучом, отрезком. Ломаная. Угол. Сравнение углов.

Сравнение величин. Буквенное обозначение величин. Знаки сравнения. Сравнение величин при помощи меры-посредника. Переход от действий с предметами к формулам и наоборот. Сложение и вычитание величин как переход от неравенства к равенству и наоборот. Знаки + и –. Текстовые задачи с буквенными данными. Скобки в буквенных выражениях. Переместительное и сочетательное свойство сложения в буквенном виде. Выражения. Таблица сложения и вычитания однозначных чисел.

Различные меры при измерении одной величины. Стандартные меры величин (длина, площадь, объем, масса, угловой градус). Время, скорость, стоимость. Число как мера величины.

Римская нумерация.

Число как отношение величины к мере (функциональная зависимость).

Числовая прямая: начало отсчета, единичная мерка. Сравнение чисел на числовой прямой. Состав чисел первого десятка. Сравнение чисел. Решение примеров, уравнений и задач с заменой буквенных данных на числовые (в пределах 20). Связь между компонентами сложения и вычитания. Порядок действий в выражениях. Уравнения вида: $a + x = b$, $a - x = b$, $b - x = a$.

2 класс

Простые и составные мерки. Меточная форма числа. Числовая прямая. Числовые шкалы.

Сложение и вычитание чисел с помощью числовых шкал. Решение различных задач с заменой числовых данных на буквенные, порядок действий. Сложение и вычитание с переходом через десяток.

Многозначные числа. Разряд и класс. Позиционные системы счисления. Чтение и запись чисел в различных системах счисления.

Разрядный состав многозначных чисел. Изображение многозначных чисел на числовой прямой. Сравнение многозначных чисел. Действия с многозначными числами (кроме деления). Решение текстовых задач с многозначными числами.

3 класс

Умножение и деление. Компоненты умножения и деления и их взаимосвязь. Переместительное, сочетательное и распределительное свойство умножения. Таблица умножения и деления. Умножение на 0 и 1.

Многозначные числа: разряды и классы. Все действия с многозначными числами. Умножение и деление на 10, 100, 1000. Деление с остатком. Признаки делимости. Вычисления с помощью свойств умножения и деления. Умножение и деление многозначных чисел.

Текстовые задачи с многозначными числами. Уравнения на все действия с многозначными числами. Порядок действий.

4 класс

Письменные алгоритмы вычислений с многозначными числами.

Микрокалькулятор. Проверка действий с различными числами с помощью микрокалькулятора.

Десятичные дроби. Действия с десятичными дробями: сложение, вычитание, умножение на число, деление на число.

Решение и составление текстовых задач, уравнений и математических выражений с десятичными дробями. Нахождение дроби от числа и числа по его дроби. Проценты: запись в десятичных дробях. Нахождение процентов от числа и числа по его процентам. Оптовые и розничные цены, скидки, денежные вклады под проценты. Решение задач с сюжетами, связанными с реалиями жизни.

Именованные числа. Меры длины, массы, объема, площади. Деньги.

Время: век, год, час, мин, с. Действия с именованными числами.

Меры измерения углов: градус, мин, с, радиан. Число π. Транспортир.

Периметры различных фигур и способы их вычисления: прямоугольник, треугольник, трапеция и др. Длина окружности.

Площади геометрических фигур: прямоугольник, прямоугольный треугольник. Катет и гипотенуза в прямоугольном треугольнике. Площадь произвольного треугольника.

Нахождение площади любых геометрических фигур путем разбиения их на прямоугольники и треугольники. Площадь правильного n-угольника. Площадь круга. Текстовые задачи на нахождение площади и периметра.

Объемы геометрических тел: см^3, дм^3. Формула объема прямого параллелепипеда.

Задачи всех видов: на движение, на «куплю-продажу», на производительность и т. п. Алгебраический способ решения задач (уравнение).

Распределение программного материала по математике в системе «Гармония»

В системе «Гармония» авторами учебников по математике являются Н.Б. Истомина, И.Б. Нефедова. Разработаны и выпущены учебники для 1—4 классов начальной школы с соответствующими тетрадями на печатной основе. Программное распределение тем по годам обучения приводим по сборнику «Гармония». Учебно-методический комплект для четырехлетней начальной школы (Смоленск, 2001).

1 класс

Признаки предметов. Отношения. Число и цифра. Нумерация в пределах 100. Разрядный состав. Сложение и вычитание в пределах 10. Сложение и вычитание в пределах 100 вида: 89 — 7, 65 — 40 (без перехода через разряд). Компоненты сложения и вычитания, их взаимосвязь. Сравнение чисел: неравенства. Переместительное свойство сложения.

Числовой луч как опора для нахождения значений выражений (сложение и вычитание).

Точка. Линия (прямая, кривая). Отрезок. Длина отрезка. Сложение и вычитание отрезков. Луч. Ломаная (замкнутая и незамкнутая).

Единицы длины: см, дм. Единицы массы: кг.

Знакомство с задачей в 1 классе программой не предусмотрено.

2 класс

Задача. Простые и составные задачи на сложение и вычитание.

Угол (прямой, тупой, острый). Прямоугольник. Квадрат. Многоугольник. Окружность и круг.

Сложение и вычитание в пределах 20 с переходом через десяток.

Порядок действий. Скобки. Сочетательное свойство сложения. Сложение и вычитание в пределах 100 с переходом через разряд.

Нумерация в пределах 1000. Разрядный состав. Сложение и вычитание трехзначных чисел без перехода через разряд.

Умножение. Компоненты умножения и их взаимосвязь. Случаи умножения с 0 и 1. Табличное умножение (только для случаев с числами 9 и 8). Переместительное свойство умножения.

Единицы времени: ч, мин, с.

3 класс

Площадь фигуры. Единицы площади: квадратный сантиметр, квадратный дециметр, квадратный метр. Площадь и периметр прямоугольника.

Табличное умножение для всех оставшихся случаев. Умножение на 10. Сочетательное свойство умножения.

Деление. Компоненты деления и их взаимосвязь. Случаи деления с числами 1 и 0. Табличное деление. Умножение и деление на 10, 100, 1000.

Правила порядка выполнения действий.

Внетабличное умножение и деление.

Многозначные числа: разряд и класс.

Письменное сложение и вычитание.

Масса: г и кг. Длина: км, м, дм, см. Время: ч, мин, с.

Симметричные фигуры. Куб: грани, вершины, ребра. Развертка куба.

Составные задачи, в том числе на прямую и обратную пропорциональность.

4 класс

Письменное умножение и деление. Деление с остатком.

Действия с величинами: соотношение единиц, сложение и вычитание, умножение и деление величины на число.

Задачи на зависимость между величинами: движение, «купля-продажа» и т. п.

Уравнения. Решение задач составлением уравнения.

Буквенные выражения и их значения.

Симметричные фигуры. Развертки геометрических тел.

Доли и дроби. Сравнение дробей.

Распределение программного материала по математике в системе «Школа 2100»

В системе «Школа 2100» автором учебника математики является Л.Г. Петерсон. Разработан и выпущен учебно-методический комплект в виде «учебник—тетрадь» на печатной основе для 1—3 (1—4) классов начальной школы. Комплект представляет собой 12 тетрадей вида «учебник—тетрадь», которые могут быть распределены как на 3, так и на 4 года обучения. Программное распределение тем по годам обучения приводим по сборнику «Школа 2000»: Концепция и программы непрерывных курсов для общеобразовательной школы (М., 1997).

1 класс

Свойства предметов. Сложение и вычитание. Счет. Число и цифра.

Однозначные и двузначные числа. Нумерация в пределах 100. Разрядный состав.

Табличное сложение и вычитание (в пределах 10). Компоненты сложения и вычитания и их взаимосвязь. Сложение и вычитание в пределах 100 без перехода через разряд. Сложение и вычитание в пределах 20 с переходом через десяток.

Точки и линии. Граница. Ломаная. Многоугольник.

Задача. Простые задачи на сложение и вычитание. Обратные задачи. Составные задачи на сложение и вычитание.

Величины и их измерение (длина, масса, объем): см, дм, кг, л.

Уравнения. Решение уравнений вида $90 - x = 20$, $48 - x = 32$ и т. п.

2 класс

Письменное сложение и вычитание. Сложение и вычитание в пределах 100 с переходом через разряд. Сочетательное свойство сложения.

Нумерация в пределах 1000. Сложение и вычитание трехзначных чисел.

Прямая. Луч. Отрезок. Ломаная. Длина ломаной. Периметр. Плоскость. Угол. Прямой угол. Острый и тупой угол. Прямоугольник. Квадрат. Площадь фигуры. Единицы площади. Площадь прямоугольника. Окружность и круг.

Объем фигуры. Единицы объема. Объем прямоугольного параллелепипеда.

Умножение и деление. Случаи умножения и деления с 0 и 1. Таблицы умножения и деления. Взаимосвязь компонентов умножения и деления. Умножение и деление на 10 и 100. Внетабличное умножение и деление. Деление с остатком.

Числовые и буквенные выражения. Уравнения вида: $a \cdot x = b$, $a : x = b$, $x : a = b$.

Скобки. Порядок действий в выражениях без скобок и со скобками.

Составные задачи на все действия.

3 класс

Множество и его элементы: число элементов, обозначение, знак принадлежности, подмножество, пересечение и объединение множеств.

Многозначные числа: нумерация, сложение, вычитание.

Умножение и деление круглых чисел. Умножение и деление на однозначное число. Умножение на двузначное число. Умножение на трехзначное число.

Задачи на все действия. Задачи на движение, на «куплю-продажу», на работу и производительность. Формулы прямой и обратной пропорциональности.

Симметрия фигур.

Меры времени. Календарь.

Переменная. Высказывание. Равенство и неравенство. Уравнение.

4 класс

Множество решений неравенства. Строгие и нестрогие неравенства. Двойное неравенство.

Приближенные вычисления. Оценка суммы, разности, произведения, частного.

Деление на двузначное и трехзначное число.

Дроби. Сравнение дробей, нахождение числа по его дроби и дроби от числа. Проценты. Нахождение процентов от числа и числа по его процентам. Сложение и вычитание дробей. Правильные и неправильные дроби. Смешанные числа. Выделение целой части из неправильной дроби и запись смешанного числа в виде неправильной дроби. Сложение и вычитание смешанных чисел. Задачи на части, задачи на проценты.

Площадь прямоугольного треугольника. Единицы площади: ар, гектар.

Шкалы. Числовой луч. Координаты на луче. Расстояние между точками координатного луча. Координатный угол.

Действия над составными именованными числами.

Градусная мера углов. Развернутый угол. Смежные и вертикальные углы.

Круговые и столбчатые диаграммы. Графики движений.

Распределение программного материала по математике в системе «Начальная школа XXI века»

В системе «Начальная школа XXI века» авторами учебников математики являются Н.В. Рудницкая, Т.В. Юдачева. Разработаны и выпущены учебники для начальной школы 1—4 в сопровождении соответствующих тетрадей. Программное распределение тем по годам обучения приводим по сборнику «Программы четырехлетней начальной школы». Проект «Начальная школа XXI века» (М., 2001).

1 класс

Свойства предметов. Сравнение предметов. Отношения между предметами. Равночисленные множества предметов. Счет предметов. Число и цифра. Нумерация в пределах 20. Сложение и вычитание. Простые задачи на сложение и вычитание. Составные задачи в два и более действий.

Переместительное и сочетательное свойство сложения. Таблица сложения и вычитания в пределах 10. Таблица сложения и вычитания однозначных чисел в пределах 20 (с переходом через десяток).

Порядок выполнения действий в выражениях. Скобки.

Умножение и деление.

Точка и линия. Отрезок. Длина отрезка: см, дм. Многоугольник. Куб. Цилиндр и конус. Пирамида. Симметрия. Ось симметрии.

Графа отношений между числами.

2 класс

Нумерация в пределах 100. Разрядный состав. Сложение и вычитание в пределах 100 без перехода через разряд.

Табличное умножение и деление. Умножение и деление с 0 и 1. Задачи на увеличение и уменьшение в несколько раз.

Компоненты действий сложения, вычитания, умножения и деления, их взаимосвязь.

Порядок действий в выражениях со скобками и без скобок.

Доли. Нахождение числа по его доле и доли от числа.

Луч. Взаимное расположение на плоскости лучей и отрезков. Их буквенное обозначение. Числовой луч. Координата точки. Многоугольник: вершины, стороны, углы. Периметр многоугольника. Окружность: радиус и диаметр. Угол: прямой и непрямой. Прямоугольник. Свойство противоположных сторон и диагоналей прямоугольника. Площадь прямоугольника.

Площадь фигуры: квадратный дециметр, квадратный сантиметр, квадратный метр.

Единицы длины: м, дм, см.

Переменная. Выражение с переменной и его значение. Задачи с переменной.

3 класс

Нумерация в пределах 1000. Сложение и вычитание в пределах 1000. Умножение и деление на 10, 100. Умножение круглых чисел. Умножение на однозначное число. Деление с остатком. Деление на однозначное число. Умножение и деление на двузначное число в пределах 1000 ($23 \cdot 40$). Умножение и деление на двузначное число.

Порядок выполнения действий в выражениях со скобками, упрощение выражений (освобождение от «лишних» скобок). Правила порядка выполнения действий в выражениях без скобок, содержащих все действия.

Верные и неверные высказывания. Числовые равенства и неравенства. Переменная. Уравнение и его корень. Неравенство с переменной.

Ломаная и ее длина. Замкнутая и незамкнутая ломаная. Построение вписанных в окружность шестиугольников и треугольников. Прямая. Принадлежность точки прямой. Проведение прямой через одну и две точки. Перпендикулярность. Кратчайшее расстояние от точки до прямой. Построение симметричных фигур (осевая симметрия). Параллельность. Свойство симметричности и транзитивности отношения параллельности.

Единицы длины: км, мм. Масса и ее единицы: кг, г, т. Емкость: л. Отмеривание с помощью литровой банки. Единицы времени: ч, мин, с, сут., неделя, год, век.

Решение составных задач. Задачи на движение, на «куплю-продажу» и т. п.

4 класс

Многозначные числа: разряд и класс. Сложение и вычитание многозначных чисел. Умножение и деление на двузначное и трехзначное число.

Градусная мера углов. Виды углов. Виды треугольников в зависимости от величины углов или длин сторон. Построение треугольников по трем элементам (двум сторонам и углу между ними, стороне и двум прилежащим углам, по трем сторонам). Построение прямоугольника с линейкой и транспортиром.

Многогранник: вершины, ребра, грани. Куб. Прямоугольный параллелепипед. Развертки многогранников. Объем куба: кубический сантиметр и кубический метр.

Координатный угол. Простейшие графики. Диаграммы. Таблицы.

Выражения с одной, двумя и тремя переменными и их значения.

Высказывание и его значение (истина, ложь). Составные высказывания (отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация). Таблицы истинности высказываний. Логические возможности. Отношения, обладающие свойствами рефлексивности, транзитивности и симметричности.

Точные и приближенные значения величины. Измерения с заданной точностью. Округление. Погрешность.

Масштаб. План и карта.

Решение арифметических задач в 3—4 действия.

* * *

Сопоставительный анализ всех пяти программ с программой традиционной школы показывает, что объем изучения нумерации и арифметических действий в них единый. Разница только в распределении тем по годам обучения. Программы Л.В. Занкова и «Гармония» не рассматривают задачу в 1 классе, но итоговый уровень сложности рассматриваемых в них задач (в 4 классе) одинаков.

Все альтернативные программы содержат значительно бóльший объем геометрического материала, чем традиционный учебник, при этом значимым отличием является работа с объемными телами и инструментами для построения фигур на плоскости (циркуль, угольник, транспортир).

Программы И.И. Аргинской и Э.И. Александровой содержат значительный по объему материал работы с дробями: первая — с обыкновенными, вторая — с десятичными, в том числе с процентами.

Программы Л.Г. Петерсон и В.Н. Рудницкой отличаются наибольшим уровнем насыщения курса математики начальной школы алгебраическим материалом и дробями (в том числе и процентами). Программа Л.Г. Петерсон также знакомит учеников начальных классов с элементами теории множеств, а программа В.Н. Рудницкой — с элементами формальной логики.

Программа и учебные пособия Н.Б. Истоминой являются наименее загруженными дополнительным к традиционному объему материалом и в целом наиболее близки к проекту нормативного документа, рассмотренного в данной лекции.

Очевидно, что для работы по упомянутым программам учитель начальных классов должен обладать достаточно глубокими знаниями математики, а также быть знакомым с тем, как нетрадиционное для начальной школы содержание (сложные уравнения, дроби, проценты, элементы теории множеств и логики и др.) рассматриваются в методике обучения математике в средней школе, чтобы учитывать требования преемственности обучения.

Возникает также закономерный вопрос: каков главный инструмент реализации развивающей функции обучения математике в той или иной альтернативной программе? Ответ на него не является однозначным: в системе Л.В. Занкова во главу угла ставится необходимость соблюдать дидактические принципы организации развивающего обучения и опора на систему проблемных ситуаций на уроке. В программах Л.Г. Петерсон, В.Н. Рудницкой и Э.И. Александровой основной «вес» развивающего потенциала связан с усложнением арифметической (системы счисления и дроби), алгебраической (уравнения) и формально-логической (элементы теории множеств и логики) линий содержательного наполнения программ. Это обусловлено значимым влиянием на эти системы взглядов В.В. Давыдова на ведущую роль теоретического мышления в развитии ребенка младшего школьного возраста. В программе Н.Б. Истоминой основная роль «двигателя развития» ребенка в процессе обучения математике отводится построению методической системы целенаправленного формирования приемов умственных действий (сравнения, обобщения, классификации, аналогии и др.). Такой подход позволяет без особых содержательных изменений традиционного объема в обучении математике младших школьников нацелить обучающий процесс на развитие таких способов познания ребенка (упомянутые приемы умственных действий определяют процесс познания индивида), которые становятся достоянием субъекта, характеризуя его интеллектуальный потенциал и познавательные способности[1].

Таким образом, налицо «ситуация неопределенности»: с одной стороны, методика обучения математике младших школьников — это наука, ориентированная на достижение конкретных целей. Предмет ее исследования — отбор и упорядочивание математического содержания (*чему учить?*), предназначенного для изучения детьми, а также организация совместной деятельности учителя и учащихся (*как обучать?*). С другой стороны, общий взгляд на

[1] См.: *Истомина Н.Б.* Указ. изд.

цель развивающего обучения (*зачем обучать?*) сформировался в недрах дидактики и психологии обучения и сформулирован в терминах более психологических, чем методических: цель развивающего обучения — личностное развитие ребенка. Таким образом, результаты этого процесса должны, по идее, оцениваться в логике психологической науки — по линии развития психической деятельности и в аспекте индивидуально-психологических особенностей детей. Вот здесь и возникает то противоречие, которого не было, пока учебный процесс был ориентирован на «знаниевую парадигму», когда ответ на вопрос «зачем учить?» имел простой и понятный учителю (а также всем тем, кто должен был осуществлять контроль этого процесса) ответ: «чтобы знали!». Сегодня такой ответ не может быть принят в качестве главного в соответствии с установкой на развивающее обучение, но с другой стороны — его нельзя и отвергнуть, поскольку существует понятие «стандарт обучения», в отношении которого установка совершенно однозначна: дети **должны знать** все, что обозначено в стандарте. Однако нигде при этом не доказано, что:

во-первых, то, что обозначенные в стандарте знания и умения обеспечат каждому ребенку необходимые (по целевой установке развивающего обучения) психологические новообразования (т. е. положительные сдвиги в его индивидуальном психологическом развитии);

во-вторых, возникает вопрос: какому контролю отдать приоритет — контролю качества знаний или психологическому тестированию ученика при осуществлении мониторинга учебного процесса?

в-третьих, психологический мониторинг совершенно не сочетается с балльной системой контроля знаний, он требует совершенно иных критериев и специализированных знаний при его проведении, не говоря уже о спорности выбора направлений этого мониторинга (различные школы предлагают для анализа различные психологические новообразования школьников);

в-четвертых, сам термин «оптимальное общее развитие школьников» (Л.В. Занков) является весьма неопределенным, поскольку развитие каждого ребенка является процессом индивидуализированным, присущим только этому индивиду, а также весьма неравномерным, поскольку очень зависит от «внутренней среды» (физиологии, психофизиологии, физического и эмоционального состояния ребенка и т. п.).

В этой связи, представляется разумным выделить какое-то одно направление «общего развития», в частности, предметно связанное с математикой как таковой, и поставить целью обучения развитие ребенка преимущественно в этом направлении. В этом случае представляется возможным концентрировать внимание на

тех сторонах психического развития ребенка, которые являются базовыми составляющими *математического развития*. Кроме того, становится обоснованным ***процесс усвоения математических знаний***, поскольку совершенно невозможно доказать, например, необходимость знания наизусть таблицы сложения с точки зрения общего развития ребенка, но эта необходимость очевидна с точки зрения математического развития. Таким образом, выбор математического развития в качестве цели математического образования младших школьников позволяет по-новому взглянуть как на построение его психолого-дидактического обоснования, так и на отбор содержания и выбор методов обучения.

Лекция 4.

Психолого-педагогические основы организации математического развития младших школьников

Рассмотрим различные подходы к определению понятия «математическое развитие» ребенка. Анализ литературы показывает, что авторы по-разному понимают этот термин. В основном имеют место две трактовки этого понятия.

В *первом случае* «математическое развитие» ассоциируется с понятием «математические способности», которые имеют природный характер. В этом случае успешность ребенка в освоении математического содержания связывается педагогами с наличием этих природных способностей и отрицанием возможности методически влиять на них. Как следствие на практике часто наблюдается ориентация педагогов более на природные данные ребенка, чем на поиск и применение методик организации математического развития ребенка, обладающего слабыми природными способностями к математике.

Во *втором случае* под «математическим развитием» понимают формирование и накопление математических знаний и умений у ребенка. Предполагается, что развитие умственных способностей при этом достигается косвенным путем: в процессе усвоения знаний. Таким образом, математическое развитие рассматривается как следствие обучения математическим знаниям. Если бы данный подход к математическому развитию ребенка был верным, то достаточно было бы отобрать круг знаний, сообщаемых ребенку, и подобрать соответствующий метод обучения, чтобы сделать этот процесс продуктивным, т. е. получать в результате высокое математическое развитие *у всех* детей. Данный подход в значительной мере пытались реализовать при создании различных альтернативных учебников математики для начальной школы (Л.В. Занков, В.В. Давыдов, Н.Я. Виленкин, А.М. Пышкало и др.), наполняя эти учебники различным содержанием: увеличивали долю арифметического материала, долю алгебраического материала, вводили элементы теории множеств, комбинаторики, алгоритмики и др. Апробации этих учебников на протяжении более 40 лет показала, что заметного влияния на уровень математического развития младших школьников эти системы не оказывают. При этом очевидно, что говорить об отсутствии влияния содержания обучения на развитие как математического мышления, так и общего развития мышления ребенка неправомочно.

В исследованиях Д.Б. Эльконина и В.В. Давыдова было достаточно убедительно доказано, что проблема обновления содержания обучения в начальных классах является частью проблемы организации развивающего обучения ребенка младшего школьного возраста. Психологическое обоснование важности и особой значимости этой проблемы было разработано Д.Б. Элькониным (1960, 1966) и В.В. Давыдовым (1966, 1972), в исследованиях которых было детально показано, что одним из решающих факторов в развитии мышления младших школьников выступает содержание обучения. Известный советский кибернетик А.А. Фельдбаум отмечал: «Накопление знаний играет в процессе обучения немалую, но отнюдь не решающую роль. Человек может забыть многие конкретные факты, на базе которых совершенствовались его качества. Но если они достигли высокого уровня, то человек справится со сложнейшими задачами, а это и означает, что он достиг высокого уровня культуры»[1] (т. е. мышления). Таким образом, связь между содержанием обучения и процессом развития мышления ребенка, несомненно, существует, но ее нельзя считать достаточным условием обеспечения математического развития ребенка. В то же время психологически и дидактически обоснованный отбор этого содержания, несомненно, будет играть значительную роль в процессе создания управляемой системы математического развития ребенка.

Под *математическим развитием ребенка* младшего школьного возраста будем понимать целенаправленное и методически организованное формирование и развитие совокупности взаимосвязанных основных (базовых) свойств и качеств математического мышления ребенка и его способностей к математическому познанию действительности. Такое развитие задает главную целевую установку обучения математике детей младшего возраста.

Методическая система (включая технологию) непрерывного математического развития ребенка младшего возраста, предоставляющая

[1] *Фельдбаум А.А.* Процессы обучения людей и автоматов // В кн. «Методы оптимизации автоматических систем» / Под ред. Я.З. Цыпкина. М., 1972. С. 113.

каждому ребенку условия для индивидуального продвижения в математическом содержании (траектории) будет способствовать:

- практическому созданию единой системы преемственного дошкольного и начального обучения математике;
- достижению оптимально возможного для ребенка, соответствующего возрастному этапу уровня математического развития.

Таким образом, мы полагаем, что понятие «математическое развитие» ребенка дошкольного и младшего школьного возраста не следует полностью ассоциировать с понятием «математические способности» (природного характера). Успешность ребенка в освоении математического содержания во многих случаях связана с наличием этих природных способностей, но организация математического развития ребенка, обладающего слабыми природными способностями к математике, вполне возможна при условии применения соответствующих методик. При этом в одних случаях процесс целенаправленного математического развития ребенка будет приводить к дальнейшему развитию природных математических способностей, в других случаях — к оптимальному развитию необходимых для успешного усвоения математического содержания свойств и качеств мышления, в третьих случаях — к коррекции недостатков познавательного развития ребенка и создании предпосылок для более успешного усвоения математического содержания при дальнейшем обучении.

Целенаправленная работа по организации математического развития ребенка младшего школьного возраста будет способствовать общему повышению уровня развития интеллектуальных (умственных) способностей *каждого ребенка*, что в свою очередь благоприятно отразится на успешности обучения детей предметному содержанию. Эта работа будет также способствовать *личностному развитию ребенка*, поскольку такие качества математического стиля мышления как целеустремленность, критичность, широта, гибкость, организованность, логичность и др. являются в то же время личностными характеристиками качеств ума и характера человека.

Итак, цель математического развития ребенка младшего школьного возраста — это стимуляция и развитие математического мышления (соответствующих возрасту компонентов и качеств этого мышления).

Психолого-дидактическим обоснованием этого подхода является своеобразие возрастного развития познавательных и когнитивных процессов ребенка младшего возраста, обусловленное тем, что в возрасте 3—5 лет ведущим типом мышления ребенка является наглядно-действенный тип, а в возрасте 6—10 лет — наглядно-образный тип мышления. Возраст 10—12 лет является переходным к ведущему абстрактному (словесно-логическому) типу мышления.

Это обусловливает необходимость использования для организации математического развития ребенка на каждом из обозначенных этапов соответствующего содержания и методологии, максимально соответствующих «детскому способу» вхождения в математику оптимально возрасту ребенка. Опора на ведущий тип мышления ребенка дает основание сделать вывод: главным направлением организации математического развития ребенка дошкольного возраста является целенаправленное развитие *конструктивного* мышления, а ребенка младшего школьного возраста — развитие *пространственного* мышления. Эти виды математического мышления сенситивны указанным возрастам, и потому наиболее чувствительны к методическому развивающему воздействию педагога. Таким образом, наиболее способствующей математическому развитию ребенка младшего школьного возраста будет та система обучения математике (и, соответственно, те учебники), которая в 1 классе (6 лет) предусматривает специальную методическую работу по развитию конструктивного мышления ребенка, а во 2—4 классах — специальную работу по развитию пространственного мышления в сочетании с активной пропедевтикой основ словесно-логического мышления.

Методологическим обоснованием предлагаемой концепции является выбор в качестве ведущего метода обучения детей математическому содержанию *метода моделирования*, с преимущественным использованием на каждом возрастном этапе того вида моделирования, который более всего соответствует возрастным особенностям развития мышления и других познавательных процессов. В возрасте 3—5 лет — это конструирование (вещественное моделирование); в возрасте 6—10 лет — сочетание конструирования с графическим моделированием (с постепенным перенесением акцента на последнее), в возрасте 10—12 лет — графическое моделирование с элементами конструирования (там, где необходимо практическое приложение знаний и умений ребенка в математике), и с элементами логико-символического моделирования (знакового и символьного) в качестве подготовки к переходу ребенка на ведущий словесно-логический (абстрактный) тип мышления в старшем возрасте. Такой подход к выбору ведущего метода обучения обеспечивает эффективное развитие приемов умственной деятельности у ребенка (анализа, синтеза, абстрагирования, обобщения и др.), развитие практико-ориентированной интуиции в применении математических знаний, самостоятельности в учебно-познавательной деятельности и таких качеств математического мышления как гибкость, критичность, активность, целенаправленность и др.

Модель изучаемого математического понятия или отношения играет роль универсального *средства изучения свойств математических объектов*. При таком подходе к формированию начальных математических представлений не только учитывается специфика математики (науки, изучающей количественные и пространственные характеристики реальных объектов и процессов), но и происходит обучение ребенка общим способам деятельности с математическими моделями реальной действительности и способам построения этих моделей.

Являясь общим приемом изучения действительности, моделирование позволяет эффективно формировать такие приемы умственной деятельности как классификация, сравнение, анализ и синтез, обобщение, абстрагирование, индуктивные и дедуктивные способы рассуждений, что в свою очередь стимулирует в перспективе интенсивное развитие словесно-логического мышления. Таким образом, можно считать, что данный подход будет обеспечивать формирование и развитие математического мышления ребенка, а, следовательно, будет обеспечивать его математическое развитие.

Глава 2

Изучение чисел в начальной школе

Лекция 5.

Понятие числа и числа первого десятка

1. Основные понятия.
2. Однозначные числа.
3. Порядок следования чисел в ряду.
4. Состав однозначных чисел.
5. Число 0.
6. Сравнение чисел.
7. Число 10.

1. Основные понятия

Целые неотрицательные числа называют *натуральными* в связи с тем, что они были придуманы человечеством для счета элементов реальных множеств (животных, людей, различных предметов), а также для обозначения результатов процесса измерения величин (длины, массы, емкости, времени, площади и др.).

Таким образом, различают число как *результат счета элементов множества* и число как *результат измерения величин* (длина, масса, время и т. д.).

Альтернативные программы по математике для начальных классов различаются главным образом способом знакомства ребенка с этими характеристиками числа.

Как и многие математические понятия, понятие натурального числа возникло из потребностей практики. Уже в глубокой древности нужно было сравнивать между собой различные множества.

Простейшим способом сравнения множеств было установление взаимно-однозначного соответствия между множествами, т. е. образование пар элементов из обоих множеств. Если такое соответствие имело место, то множества считались равночисленными (все пары — полные).

Если взаимно-однозначное соответствие устанавливалось между элементами одного множества и только частью элементов второго множества (некоторые элементы второго множества оставались

без пары), то считали, что в первом множестве меньше элементов, чем во втором.

Например: Чего больше, кружков или квадратов?

При этом хорошо видно, что считать пары нет надобности, оставшиеся без пары («лишние») фигуры покажут, каких было больше (и на сколько больше).

Со временем для сравнения стали применять множества-посредники (пальцы, камешки, узелки...) — их называют «числовые фигуры»; на следующем этапе в результате процесса абстрагирования от характера множеств-посредников появилось понятие числа: один, два, три и т. д.

Наука, изучающая числа и действия с ними получила название «арифметика» (от греческого *arithmos* — число).

Число — это количественная характеристика множества предметов (группы).

Натуральные числа обозначают при счете реальные предметы. Следует помнить, что само по себе число не зависит от характера и свойств предметов множества, т. е. одно и то же число может символизировать количество объектов какого угодно характера.

Каждая группа (множество) может быть охарактеризовано только одним числом (и если при повторном пересчете объектов получается другой результат, это означает ошибку счета).

Цифра — это символ, обозначающий число на письме. Число мы называем и слышим. Цифру мы видим, пишем и называем.

Цифры имеют различное изображение. Общеупотребимы цифры, которые принято называть арабскими (хотя, они имеют индийское происхождение): 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и римские: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X...

Римские цифры употребляются только в печатном изображении, арабские цифры — в печатном (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) и курсивном (прописном) изображении (*1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9*).

В любой из упомянутых систем обозначения чисел больше, чем цифр.

Натуральные или целые положительные числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, ..., записанные в порядке возрастания, образуют *натуральный ряд* или *ряд натуральных чисел*.

Отрезок натурального ряда чисел — это часть ряда вида: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 или 1, 2, 3 или 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. По определению, отрезок натурального ряда длиной a — это все числа b, такие что $b \leq a$.

Все натуральные числа записать невозможно, поскольку в натуральном ряду нет последнего числа. За каждым натуральным числом следует другое натуральное число.

2. Однозначные числа

Числа первого десятка называют *однозначными*. Они обозначены одной цифрой: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Поскольку число обозначает количественную характеристику множества, его называют *количественное натуральное число*. (Если мы хотим получить ответ на вопрос: «Сколько?», речь идет о количественном числе.)

Фактически при счете элементов множества происходит процесс их *нумерации*.

Счет — это процесс упорядочивания множества путем присвоения каждому элементу определенного номера. Таким образом, понятие числа также неразрывно связано с представлением *о порядке*, упорядочивании элементов множества. В этом случае натуральное число представляет собой *порядковый номер* некоторого элемента и называется в силу этого *порядковым числом*.

Количественное и порядковое числа взаимосвязаны, при пересчете элементы конечного множества не только расставляются в определенном порядке, но и устанавливается также, сколько элементов содержит множество (последний порядковый номер, называемый при счете, является характеристикой количества элементов множества).

Например: последнее яблоко — пятое, значит их всего пять.

Эти две роли натурального числа нашли отражение в русском языке: порядковые натуральные числа выражаются порядковыми числительными (*первый, второй, третий* и т. д.), количественные — количественными числительными (*один, два* и т. д.)

Процесс счета подчиняется определенным правилам:

1) первому отмеченному предмету ставится в соответствие число 1 (наименьшее натуральное число);

2) на каждом следующем шаге отмечается (нумеруется) предмет, еще не отмеченный ранее (нельзя считать один и тот же предмет дважды);

3) ему ставится в соответствие число, следующее за последним из уже названных (натуральные числа расположены в строгом равномерном порядке).

Данные правила определяют *принцип образования чисел в натуральном ряду: каждое следующее число на единицу больше предыдущего.*

Усвоение ребенком этого принципа является центральной задачей изучения нумерации первого десятка в школе.

Следствием этого принципа является идея *бесконечности ряда* натуральных чисел (как бы ни было велико число, всегда можно найти следующее, добавив к нему единицу), а также способ нахождения значений выражений вида 5 + 1; 8 + 1; 6 – 1; 7 – 1 и т. п. путем называния либо *следующего*, либо *предыдущего* числа. Иными словами, для нахождения значения данных выражений нет необходимости выполнять какой-то прием арифметических действий, достаточно понимать, что добавление 1 ведет к получению следующего по счету числа, а убавление 1 — означает возврат к предыдущему по счету числу. Именно для получения результатов в таких выражениях ребенок заучивал наизусть названия чисел в прямом и обратном порядке.

В умение считать входят: знание слов-числительных, знание («запомненность») порядка их называния при счете, понимание смысла процесса нумерации элементов множества, понимание того, что последний названный номер является характеристикой количественного состава множества, и умение соблюдать правила счета.

Большая часть нагрузки при освоении счета приходится на механическую память, т. е. процесс обучения счету в большой мере репродуктивен (опирается на память, а не на мыслительные операции). Для того чтобы ребенок не осваивал его на формальном уровне, на первых порах этот процесс следует обязательно сопровождать предметными действиями: откладыванием, показыванием, а также проговариванием вслух.

Следует помнить, что можно предлагать ребенку посчитать двойками, десятками и т. п., но нельзя говорить: «Посчитай от 10 обратно». Процесс счета «векторный», т. е. возможен по определению только в сторону увеличения номеров. Перечисление названий чисел в обратном порядке не является счетом, поскольку словочислительное, названное при счете последним, является ответом на вопрос «Сколько?», т. е. характеризует количество предметов данной совокупности.

Умение называть числительные в обратном порядке является базовым для обучения ребенка процессу отсчитывания, поэтому формировать такое умение необходимо, но формулировать задание следует в виде: «Назови числа в обратном порядке». (Но не «посчитай»!) Таким же образом формулируются задания: «Назови числа от 6 до 9» и т. п. (Но не «посчитай от 6 до 9».)

3. Порядок следования чисел в ряду

Место числа в ряду определено способом его получения: каждое следующее число становится в ряду справа от предыдущего. Для понимания такого порядка расположения ребенок должен предварительно освоиться с процессом перевода пространственного расположения объектов, подчиненных отношению «следовать за», в плоскость, где отношение «следовать за» подразумевает «ближайшее справа», а «следовать перед» (предшествовать) — ближайшее слева.

Число предыдущее — стоит в ряду чисел левее данного. При счете оно называется непосредственно перед данным, количественно содержит на одну единицу меньше данного.

Число последующее (следующее) — стоит в ряду чисел правее данного. При счете оно называется непосредственно после данного, количественно содержит на одну единицу больше данного.

Так, число пять является предыдущим к числу шесть; число семь является последующим для числа шесть. В первом классе числа пять и семь по отношению к числу шесть часто называют *соседями*.

Так, соседями числа восемь являются числа семь и девять.

Хорошее понимание принципа построения натурального ряда чисел ведет в дальнейшем к легкому освоению приемов присчитывания и отсчитывания по 1 и легкому выполнению вычислений в случаях:

7 + 1	17 + 1	177 + 1	10 277 + 1
7 – 1	17 – 1	177 – 1	10 277 – 1

Во всех случаях ссылка на принцип построения натуральной последовательности чисел является наиболее рациональной вплоть до 4 класса (общий прием вычислений):

— прибавляя к числу 1, получаем следующее по счету;

— вычитая из числа 1, получаем предыдущее по счету.

Этот же прием является действующим и в трудных случаях:

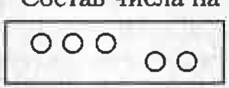
9 + 1	19 + 1	199 + 1	999 + 1	99 999 + 1
10 – 1	20 – 1	200 – 1	1000 – 1	100 000 – 1

При нахождении ответа в данных примерах удобно ссылаться на порядок счета: следующим за числом 99 999 является число 100 000; предшествующим числом для числа 1000 является 999.

4. Состав однозначных чисел

Термин «состав однозначных чисел» подразумевает обучение ребенка умению представлять данную количественную совокупность в виде составных частей, обозначая их количественные характеристики словом (числом) или любыми другими символами (числовыми фигурами):

Состав числа на числовых фигурах:



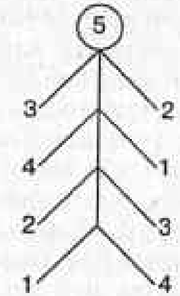
Пять — это три и два

Пять — это четыре и один

Пять — это два и три

Не следует торопиться вводить цифровую символику при изучении состава числа:

5	4	3	2	1
	1	2	3	4



При раннем введении цифровой символики ребенок механически запоминает пары изображенных цифр, не осознавая количественный смысл соотношения. В дальнейшем это может привести к непониманию смысла закона перестановки слагаемых и неиспользованию знания состава однозначных чисел при изучении табличных случаев сложения и вычитания в пределах 10.

5. Число 0

Нуль не считается натуральным числом.

При знакомстве с нулем нельзя ссылаться на счет предметов, невозможно выстроить предметную модель нуля. В математике нуль определяют как *символ пустого множества.*

Для обозначения пустого множества используется *цифра 0.*

Число нуль обозначает ситуацию отсутствия предметов, подлежащих счету.

Следует правильно формулировать пояснения:

— Не осталось ни одной фигуры (предмета), которые мы считали. Для того чтобы это обозначить, используют специальный знак – цифру 0 (нуль, ноль). (В русском языке возможны обе формы.)

При этом не стоит говорить: «Ничего нет, значит 0». Нет яблок в корзине (но корзина есть!); нет кубиков в коробке; нет листьев на ветке и т. п. Для обозначения того, что яблок в корзине больше нет, используют цифру 0.

Вопрос о месте нуля в ряду чисел является важным для правильного формирования представления о натуральном ряде.

Не рекомендуется выстраивать последовательность 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 в фиксированном виде над доской в классе для того, чтобы она часто попадалась на глаза ребенку. Ребенок фиксирует (запоминает) ряд в таком виде, будучи убежден, что нуль — первое число в ряду, т. е. что нуль — натуральное число. В дальнейшем этот стереотип бывает трудно преодолеть.

Например, учителю будет сложно обосновать использование нуля в записи целых десятков: 10, 20, 30... Говорить, что нуль обозначает отсутствие сосчитываемых предметов, здесь нельзя (т. е. «не работает» введенное накануне определение нуля и «не действует» данное при введении нуля обоснование).

Для того чтобы объяснить роль нуля в записи двузначного (многозначного) числа необходимо обратиться к понятию «разряд», которое является базовым в десятичной системе счисления.

Суть в том, что в записи двузначного (многозначного) числа нуль выполняет роль «сторожа» разрядного места. Поскольку в записи двузначного числа роль цифры зависит от ее позиции (места в записи), одна и та же цифра будет иметь различное значение в зависимости от того, какое место она занимает. Такова структура десятичной системы, и именно поэтому она называется *позиционной*. Каждая позиция в записи числа имеет свое значение, называемое *разрядом*. Нуль в записи двузначного числа 10 обозначает, что в первом разряде (разряде единиц) *нет значащих цифр*, но данная позиция (разряд) в этом числе «задействована», и если к данному числу будут добавляться единицы, то они будут добавляться именно в этот разряд, который пока пуст.

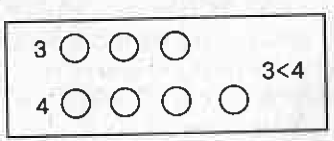
6. Сравнение чисел

Сравнение чисел может производиться различными способами:

1) с опорой на порядок называния чисел при счете: число названное раньше будет меньшим (это следует из свойства упорядоченности множества натуральных чисел);

2) с опорой на процесс присчитывания: три и один будет четыре, значит три меньше, чем четыре;

3) с опорой на количественные модели сравниваемых чисел:



Для фиксации процесса сравнения вводится *знак сравнения*.

Следует помнить, что знак сравнения — один, но читается он по-разному в зависимости от желания читающего. В соответствии с традицией чтения текстов в европейских письменностях слева направо первое прочтение знака сравнения обычно проводится слева направо: $3 < 4$ (три меньше четырех), но эту же запись при желании можно прочитать и справа налево (четыре больше трех), причем для этого ***не надо*** переставлять элементы записи таким образом: $4 > 3$. Не стоит внушать ребенку неверное представление о том, что есть два знака

сравнения, один из которых называется «меньше», а другой — «больше», поскольку это формирует негибкий, конвергентный шаблон восприятия, который потом будет мешать ребенку в старшей школе при работе с неравенствами. Полезно предлагать ребенку каждую запись такого вида читать двумя способами, приведенными выше.

7. Число 10

Десять единиц — это *десяток.*

Десяток является второй счетной единицей в десятичной системе счисления (десятичная система счисления имеет основанием число десять). Десять десятков образуют следующую счетную единицу — *сотню.*

Число 10 является числом, завершающим первый десяток.

Число 10 является первым двузначным числом в ряду натуральных чисел.

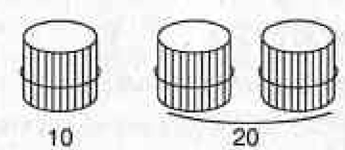
Число 10 является первым целым десятком, с которым знакомится ребенок.

В дальнейшем на основе понятия десяток ребенок знакомится с *разрядным и десятичным составом* двузначных и многозначных чисел. Чтобы не вдаваться в терминологические сложности и не перегружать материал ранним введением понятия «разряд», удобно целиком провести знакомство с десятком и его записью с помощью цифр на предметной модели.

Знакомя ребенка с числом 10 (первым двузначным числом и первым целым десятком), очень важно рассмотреть его с различных позиций: и как новое число в ряду (следующее за девятью и потому подчиняющееся общему принципу построения множества натуральных чисел), и как первое число, в записи которого использовано два символа; и как новую счетную единицу (десяток), для чего используют связку десяти палочек в качестве единицы счета: один десяток; два десятка, три десятка...

Не следует торопиться вводить стандартные названия этих десятков (двадцать, тридцать и т. п.), полезнее один-два урока использовать связки по 10 палочек для счета с целью формирования представления о десятке, как счетной единице.

Далее, для того чтобы не начинать процесс знакомства с нумерацией двузначных чисел сложным понятием «разряд», можно провести аналогию способа записи целых десятков с предметной моделью числа.



Нуль в такой аналогии символизирует «связку», охватывающее колечко. Для усвоения этой аналогии полезно сразу же предлагать детям и задания обратного вида: покажите на палочках число 30 (три связки), число 40 (четыре связки) и т. п.

Счет десятками (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90) — процесс «технически» аналогичный счету единицами в пределах 10. Полезно научить ребенка присчитывать и отсчитывать десятки так же, как он делал это с единицами. В дальнейшем это умение поможет ребенку легче освоить вычислительные приемы сложения и вычитания в пределах 100.

При знакомстве ребенка с нумерацией однозначных чисел рекомендуем педагогу использовать следующие виды заданий:

1) на способ образования каждого следующего числа путем присчитывания единицы к предыдущему:

Как из числа 3 получить 4? *(Добавить к трем один.)*

2) на определение места числа в ряду:

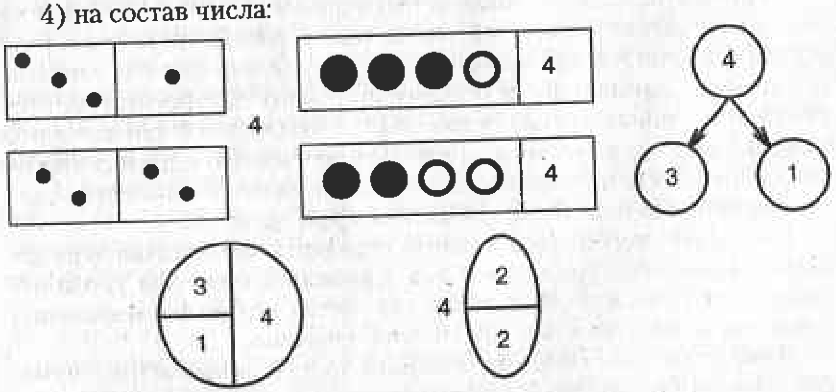
За каким числом стоит число 5? *(За числом 4.)*

Где место числа 8? *(Между числами 7 и 9.)*

3) на сравнение как двух соседних, так и несоседних чисел:

Сравните числа: 5...4 7...2

4) на состав числа:



5) на запоминание обратной последовательности числительных в ряду:

Назови числа от 5 до 1.

Вставь пропущенные числа: 6 ☐ ☐ 3 ☐ 1

Назови число, которое идет перед числом 5.

Лекция 6.

Разряды числа

1. Числа второго десятка (двадцаток).
2. Числа первой сотни.
3. Числа первой тысячи.
4. Многозначные числа.
5. Системы счисления.

1. Числа второго десятка (двадцаток)

Числа второго десятка (11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20) — ***двузначные числа***.

Для записи двузначного числа используются две цифры. Первая цифра справа в записи двузначного числа называется ***цифрой первого разряда*** или ***разряда единиц***, вторая цифра справа — ***цифрой второго разряда*** или ***разряда десятков***.

Числа второго десятка во всех учебниках математики для начальных классов рассматриваются отдельно от других двузначных чисел. Это объясняется тем, что названия чисел второго десятка противоречат способу их записи. Поэтому многие дети некоторое время путают порядок записи цифр в числах второго десятка, хотя называть их при этом могут правильно.

Например, при записи на слух числа 12 (две-на-дцать) ребенок первым словом слышит «две(а)», поэтому он может записать цифры в таком порядке 21, но прочитать эту запись как «двенадцать».

Формирование представления о двузначных числах строится на основе понятия «разряд».

Понятие разряда является базовым в десятичной системе счисления. *Под разрядом понимается определенное место в записи числа в позиционной системе счисления* (разряд — это позиция цифры в записи числа).

Каждая позиция в этой системе имеет свое название и свое условное значение: цифра, стоящая на первой позиции справа, означает количество единиц в числе; цифра, стоящая на второй позиции справа, означает количество десятков в числе и т. д.

Цифры от 1 до 9 называют *значащими*, а нуль является *незначащей* цифрой. При этом его роль в записи двузначных и других многозначных чисел очень важна: нуль в записи двузначного (и т. д.) числа означает, что число содержит обозначенный нулем разряд, но значащих цифр в нем нет, т. е. наличие нуля справа в числе 20, обозначает, что цифра 2 должна восприниматься как символ десятков, и при этом число содержит только два целых десятка; запись 23 будет означать, что кроме 2 целых десятков число содержит еще 3 единицы, дополнительно к целым десяткам.

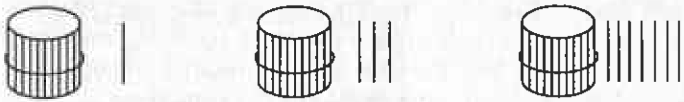
Понятие «разряд» играет большую роль в системе изучения нумерации, а также является основой для освоения так называемых «нумерационных» случаев сложения и вычитания, в которых действия производятся целыми разрядами:

27 – 20	365 – 300
27 – 7	365 – 60
20 + 7	305 + 60

Умение узнавать и выделять в числах разряды является основой умения раскладывать числа на *разрядные слагаемые*: 34 = 30 + 4.

Для чисел второго десятка понятие *«разрядный состав»* совпадает с понятием *«десятичный состав»*. Для двузначных чисел, содержащих более одного десятка — эти понятия не совпадают. Для числа 34 десятичный состав — это 3 десятка и 4 единицы. Для числа 340 разрядный состав — это 300 и 40, а десятичный — это 34 десятка.

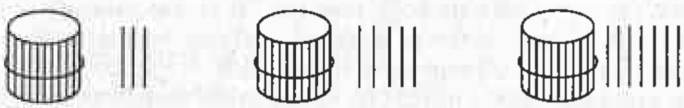
Знакомство с числами второго десятка (11—20) удобно начинать со способа их образования и названия чисел, сопровождая его сначала моделью на палочках, а затем чтением числа по модели:



один-на-дцать   три-на-дцать   сем-на-дцать

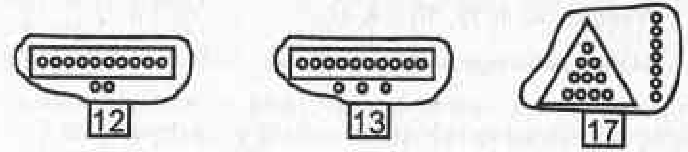
Запоминание названий двузначных чисел в этом случае не будет затруднено для детей противоречащей названию записью: 11, 13, 17. (Ведь в соответствии с традицией чтения в европейских письменностях слева направо в названии этих чисел сначала должна была бы идти цифра десятков, а потом цифры единиц!) В связи с такой особенностью чисел второго десятка, многие дети в первом классе долго путаются при записи их на слух и чтении по записи. Раннее введение символики играет в данном случае отрицательную роль как для запоминания названий чисел второго десятка, так и для понимания их структуры. Для формирования правильного представления о структуре двузначного числа следует всегда класть десятки слева, а единицы справа. Таким образом ребенок зафиксирует во внутреннем плане правильный образ понятия, без специальных многословных и не всегда понятных ему объяснений.

На следующем этапе предлагаем ребенку соотнесение вещественной модели и символической записи:

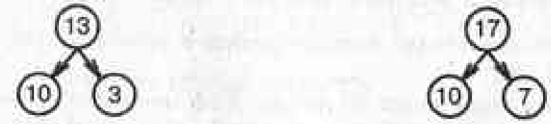


13   15   17

Затем переходим на графические модели и к чтению чисел по графической модели:



Далее вводятся схематические разрядные модели:



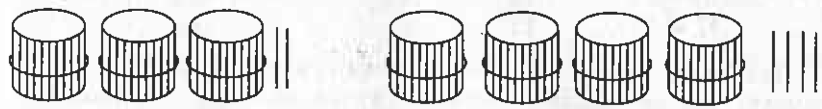
а затем символическая запись разрядного состава чисел второго десятка:

17 = 10 + 7.

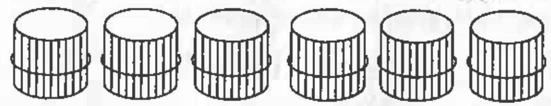
В дальнейшем в школе вводят понятие разряда и знакомят детей с понятием «разрядные слагаемые»:

37 = 30 + 7; 624 = 600 + 20 + 4.

Использование *десятичной модели* вместо разрядной для знакомства со всеми двузначными числами позволяет без введения понятия «разряд» познакомить ребенка как со способом образования этих чисел, так и научить его читать число по модели (и наоборот, строить модель по названию числа), а затем и записывать:



32   45



61

При изучении детьми чисел второго порядка рекомендуем педагогу использовать следующие виды заданий:

1) на способ образования чисел второго десятка:

Покажи тринадцать палочек. Сколько это десятков и сколько еще отдельных палочек?

2) на принцип образования натурального ряда чисел:

Сделай рисунок к задаче и реши ее устно. «В городе было 10 кинотеатров. Построили еще 1. Сколько кинотеатров стало в городе?»

Уменьши на 1: 16, 11, 13, 20

Увеличь на 1: 19, 18, 14, 17

Найди значение выражения: 10 + 1; 14 + 1; 18 − 1; 20 − 1.

(Во всех случаях можно ссылаться на то, что добавление 1 ведет к получению числа последующего, а уменьшение на 1 — к получению числа предыдущего.)

3) на поместное значение цифры в записи числа:

Что обозначает каждая цифра в записи числа: 15, 13, 18, 11, 10, 20?

(В записи числа 15 цифра 1 обозначает количество десятков, а цифра 5 — количество единиц. В записи числа 20 цифра 2 обозначает, что в числе 2 десятка, а цифра 0 обозначает, что в первом разряде единиц нет.)

4) на место числа в ряду чисел:

Вставь пропущенные числа: 12 ... ... 16 17 ... 19 20
Вставь пропущенные числа: 20 ... 18 17 ... ... 13 ... 11

(При выполнении задания ссылаются на порядок чисел при счете.)

5) на разрядный (десятичный) состав:

10 + 3 = ...   13 − 3 = ...   13 − 10 = ...
12 = 10 + ...   15 = ... + 5

При выполнении задания ссылаются на разрядную (десятичную) модель числа из десятка (пучка палочек) и единиц (отдельных палочек).

6) на сравнение чисел второго десятка:

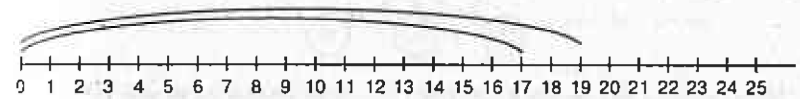
Какое из чисел больше: 13 или 15? 14 или 17? 18 или 14? 20 или 12?

При выполнении задания можно сравнивать две модели чисел из палочек (количественная модель), или ссылаться на порядок следования чисел при счете (меньшее число называют при счете раньше), или опираться на процесс присчитывания и отсчитывания (присчитывая к 13 две единицы получим 15, значит 15 больше, чем 13).

Сравнивая числа второго десятка с однозначными числами, следует ссылаться на то, что все однозначные числа меньше, чем двузначные:

Назови самое большое и самое маленькое из этих чисел: 12 6 18 10 7 20.

При сравнении чисел второго десятка удобно пользоваться линейкой.



Сравнивая длины соответствующих отрезков, ребенок наглядно определяет постановку знака сравнения: 17 < 19.

2. Числа первой сотни

Десять десятков — это *сотня*. Числа от 11 до 100 называют *числами первой сотни*. Все числа первой сотни — *двузначные*.

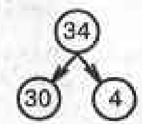
Двузначные числа записывают двумя цифрами: 37, 45, 64, 40. Первая цифра справа в записи двузначного числа называется *цифрой первого разряда или разряда единиц*, вторая цифра справа — *цифрой второго разряда или разряда десятков*.

Целые десятки (10 20 30 40 50 60 70 80 90) иногда именуются *разрядными числами*.

Читают двузначные числа слева направо. Для чисел 21 — 100 порядок называния составляющих их разрядных чисел и порядок записи совпадает: 21 (два-дцать один)

Понятие «разряд» является базовым для образования чисел первой сотни.

Разрядный состав – выделение разрядных чисел в двузначном числе:



На основе разрядного состава рассматриваются случаи разрядного сложения и вычитания:

30 + 4   34 – 4   34 – 30

При нахождении значений этих выражений ссылаются на разрядный состав двузначных чисел: число 34 состоит из 30 и 4. Вычитая 30 получаем 4.

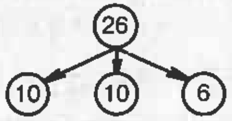
Разрядные слагаемые – сумма разрядных чисел двузначного числа:

47 = 40 + 7   68 = 60 + 8

Десятичный состав – выделение десятков и единиц в двузначном числе:

26 – это 2 дес. и 6 ед.

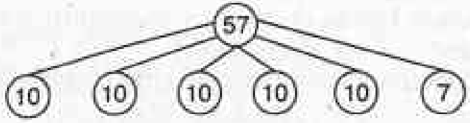
Схема десятичного состава:



На основе схемы десятичного состава можно рассмотреть такие случаи сложения и вычитания:

26 – 6 26 – 20 26 – 10 26 – 16 20 + 6

При нахождении значения этих выражений ссылаются на десятичный состав (десятичную схему) двузначного числа: вычитая из числа 26 число 16 (1 десяток и 6 единиц) получаем 1 десяток. Для наглядности ребенок прикрывает вычитаемое рукой на схеме. В дальнейшем это действие ребенок выполняет мысленно и сразу называет и пишет ответ. Использование десятичной схемы двузначного числа значительно облегчает вычислительную деятельность детям, которым вычисления «в уме» даются трудно. Например, десятичная схема числа 57 дает возможность без применения каких-либо еще вспомогательных приемов вычислений решить следующие примеры:



57 – 10 57 – 20 57 – 30
57 – 40 57 – 50 50 + 7
57 – 17 57 – 27 57 – 37
57 – 47

а также легко справиться со случаями вида: 57 + 2; 57 + 3; 57 + 10 и т. п., используя прием «десятки к десяткам, а единицы к единицам».

При изучении нумерации двузначных чисел рассматривают также случаи сложения и вычитания, базирующиеся на принципе построения последовательности натуральных чисел: 43 + 1; 43 – 1; 40 + 1; 40 – 1.

При нахождении значения этих выражений, ссылаются на принцип построения натурального ряда чисел: прибавляя к числу 1, получаем число следующее (последующее). Вычитая из числа 1, получаем число предыдущее.

Приведем основные виды заданий, выполняемых детьми при изучении чисел первой сотни:

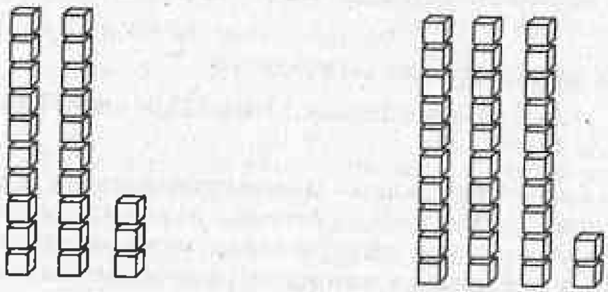
1) на способ образования чисел первой сотни:

Назови число, в котором 1 дес. 9 ед., 2 дес. 7 ед., 9 дес. 2 ед.

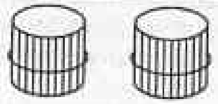
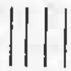
Запиши числа, в которых 3 дес. 7 ед., 7 дес. 3 ед., 7 дес. 0 ед.

2) на соотнесение количественной модели, названия и записи числа:

Сколько кубиков на каждом рисунке?



Прочитай и запиши число по модели:

Десятки	Единицы
	

3) на принцип образования натурального ряда чисел:

Уменьши на 1: 20, 47, 32, 50, 70

Увеличь на 1: 19, 28, 44, 67, 40, 90

Найди значение выражения: 50 + 1; 44 + 1; 68 – 1; 90 – 1.

Во всех случаях можно ссылаться на то, что добавление 1 ведет к получению числа последующего, а уменьшение на 1 — к получению числа предыдущего.

4) на поместное значение цифры в записи числа:

Что обозначает каждая цифра в записи числа: 72, 20, 70, 27? ***(В записи числа 72 цифра 7 обозначает количество десятков, а цифра 2 — количество единиц. В записи числа 20 цифра 2 обозначает, что в числе 2 десятка, а цифра 0 обозначает, что в первом разряде единиц нет.)***

5) на место числа в ряду чисел:

Вставь пропущенные числа: 40, 41 ... 43 ... ... 47 50
Вставь пропущенные числа: 70, 69 ... ... 64 ... ... 61 ...

При выполнении задания ссылаются на порядок чисел при счете.

6) на разрядный состав:

$20 + 3 = 23$ $\quad$ $23 - 3 = \ldots$ $\quad$ $23 - 20 = \ldots$

$37 = 30 + 7$ $\quad$ $37 - 30 = \ldots$ $\quad$ $37 - 7 = \ldots$

При выполнении задания ссылаются на разрядную модель числа из десятков и единиц.

7) на сравнение чисел первой сотни:

Какое из чисел больше: 23 или 32? 44 или 47? 28 или 54? 20 или 4?

При выполнении задания можно сравнивать две модели чисел из палочек (количественная модель), или ссылаться на порядок следования чисел при счете (меньшее число называют при счете раньше), или опираться на процесс присчитывания и отсчитывания (присчитывая к 44 три единицы получим 47, значит 47 больше, чем 44).

Более соответствующим данному этапу изучения нумерации считается способ сравнения чисел с опорой на разрядный состав. При этом *сравнивать числа начинают со старших разрядов*: в числе 23 — два десятка, а в числе 32 — три десятка, значит $32 > 23$. Если количество десятков одинаковое, то сравнивают цифры разряда единиц: в числе 44 и числе 47 по 4 десятка, сравним разряд единиц — 7 больше, чем 4, значит $47 > 44$.

Сравнивая двузначные числа с однозначными числами, следует ссылаться на то, что все однозначные числа меньше, чем двузначные.

При сравнении чисел вида:

>	99 ... 100	67 ... 68
<	98 ... 99	59 ... 60
=	100 ... 100	20 ... 21

следует ссылаться на порядок следования чисел при счете: следующее число всегда больше, чем предыдущее.

Для наглядного сравнения чисел первой сотни можно использовать портновскую ленту.

8) на десятичный состав двузначных чисел:

Сколько десятков в числе 56, 78, 92?

Комплексное задание на нумерацию двузначных чисел включает полную характеристику заданного числа.

Что можно рассказать о числе 33? (57, 62)

(Это число двузначное, записано с помощью двух цифр. В этом числе 3 десятка и 3 единицы или 3 единицы II разряда и 3 единицы I разряда; при счете его называют после числа 32 и перед числом 34 (или — его соседи 32 и 34); оно больше, чем число 30 и меньше, чем число 40; его можно представить в виде суммы 30 и 3.)

Завершает изучение чисел первой сотни знакомство с *числом 100*.

Десять десятков — это *сотня*.

Число 100 завершает изучение чисел первой сотни.

Сотня (100) — первое трехзначное число в ряду натуральных чисел.

Сотня — наименьшее трехзначное число.

Сотня — новая счетная единица в десятичной системе счисления.

В записи числа 100 цифра 1 обозначает, что в III разряде (разряде сотен) — одна единица, а разрядах десятков и единиц нули означают, что в этих разрядах нет значащих цифр.

3. Числа первой тысячи

Числа первой тысячи образуют первый класс — *класс единиц*.

Десять десятков — это *сотня*. Десять сотен — это *тысяча*. Числа от 101 до 1000 называют *числами первой тысячи*. Все числа первой тысячи — трехзначные.

Трехзначные числа записывают тремя цифрами: 537, 455, 164, 340. Первая цифра справа в записи трехзначного числа называется *цифрой первого разряда* или *разряда единиц*, вторая цифра справа — *цифрой второго разряда* или *разряда десятков*, третья цифра справа — *цифрой третьего разряда* или *разряда сотен*.

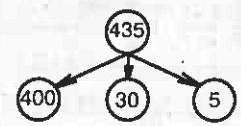
Целые сотни (100 200 300 400 500 600 700 800 900) иногда именуются «разрядными числами».

1 сотня — *сто*	6 сотен — *шестьсот*
2 сотни — *двести*	7 сотен — *семьсот*
3 сотни — *триста*	8 сотен — *восемьсот*
4 сотни — *четыреста*	9 сотен — *девятьсот*
5 сотен — *пятьсот*	10 сотен — *тысяча*

Читают трехзначные числа слева направо. Для чисел 101–1000 порядок называния составляющих их разрядных чисел и порядок записи совпадает: 321— триста двадцать один.

Понятие «разряд» является базовым для образования чисел первой тысячи. Все числа первой тысячи содержат три разряда.

Разрядный состав — выделение разрядных чисел в трехзначном числе:



На основе разрядного состава рассматриваются случаи разрядного сложения и вычитания:

400 + 30   340 – 40
534 – 34   534 – 30
672 – 600   243 – 3

При нахождении значений этих выражений ссылаются на разрядный состав трехзначных чисел: число 534 состоит из 500, 30 и 4. Вычитая 30, получаем 504.

Разрядные слагаемые — сумма разрядных чисел трехзначного числа:

247 = 200 + 40 + 7   968 = 900 + 60 + 8

Десятичный состав — выделение десятков и единиц в трехзначном числе:

326 — это 32 дес. и 6 ед.;   480 — это 48 дес. и 0 ед.

При изучении нумерации трехзначных чисел рассматривают также случаи сложения и вычитания, базирующиеся на принципе построения последовательности натуральных чисел:

443 + 1   443 – 1   640 + 1   640 – 1
599 + 1   700 – 1   999 + 1   1000 – 1

При нахождении значения этих выражений, ссылаются на принцип построения натурального ряда чисел: прибавляя к числу 1, получаем число следующее (последующее). Вычитая из числа 1, получаем число предыдущее.

Приведем основные виды заданий, выполняемых детьми при изучении чисел первой тысячи:

1) на способ образования чисел первой тысячи:

Назови число, в котором 3 сот. 1 дес. 9 ед.; 1 сот. 2 дес. 7 ед.; 6 сот. 9 дес. 2 ед.

Запиши числа, в которых 3 сот. 0 дес. 7 ед.; 1 сот. 7 дес. 3 ед.; 5 сот. 7дес. 0 ед.

Сколько всего палочек, если есть: 2 пучка по 100 палочек, 4 пучка по 10 палочек и 5 палочек?

2) на соотнесение количественной модели, названия и записи числа:

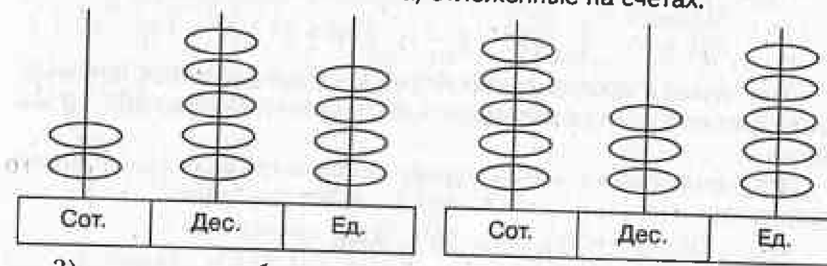
Как с помощью палочек изобразить в таблице числа: двести тридцать шесть? триста пятьдесят?

Прочитай числа, записанные в таблице:

Сотни	Десятки	Единицы
4	0	7
7	8	9

Запиши в таблице и прочитай числа: 7 сот. 3 дес. 3 ед.; 4 сот. 6 дес. 0 ед.

Назови и запиши числа, отложенные на счетах:



3) на принцип образования натурального ряда чисел:

Какое число при счете следует за числом 199? 999? Какое число предшествует числу 840? 1000?

Увеличь на 1: 199; 287; 444; 670; 405; 901

Найди значение выражения: 500 – 1; 744 + 1; 689 + 1; 990 – 1

Во всех случаях можно ссылаться на то, что добавление 1 ведет к получению числа последующего, а уменьшение на 1 — к получению числа предыдущего.

4) на поместное значение цифры в записи числа:

Что обозначает каждая цифра в записи чисел: 894, 809, 408, 900? *(В записи числа 894 цифра 8 обозначает количество сотен, цифра 9 обозначает количество десятков, а цифра 4 — количество единиц. В записи числа 900 цифра 9 обозначает, что в числе 9 сотен, а цифра 0 в разрядах десятков и единиц обозначает, что в первом и втором разрядах единиц нет.)*

Сколько всего цифр использовано для записи каждого числа: 578, 785. Используя эти же цифры запиши другие трехзначные числа.

5) на место числа в ряду чисел:

Во Дворце спорта в одном ряду были свободны места с 231 по 240. Назови, какие места свободны.

При выполнении задания ссылаются на порядок чисел при счете.

6) на разрядный состав:

Замени числа суммой по образцу:

195 = 100 + 90 + 5   657 = ...   304 = ...

При выполнении задания ссылаются на разрядную модель числа из сотен, десятков и единиц.

Заполни пропуски, чтобы равенства были верными:
999 = ... + 90 + 9   564 = 500 + ... + 4

Вычисли:
400 + 80 − 1;   978 − 8 − 1;   500 + 99 + 1;   750 − 50 + 1

Эти задания представляют собой комбинированные примеры на разрядный состав и принцип построения натурального ряда чисел.

При вычислениях сначала применяется разрядное сложение или вычитание, а затем присчитывание или отсчитывание.

7) на сравнение чисел первой тысячи:

Какое из чисел больше: 709 или 789; 578 или 571; 499 или 500; 300 или 150?

При выполнении задания можно сравнивать две модели чисел из косточек на счетах (количественная модель), или ссылаться на порядок следования чисел при счете (меньшее число называют при счете раньше), или опираться на процесс присчитывания и отсчитывания (присчитывая к 571 семь единиц получим 578, значит, 578 больше, чем 571).

Более соответствующим данному этапу изучения нумерации считается способ сравнения чисел с опорой на разрядный состав. *Сравнивать числа начинают со старших разрядов:* в числе 300 — три сотни, а в числе 150 — одна сотня, значит 300 > 150. Если количество сотен одинаковое, то сравнивают цифры разряда десятков, а если и они равны, то сравниваются цифры разряда единиц: в числе 709 и числе 789 по 7 сотен, сравним разряд десятков — в первом числе в разряде десятков 0 единиц, во втором числе в разряде десятков 8 единиц, значит 789 > 709.

Сравни числа: 35 и 355; 7 и 107.

Сравнивая трехзначные числа с однозначными и двузначными числами, следует ссылаться на то, что все однозначные и двузначные числа меньше, чем трехзначные.

При сравнении чисел вида:

>	999 ... 1000	567 ... 568
<	989 ... 999	599 ... 600
=	1000 ... 998	200 ... 201

следует ссылаться на порядок следования чисел при счете: следующее число всегда больше, чем предыдущее.

8) на десятичный состав двузначных чисел:

Отсчитывай от двухсот по 10 до 80.

Присчитывай к двумстам по 100 до тысячи.

Сколько всего десятков в числах 150, 270, 400? (Десятков 15, 27, 40.)

Запиши 5 чисел, каждое из которых содержит 37 десятков. Сколько таких чисел можно записать? *(370, 371, 372, 373, 374, ... Всего чисел, содержащих 37 десятков, десять. Число 380 уже содержит 38 десятков.)*

9) на соотношения между разрядами:

Сколько единиц составляют 5 сот., 2 сот., 24 дес.?

В прыжке с шестом спортсмен взял высоту 600 см. Вырази эту высоту в метрах.

1 сот. = 10 дес. = ...ед.; 10 сот. = 100 дес. = ... ед.

Комплексное задание на нумерацию двузначных чисел включает полную характеристику заданного числа:

Что можно рассказать о числе 335? *(Это число трехзначное, записано с помощью трех цифр. В этом числе 3 сотни, 3 десятка и 5 единиц или 3 единицы III-го разряда, 3 единицы II-го разряда и 5 единиц I-го разряда; при счете его называют после числа 334 и перед числом 336 (или — его соседи 334 и 336); оно больше, чем число 330 и меньше, чем число 340; его можно представить в виде суммы 300, 30 и 5.)*

Завершает изучение чисел первой сотни знакомство с *числом 1000.*
Десять сотен — это *тысяча.*
Число 1000 завершает изучение трехзначных чисел.
Тысяча (1000) — первое четырехзначное число в ряду натуральных чисел.
Тысяча — наименьшее четырехзначное число.
Тысяча — новая счетная единица в десятичной системе счисления.
В записи числа 1000 цифра 1 обозначает, что в IV разряде (разряде тысяч) — одна единица, а разрядах сотен, десятков и единиц нули означают, что в этих разрядах нет значащих цифр.

4. Многозначные числа

Многозначными считают числа больше тысячи. *Многозначные числа* — это числа класса тысяч и класса миллионов. Многозначные числа образуются, называются, записываются с опорой не только на понятие разряда, но и на понятие *класса.*
Класс объединяет три разряда.
Класс единиц — единицы, десятки сотни. Это — *первый класс.*

Класс тысяч — единицы тысяч, десятки тысяч, сотни тысяч. Это — *второй класс. Единица этого класса — тысяча.*

Класс миллионов — единицы миллионов, десятки миллионов, сотни миллионов. Это — *третий класс. Единица этого класса — миллион.*

Таблица разрядов I класса:

Сотни	Десятки	Единицы
Единицы III разряда	Единицы II разряда	Единицы I разряда
2	5	7

В таблице записано число 257.

Таблица разрядов II класса:

Сотни тысяч	Десятки тысяч	Единицы тысяч
Единицы VI разряда	Единицы V разряда	Единицы IV разряда
2 сот. тыс.	5 дес. тыс.	7 ед. тыс.

В таблице записано число 257 000.

Таблица разрядов III класса:

Сотни миллионов	Десятки миллионов	Единицы миллионов
Единицы IX разряда	Единицы VIII разряда	Единицы VII разряда
2 сот. млн	7 дес. млн	5 ед. млн

В таблице записано число 275 000 000.

Многозначные числа образуют второй класс — класс тысяч и третий класс — класс миллионов.

Десять сотен — это *тысяча*. Числа от 1001 до 1 000 000 называют числами класса тысяч.

Числа класса тысяч — это четырех-, пяти- и шестизначные числа.

Четырехзначные числа записывают четырьмя цифрами: 1537, 7455, 3164, 3401. Первая цифра справа в записи четырехзначного числа называется *цифрой первого разряда* или *разряда единиц*, вторая цифра справа — *цифрой второго разряда* или *разряда десятков*, третья цифра справа — *цифрой третьего разряда* или *разряда сотен*, четвертая цифра справа — *цифрой четвертого разряда* или *разряда тысяч.*

Цифра пятого разряда — это цифра десятков тысяч, *цифра шестого разряда* — это цифра сотен тысяч.

Целые тысячи: 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000.

Читают многозначные числа слева направо. Для чисел 1001 и далее порядок называния составляющих их разрядных чисел и порядок записи совпадает: 4 321 — четыре тысячи триста двадцать один; 346 456 — триста сорок шесть тысяч четыреста пятьдесят шесть.

Правило чтения многозначных чисел: многозначные числа читают слева направо. Сначала разбивают число на классы, отсчитывая справа по три цифры. Чтение начинают с единиц старших классов (слева). Единицы старших классов читают сразу как трехзначное число, добавляя затем название класса. Единицы I класса читают без добавления названия класса.

Например: 1 234 456 — один миллион двести тридцать четыре тысячи четыреста пятьдесят шесть.

Если какой-то класс в записи числа не содержит значащих цифр, его при чтении пропускают.

Например: 123 000 324 — сто двадцать три миллиона триста двадцать четыре.

Понятие «класс» является базовым для образования многозначных чисел. Все многозначные числа содержат два и более классов.

Класс объединяет три разряда (единицы, десятки и сотни).

II класс — класс тысяч			I класс — класс единиц		
Сотни тысяч	Десятки тысяч	Единицы тысяч	Сотни	Десятки	Единицы

На письме при записи многозначного числа принято делать разрядку между классами: 345 674, 23 456, 101 405, 12 345 567.

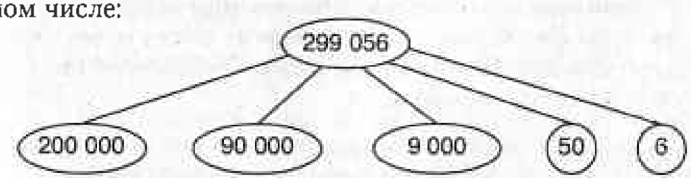
Правило записи многозначных чисел: многозначные числа записывают по классам, начиная с высших. Чтобы записать цифрами число, например, двенадцать миллионов четыреста пятьдесят тысяч семьсот сорок два, поступают так: записывают группами единицы каждого названного класса, отделяя один класс от другого небольшим промежутком (разрядкой): 12 450 742.

Классовый состав — выделение «классовых чисел» (классовых составляющих) в многозначном числе.

Например: 123 456 = 123 000 + 456

34 123 345 = 34 000 000 + 123 000 + 345

Разрядный состав — выделение разрядных чисел в многозначном числе:



На основе разрядного состава рассматриваются случаи разрядного сложения и вычитания:

400 000 + 3 000 20 534 – 34 340 000 – 40 000
534 000 – 30 000 672 000 – 600 000 24 000 + 300

При нахождении значений этих выражений ссылаются на разрядный состав трехзначных чисел: число 340 000 состоит из 300 000 и 40 000. Вычитая 40 000 получаем 300 000.

Разрядные слагаемые — сумма разрядных чисел многозначного числа:
247 000 = 200 000 + 40 000 + 7 000
968 460 = 900 000 + 60 000 + 8 000 + 400 + 60

Десятичный состав — выделение десятков и единиц в многозначном числе: 234 000 это 23 400 дес. или 2 340 сот.

При изучении нумерации многозначных чисел рассматривают также случаи сложения и вычитания, базирующиеся на принципе построения последовательности натуральных чисел:

443 999 + 1 20 443 – 1 640 000 + 1 640 000 – 1
10 599 + 1 700 000 – 1 99 999 + 1 100 000 – 1

При нахождении значения этих выражений, ссылаются на принцип построения натурального ряда чисел: прибавляя к числу 1, получаем число следующее (последующее). Вычитая из числа 1, получаем число предыдущее.

Приведем основные виды заданий, выполняемых детьми при изучении многозначных чисел:

1) на чтение и запись многозначных чисел:

Разбей число на классы, скажи, сколько в нем единиц каждого класса, а потом прочитай число:

7300 29608 305220 400400 90060
7340 29680 305020 400004 60090

При выполнении задания следует воспользоваться правилом чтения многозначных чисел.

Запиши и прочитай числа, в которых: а) 30 ед. второго класса и 870 ед. первого класса; б) 8 ед. второго класса и 600 ед. первого класса; в) 4 ед. второго класса и 0 ед. первого класса.

При выполнении задания следует воспользоваться таблицей разрядов и классов.

Запиши числа цифрами: «Наименьшее расстояние от Земли до Луны составляет триста пятьдесят шесть тысяч четыреста десять километров, а наибольшее — четыреста шесть тысяч семьсот сорок километров».

Ученики записали число девять тысяч сорок так: 940, 900 040, 9 040. Объясни, какая запись правильная.

При выполнении заданий следует воспользоваться правилом записи многозначных чисел.

2) на разрядный и классовый состав многозначных чисел:

Замени данные числа суммой по образцу:
108 201 = 108 000 + 201

360 400 = ... + ... 50 070 = ... + ... 9 007 = ... + ...

Задание на классовый состав многозначного числа.

Замени каждое число суммой разрядных слагаемых:

205 000 = ... + ... 640 000 = ... + ...

Вычисли: 200 000 + 90 000 + 9 000 4 000 + 8 000
299 000 – 200 000 408 000 – 8 000

Сколько единиц каждого разряда в числе 395 028, в числе 602 023? Сколько единиц каждого класса в этих числах?

При выполнении заданий используют схему разрядного состава многозначных чисел.

3) на принцип образования натурального ряда чисел:

Найди значения выражений: 99 999 + 1 30 000 – 1
100 000 – 1 699 999 + 1

Во всех случаях можно ссылаться на то, что добавление 1 ведет к получению числа последующего, а уменьшение на 1 — к получению числа предыдущего.

4) на порядок следования чисел в натуральном ряду:

У трех тракторов такие заводские номера: 250 000, 249 999, 250 001. Какой из них сошел с конвейера первым? Вторым? Третьим?

Запиши все шестизначные числа, которые больше числа 999 996.

5) на поместное значение цифры в записи числа:

Что обозначает цифра 2 в записи каждого числа: 2, 20, 200, 2 000, 20 000, 200 000? Объясни, как меняется значение цифры 2 в записи числа при изменении ее места.

Что обозначает каждая цифра в записи чисел: 140 401, 308 000, 70 050?

(В записи числа 140 401 цифра 4, стоящая на третьем месте справа, обозначает количество сотен, цифра 4, стоящая на пятом месте справа, обозначает количество

десятков тысяч. Цифра 1, стоящая на первом месте справа, обозначает количество единиц в числе, а цифра 1, стоящая на шестом месте справа, — количество сотен тысяч. Цифра 0, стоящая на втором месте справа и четвертом месте справа, означает, что во втором и четвертом разрядах единиц нет.)

Запиши с помощью цифр 9 и 0 одно пятизначное число и одно шестизначное число. Используя эти же цифры запиши другие многозначные числа.

6) на сравнение многозначных чисел:

Проверь, верны ли равенства:
5 312 < 5 320 900 001 > 901 000

Сравни числа:
а) 999 ... 1 000 б) 9 999 ... 999 в) 415 760 ... 415 670
г) 200 030 ... 200 003 д) 94 875 ... 94 895

При сравнении первой пары чисел ссылаются на порядок следования чисел в натуральном ряду: число последующее больше, чем число предыдущее.

При сравнении второй пары чисел ссылаются на количество знаков в записи чисел: трехзначное число всегда меньше, чем четырехзначное.

При сравнении третьей, четвертой и пятой пары чисел используют правило сравнения многозначных чисел. Чтобы узнать, какое из двух многозначных чисел больше, а какое меньше, поступают так:

Сравнивают числа поразрядно, начиная с высших разрядов.

Например, из двух чисел 34 567 и 43 567 больше второе, поскольку в разряде десятков тысяч оно содержит 4 единицы, а первое в том же разряде содержит три единицы.

Из двух чисел 415 760 и 415 670 больше первое, поскольку класс тысяч в обоих числах содержит одинаковое количество единиц — 415 ед. тыс., но в разряде сотен тысяч первое число содержит 7 единиц, а второе — 6 единиц.

Из двух чисел 200 030 и 200 003 больше первое, поскольку класс тысяч в обоих числах содержит одинаковое количество единиц — 200 ед. тыс., в разряде сотен оба числа содержат нули, в разряде десятков первое число содержит 3 единицы, а второе число в разряде десятков не имеет значащих цифр (содержит нуль), поэтому первое число больше.

Для большей наглядности при выполнении задания можно сравнивать две *модели* чисел из косточек на счетах (количественная модель).

Сравнивая многозначные числа, можно ссылаться на то, что число, содержащее в записи большее количество знаков всегда будет больше, чем число, содержащее меньшее количество знаков.

При сравнении чисел вида:

> < =

99 999 ... 100 000 567 999 ... 568 000
989 000 ... 989 001 599 999 ... 600 000

следует ссылаться на порядок следования чисел при счете: следующее число всегда больше, чем предыдущее.

7) на десятичный состав многозначных чисел:

Запиши числа: 376, 6 517, 85 742, 375 264. Сколько в каждом из них всего десятков? Подчеркни их.

Для определения количества десятков в многозначном числе можно прикрыть рукой последнюю цифру (первую справа). Оставшиеся цифры покажут количество десятков.

Для определения количества сотен в числе можно прикрыть рукой две последние цифры в записи числа (первую и вторую справа). Оставшиеся цифры покажут количество сотен в числе.

Например, в числе 2 846 — десятков 284, сотен — 28. В числе 375 264 — десятков 37 526, сотен — 3 752.

Рассмотри числа: <u>384</u>9, <u>560</u>18, <u>370</u>843. Какое из подчеркнутых чисел показывает, сколько всего десятков в числе? Сотен? Тысяч?

Сколько всего сотен в числе 6 800?

Запиши 5 чисел, каждое из которых содержит 370 десятков.

8) на соотношения между разрядами:

Спиши, заполняя пропуски:
1 тыс. = ...сот. 1 сот. = ... дес. 1 тыс. = ... дес.

Как изменятся числа 3 000, 8 000, 17 000, если отбросить в их записи справа один нуль? Два нуля? Три нуля?

Сравни числа в каждом столбике. Во сколько раз увеличивается число, когда в его записи справа приписывают один нуль? Два нуля? Три нуля?

1	8	17
10	80	170
100	800	1 700
1 000	8 000	17 000

Числа 57, 90, 300 увеличь в 10 раз, в 1 000 раз.

Числа 3 000, 60 000, 152 000 уменьши в 10 раз, в 100 раз, в 1 000 раз.

При выполнении последних двух заданий ссылаются на то, что увеличение числа в 10 раз переводит его в соседний разряд слева (десятки в сотни, сотни в тысячи и т.п.), а уменьшение числа в 10 раз переводит его в соседний разряд справа (десятки в единицы, сотни в десятки).

При увеличении числа в 10 раз (100, 1 000) таким образом можно просто приписать справа нуль (два нуля, три нуля). При уменьшении числа в 10 раз (100, 1 000) можно отбросить справа один нуль в записи числа (два нуля, три нуля).

Завершает изучение класса тысяч знакомство с числом 1 000 000 (миллион).

Десять сотен тысяч — это *миллион*. Тысяча тысяч — это *миллион*.

Миллион записывают так: 1 000 000.

Число 1 000 000 завершает изучение чисел класса тысяч.

Миллион (1 000 000) — это единица нового класса — класса миллионов.

Миллион (1 000 000) — первое семизначное число в ряду натуральных чисел.

Миллион — наименьшее семизначное число.

Миллион — новая счетная единица в десятичной системе счисления.

В записи числа 1 000 000 цифра 1 обозначает, что в VII разряде (разряде миллионов) — одна единица, а в разрядах сотен тысяч, десятков тысяч, единиц тысяч и т. д. нули означают, что в этих разрядах нет значащих цифр.

Класс миллионов содержит три разряда единицы миллионов, десятки миллионов и сотни миллионов (VII, VIII и IX разряды).

Завершает класс миллионов число *миллиард*.

Миллиард — это 1000 миллионов.

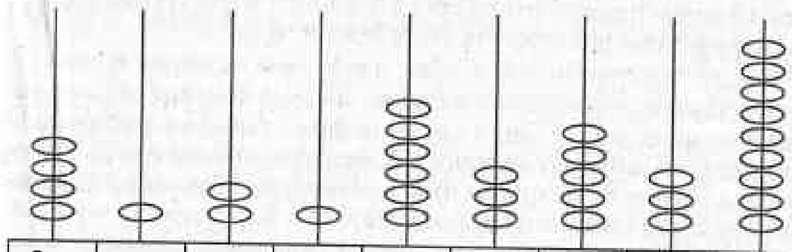
1000 миллиардов — это *триллион*.

1000 триллионов — это *квадриллион*.

1000 квадриллионов — это *квинтиллион*.

Представить себе такое количество чего-то невозможно. И.Я. Депман в «Истории арифметики» приводит такой пример для иллюстрации больших чисел: «Большегрузный железнодорожный вагон может вместить 50 миллионов рублей десятирублевыми билетами (купюрами). Для перевозки триллиона рублей понадобилось бы 20 тысяч вагонов».

Наглядная модель таблицы классов:



Сот.	Дес.	Ед.	Сот.	Дес.	Ед.	Сот.	Дес.	Ед.
миллионы			тысячи			единицы		

Читают число так: 412 миллионов 163 тысячи 539

Записывают так: 412 163 539

Для чисел класса миллионов действуют правило чтения, правило записи и правило сравнения многозначных чисел (см. выше).

В стабильном учебнике математики для начальных классов числа свыше миллиона не рассматриваются.

5. Системы счисления

Десятичная система счисления

Системой счисления называют язык для наименования чисел, их записи и выполнения действий над ними.

Различают позиционные и непозиционные системы счисления. В позиционных системах один и тот же знак (цифра) может обозначать различные числа в зависимости от места (позиции), занимаемого этим знаком (цифрой) в записи числа.

Различные народы употребляли различные счетные группы. Большинство народов употребляло и употребляет десятичные группы счета или *десятичную систему счисления*. Единственной причиной выбора десятичной системы счисления является наличие у человека на руках десяти пальцев, которые служат удобнейшей вещественной основой для счета.

Для составления названий чисел по этой системе нужно иметь десять слов для названий первых десяти чисел и затем названия для новых счетных групп (сто, тысяча и т. д.). Добавление названий групп к числительным при счете позволяет обходиться десятью наименованиями числительных и десятью символами для записи чисел, соответствующих любому количеству.

В десятичной системе счисления для записи чисел используются 10 цифр (знаков, символов): 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0. Из них образуют краткие записи чисел: 234, 56, 8 765 и т. п.

Каждая позиция в этой записи имеет свое название и свое условное значение: цифра, стоящая на первой позиции справа, означает количество единиц в числе; цифра, стоящая на второй позиции справа, означает количество десятков в числе и т. д. Таким образом, одна и та же цифра имеет различные значения в зависимости от места (позиции), где она записана. Благодаря этому свойству современную десятичную систему счисления называют *позиционной*. Десятичная позиционная система счисления позволяет записывать сколь угодно большие натуральные числа.

Позиционный способ записи чисел является очень удобным и экономичным, поскольку, позволяет обходиться десятью значками (цифрами) при записи всего бесконечного множества чисел. Однако сама структура системы является чисто условной, особенно для ребенка, которому мы не можем объяснить ни роль «основания» системы (десятка), ни схему увеличения степени основания при «движении» по позициям справа налево, т. е. запись вида:

$$234 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

не может быть рассмотрена в начальной школе, поскольку ребенок не знаком с понятием степени и способом нахождения степени числа.

При знакомстве с десятичной системой счисления ребенок просто заучивает, что числа 10, 100, 1 000 и т.д. называют разрядными единицами первого, второго, третьего и т. д. разряда, и что при этом 10 единиц одного разряда составляют одну единицу следующего высшего разряда, т. е. отношение соседних разрядов равно 10 (фактически, отношения между разрядами — это просто степени числа 10).

В разные исторические периоды у некоторых народов имелись системы счисления с другими основаниями — 5, 12, 20, 60. Например, древневавилонская система счисления была шестидесятиричная. Следы этой системы сохранились и сейчас в единицах измерения времени и величины угла: 1 час = 60 мин, 1 мин = 60 с, 1° = 60′.

Современные электронно-вычислительные машины используют двоичную систему счисления, основанную на обозначении чисел двумя цифрами 0 и 1. Например, число 2 (1 + 1) в ней будет записано как 10, а число 3 (2 + 1) — как 11.

В России десятичная система стала использоваться с XVII в. До этого времени числа записывались буквами славянского алфавита.

Римская система счисления

Примером непозиционной системы счисления без нуля может служить римская система. В ней числа от 1 до 20 обозначаются так:

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX, XX.

Для записи больших чисел используют специальные обозначения: 50 — L, 100 — C, 500 — D, 1 000 — M.

Число 1917 в римской системе можно записать по-разному: MCM XVII или MDCCCC XVII.

При этом первая запись предпочтительнее, поскольку четыре одинаковые цифры в записи числа римскими цифрами писать не принято.

В римской системе счисления используется принцип суммирования (его иногда называют принципом вычитания) при записи чисел: если меньшая цифра стоит после большей (справа), то она прибавляется к большей: MD = 1500, XVII = 17. Если меньшая цифра стоит перед большей (слева), то она вычитается: CM = 900, IV = 4.

Римские цифры продолжали использовать в школьных учебниках и после проникновения в Европу современных цифр, поэтому их называли школьными.

Римскую запись чисел используют и сейчас для обозначения веков, глав книги, часов на круглых стрелочных циферблатах и т. п., поэтому во всех учебниках математики для начальных классов дети знакомятся с этой символикой.

Глава 3

Изучение арифметических действий в начальной школе

Лекция 7.

Вычислительные приемы сложения и вычитания для чисел первого и второго десятка

1. Основные понятия.
2. Вычислительные приемы для чисел первого десятка.
3. Вычислительные приемы для чисел второго десятка.

1. Основные понятия

В начальной школе изучают четыре арифметических действия: в 1 классе дети знакомятся со сложением и вычитанием, во 2 — с умножением и делением.

Сложение и вычитание называют действиями *первой ступени*. Умножение и деление называют действиями *второй ступени*.

Символ сложения — знак «+» (плюс), символ вычитания — знак «–» (минус). Символ умножения — знак «×», который на письме часто заменяется точкой, стоящей в центре клетки «·». Символ деления — знак «:». В старших классах в качестве символа деления используют также горизонтальную черту (в печатных текстах часто заменяемую на наклонную черту), рассматривая запись вида $^3/_4$, $^1/_2$ как запись деления.

С теоретико-множественной точки зрения *сложению* соответствуют такие предметные действия с совокупностями (множествами, группами предметов) как объединение и увеличение на несколько элементов либо данной совокупности, либо совокупности, сравниваемой с данной. В связи с этим, прежде, чем знакомиться с символикой записи действий и вычислениями результатов действий, ребенок должен научиться моделировать на предметных совокупностях все эти ситуации, понимать (т. е. правильно представлять) их со слов учителя, уметь показывать руками как процесс, так и результат предметного действия, а затем характеризовать их словесно.

Задания, которые ребенок должен научиться выполнять по словесному описанию педагога до знакомства с символикой действия сложения:

1. Возьми три морковки и два яблока (наглядность). Положи их в корзину. Как узнать, сколько их вместе? *(Надо сосчитать.)*
2. На полке стоит 2 чашки и 4 стакана. Обозначь чашки кружками, стаканы квадратиками. Покажи сколько их вместе. Сосчитай.
3. Из вазы взяли 4 конфеты и 1 вафлю. Обозначь их фигурками и покажи, сколько всего сладостей взяли из вазы. Сосчитай.

Все три ниже предлагаемые ситуации моделируют ***объединение двух множеств***.

1. У Вани 3 значка. Обозначь значки кружками. Ему дали еще и у него стало на 2 больше. Что надо сделать, чтобы узнать, сколько у него теперь значков? *(Надо 2 добавить.)* Сделай это. Сосчитай результат.
2. У Пети было 2 игрушечных грузовика. Обозначь грузовики квадратиками. И столько же легковых машин. Обозначь легковые машины кружками. Сколько ты поставил кружков? На день рождения ему подарили еще три легковые машины. Каких машин теперь больше? Обозначь их кружками. Покажи, на сколько больше.
3. В одной коробке 6 карандашей, а в другой на 2 больше. Обозначь карандаши из первой коробки зелеными палочками, карандаши из второй коробки — красными палочками. Покажи, сколько карандашей в первой коробке, сколько во второй. В какой коробке карандашей больше? В какой меньше? На сколько?

Эти три ситуации моделируют *увеличение на несколько единиц* данной совокупности или совокупности, сравниваемой с данной.

Символически данные ситуации описываются с помощью действия сложения: $6 + 2 = 8$.

Действию *вычитания* соответствуют четыре вида предметных действий:

а) *удаление части совокупности* (множества);

б) *уменьшение данной совокупности на несколько единиц;*

в) *уменьшение на несколько единиц совокупности, сравниваемой с данной;*

г) *разностное сравнение двух множеств.*

6 2681

Приведем задания, которые ребенок должен научиться выполнять по словесному описанию педагога до знакомства с символикой действия вычитания:

1. Удав нюхал цветы на полянке. Всего цветов было 7. Обозначь цветы кружками. Пришел Слоненок и нечаянно наступил на 2 цветка. Что надо сделать, чтобы это показать? Покажи, сколько цветов теперь сможет понюхать Слоненок.

2. У Мартышки было 6 бананов. Обозначь их кружками. Несколько бананов она съела и у нее стало на 4 меньше. Что надо сделать, чтобы это показать? Почему ты убрал 4 банана? *(Стало на 4 меньше.)* Покажи оставшиеся бананы. Сколько их?

3. У жука 6 ног. Обозначь количество ног жука красными палочками. А у слона ног на 2 меньше. Обозначь количество ног слона зелеными палочками. Покажи, у кого ног меньше. У кого ног больше? На сколько?

4. На одной полке стоит 5 чашек. Обозначь чашки кружками. А на другой полке — 8 стаканов. Обозначь стаканы квадратиками. Поставь их так, чтобы сразу было видно, чего больше — стаканов или чашек. Чего меньше? На сколько?

Следующие задания приведены в соответствии с видами предметных действий, указанных выше.

Символически данные ситуации описываются с помощью действия вычитания: $8 - 5 = 3$.

После того, как ребенок научится понимать на слух и моделировать все означенные виды предметных действий, его можно знакомить со знаками действий. На этом этапе последовательность указаний педагога такова:

1) обозначьте то, о чем говорится в задании кружками (палочками и т. п.);

2) обозначьте указанное число кружков (палочек) цифрами;

3) поставьте между ними нужный знак действия.

Например:

В вазе 4 тюльпана белых и 3 розовых. Обозначьте цифрами число белых тюльпанов и число розовых тюльпанов. Какой знак нужно поставить в записи, чтобы показать, что *все* тюльпаны *стоят в одной вазе*?

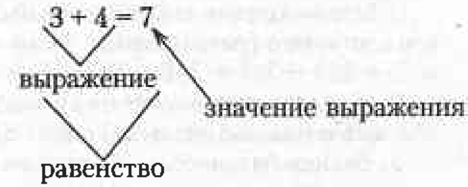
Составляется запись: $4 + 3$.

Такую запись называют ***«математическое выражение»***. Она характеризует *количественные признаки ситуации и взаимоотношения рассматриваемых совокупностей.*

Число 7, получаемое в ответе, называют *значением выражения.*

Запись вида $3 + 4 = 7$ называют *равенством.*

Не стоит сразу ориентировать ребенка на получение полного равенства с записью значения выражения:



Прежде чем переходить к равенству, полезно предлагать детям задания:

а) на соотнесение ситуации и выражения (подбери выражение к данной ситуации или измени ситуацию в соответствии с выражением — ситуация может быть изображена на картинке, нарисована на доске, смоделирована на фланелеграфе);

б) на составление выражений по ситуациям (составь выражение в соответствии с ситуацией).

После того, как дети научатся правильно выбирать *знак действия* и объяснять свой выбор, можно перейти к составлению равенства и фиксированию результата действия.

В стабильном учебнике математики действия сложения и вычитания изучаются одновременно. В некоторых альтернативных учебниках (И.И. Аргинская, Н.Б. Истомина) сначала изучается сложение, а затем — вычитание.

Выражение вида $3 + 5$ называют ***суммой.***

Числа 3 и 5 в этой записи называют ***слагаемыми.***

Запись вида $3 + 5 = 8$ называют ***равенством.*** Число 8 называют ***значением выражения.*** Поскольку число 8 в данном случае получено в результате суммирования, его также часто называют ***суммой.***

Например:

Найдите сумму чисел 4 и 6. *(Ответ: сумма чисел 4 и 6 — это 10.)*

Выражение вида $8 - 3$ называют ***разностью.***

Число 8 называют ***уменьшаемым***, а число 3 — ***вычитаемым.***

Значение выражения — число 5 также могут называть ***разностью.***

Например:

Найдите разность чисел 6 и 4. *(Ответ: разность чисел 6 и 4 — это 2.)*

Поскольку названия компонентов действий сложения и вычитания вводятся по соглашению (детям сообщаются эти названия и их необходимо запомнить), педагог активно использует задания, требующие распознавания компонентов действий и употребления их названий в речи.

Например:

1. Среди данных выражений найдите такие, в которых первое слагаемое (уменьшаемое, вычитаемое) равно 3:
$3 + 2$; $7 - 3$; $6 + 3$; $8 + 1$; $3 + 5$; $3 - 2$; $7 - 3$; $3 + 4$; $3 - 1$.
2. Составьте выражение, в котором второе слагаемое (уменьшаемое, вычитаемое) равно 5. Найдите его значение.
3. Выберите примеры, в которых сумма равна 6. Подчеркните их красным цветом. Выберите примеры, в которых разность равна 2. Подчеркните их синим цветом.
4. Как называют число 4 в выражении $5 - 4$? Как называют число 5? Найдите разность. Составьте другой пример, в котором разность равна тому же числу.
5. Уменьшаемое 18, вычитаемое 9. Найдите разность.
6. Найдите разность чисел 11 и 7. Назовите уменьшаемое, вычитаемое.

Во 2 классе дети знакомятся с правилами проверки результатов действий сложения и вычитания:

Сложение можно проверить вычитанием:
57 + 8 = 65. Проверка: 65 – 8 = 57.

Из суммы вычли одно слагаемое, получили другое слагаемое. Значит, сложение выполнено верно.

Данное правило применимо к проверке действия сложения в любом концентре (при проверке вычислений с любыми числами).

Вычитание можно проверить сложением:
63 – 9 = 54. Проверка: 54 + 9 = 63.

К разности прибавили вычитаемое, получили уменьшаемое. Значит, вычитание выполнено верно.

Данное правило также применимо к проверке действия вычитания с любыми числами.

В 3 классе дети знакомятся с ***правилами взаимосвязи компонентов сложения и вычитания***, которые являются обобщением представлений ребенка о способах проверки сложения и вычитания:

Если из суммы вычесть одно слагаемое, то получится другое слагаемое.

Если сложить разность и вычитаемое, то получится уменьшаемое.

Если из уменьшаемого вычесть разность, то получится вычитаемое.

Данные правила являются основой для подготовки к решению уравнений, которые в начальной школе решаются с опорой на правило нахождения соответствующего неизвестного компонента равенства.

Например:

Решите уравнение $24 - x = 19$.

В уравнении неизвестно вычитаемое. Чтобы найти неизвестное вычитаемое, нужно из уменьшаемого вычесть разность: $x = 24 - 19$, $x = 5$.

2. Вычислительные приемы для чисел первого десятка

Вычислительные приемы первого десятка изучаются в теме «Сложение и вычитание в пределах 10» в 1 классе при обучении по любому учебнику математики для начальных классов. Результатом изучения данной темы должно явиться формирование осознанной самостоятельной вычислительной деятельности ребенка. При этом программой оговорена необходимость знания наизусть *результатов* действий сложения и вычитания в пределах 10 (так называемое «табличное сложение и вычитание»).

Присчитывание и отсчитывание

Первым вычислительным приемом, который осваивает первоклассник, является прием вида $a \pm 1$. Основой данного приема является ***принцип образования чисел в натуральном ряду: каждое следующее число на единицу больше предыдущего.***

Усвоение ребенком этого принципа являлось *центральной задачей* изучения нумерации первого десятка.

Следствием этого принципа является способ нахождения значений выражений вида $5 + 1$; $8 + 1$; $6 - 1$; $7 - 1$ и т. п. путем называния либо *следующего*, либо *предыдущего* числа. Иными словами, для нахождения значения данных выражений нет необходимости выполнять какой-то прием арифметических действий, достаточно понимать, что добавление 1 ведет к получению следующего по счету числа, а убавление 1 — к появлению предыдущего по счету числа. Именно для получения результатов в таких выражениях ребенок заучивал наизусть названия чисел в прямом и обратном порядке.

Число предыдущее стоит в ряду чисел левее данного. При счете называется непосредственно перед данным, количественно оно содержит на одну единицу меньше данного.

Число последующее (следующее) стоит в ряду чисел правее данного. При счете называется непосредственно после данного, количественно оно содержит на одну единицу больше данного.

Хорошее понимание *принципа построения натурального ряда чисел* ведет к легкому освоению приемов *присчитывания и отсчитывания по 1* и легкому выполнению вычислительной деятельности в случаях:

7 + 1	17 + 1	177 + 1	10 277 + 1
7 – 1	17 – 1	177 – 1	10 277 – 1

Во всех случаях ссылка на принцип построения натуральной последовательности чисел является наиболее рациональной вплоть до 4 класса (общий прием вычислений):

— прибавляя к числу 1, получаем *следующее* по счету;

— вычитая из числа 1, получаем *предыдущее* по счету.

Этот же прием является действующим и в трудных случаях (вплоть до 4 класса):

9 + 1	19 + 1	199 + 1	999 + 1	99 999 + 1
10 – 1	20 – 1	200 – 1	1 000 – 1	100 000 – 1

При нахождении ответа в данных примерах удобно ссылаться на порядок счета: следующим за числом 99 999 является число 100 000; предшествующим числом для числа 1 000 является 999.

В «Методике преподавания математики в начальных классах» (авт. М.А. Бантова, Г.В. Бельтюкова) отмечается, что «на специально отведенном уроке... под руководством учителя дети составляют таблицы «прибавить 1» и «вычесть 1» и затем заучивают их наизусть». При хорошем усвоении принципа образования чисел в натуральном ряду нет необходимости организовывать специальное заучивание результатов этой таблицы, поскольку умение ребенка называть ее результаты связано с хорошим знанием прямой и обратной последовательности чисел в пределах 10.

Использование линейки в качестве наглядной опоры для запоминания последовательности чисел, а также для усвоения способа нахождения числа последующего и предыдущего создает хорошие условия для *интериоризации* (усвоения образа во внутреннем плане, формирования наглядно представимой мысленной модели ряда натуральных чисел) способа нахождения результатов присчитывания и отсчитывания для детей с ведущим наглядно-образным мышлением.

Для детей с ведущим кинестезическим восприятием и ведущим кинестезическим типом памяти (т. е. требующим обязательной поддержки словесной информации мышечным усилием, двигательным действием) следует не только допускать, но и *поощрять* использование пальцевого счета при изучении всех вычислительных приемов первого десятка. Естественно, этот вариант внешнего подкрепления вычислительной деятельности является более медленным, многим учителям он кажется недопустимым для школьников, а потому старательно искореняется уже при обучении вычислениям в пределах первого десятка. В качестве аргумента защиты использования этого

способа подкрепления вычислительной деятельности для детей с ведущим кинестезическим типом можно привести многочисленные исследования психологов последних десятилетий, подтверждающие, что при исключении двигательных действий у этих детей и при ориентации на заучивание результатов без подкрепления предметной деятельностью усвоение происходит на формальном уровне, по принципу зазубривания без понимания, а в дальнейшем это крайне осложняет формирование вычислительной деятельности с числами в пределах сотни, тысячи и т. п.

Прибавление и вычитание по частям

Следующую группу вычислительных приемов в пределах первого десятка составляют случаи вида: $a \pm 2$, $a \pm 3$, $a \pm 4$, результаты которых могут быть найдены с помощью последовательного присчитывания или отсчитывания:

$2 + 3 = 2 + 1 + 1 + 1$; $7 - 4 = 7 - 1 - 1 - 1 - 1$

или с помощью прибавления и вычитания по частям:

$2 + 3 = 2 + 1 + 2$; $7 - 4 = 7 - 2 - 2$

Подготовительным приемом к обучению ребенка этим случаям вычислений является прием вида: $a + 1 + 1$ и $a - 1 - 1$, в основе которого лежит *последовательное* отсчитывание по 1 или присчитывание по 1.

Знакомство с этим приемом является очень важным. *Во-первых*, осваивая данный вычислительный прием, ребенок впервые встречается с выражением, содержащим более одного знака действий. *Во-вторых*, при выполнении вычислений впервые в неявном виде (т. е. без сообщения ребенку самого правила) используется правило порядка выполнения действий одной ступени без скобок:

При выполнении действий одной ступени без скобок, действия выполняются по порядку слева направо.

В-третьих, при выполнении данного вида вычислений не нужны специальные вычислительные действия какого-то нового вида, а требуется лишь последовательное применение принципа образования чисел в натуральном ряду.

Например:

Вычислите 6 + 1 + 1.

(Прибавляя к 6 единицу, получаем число следующее — это 7; прибавляя к 7 единицу, получаем следующее число — это 8. Значит, 6 + 1 + 1 = 8.)

В качестве наглядной модели удобно использовать линейку — прибавляя единицу дважды, ребенок делает вправо от числа 6 два «шага», получая ответ наглядно (на первых порах эти «шаги» полезно прослеживать пальцем).

При использовании пальцевого счета, ребенок отгибает (или загибает) последовательно два пальца, присчитывая их к 6 пальцам, или, в крайнем случае, сосчитывая заново все количество отогнутых (загнутых) пальцев.

Аналогично ребенок действует в случае вычислений вида $a - 1 - 1$. В этом случае используется понимание образования числа *предыдущего* к данному и знание последовательности чисел в обратном порядке.

Вычислительный прием $a \pm 2$ является случаем, объединяющим последовательное присчитывание (отсчитывание) двух единиц к числу, производимое в предыдущем случае.

При прибавлении к любому числу двух, ребенок заменяет его на сумму двух единиц и последовательно присчитывает (отсчитывает) их от числа.

Например: $3 + 2 = 3 + 1 + 1$

1 1 4

5

В качестве наглядной модели удобно использовать линейку — прибавляя два, ребенок делает вправо от числа два «шага», получая ответ наглядно.

В качестве наглядной модели удобно также использовать счеты, поскольку прибавляя или вычитая 2, ребенок чаще всего перебрасывает дважды по одной косточке, фактически моделируя приведенную выше схему приема. Если ребенок сначала сосчитывает на счетах две косточки, а потом перебрасывает их, он, как правило, затем при нахождении результата сосчитывает заново все количество оставшихся (полученных) косточек. Этот способ выполнения вычислений показывает, что ребенок понимает смысл действий, но приемами присчитывания и отсчитывания по каким-то причинам не пользуется. В этом случае следует заменить счеты на линейку.

При использовании пальцевого счета, ребенок отгибает (или загибает два пальца, присчитывая (или отсчитывая) два или сосчитывая весь результат.

Методически ставится цель довести умение ребенка прибавлять и отнимать 2 до состояния навыка, т. е. до запоминания результатов прибавления и вычитания двух в пределах 10 *наизусть*:

$1 + 2 = 3$	$2 + 2 = 4$	$3 + 2 = 5$	$4 + 2 = 6$
$5 + 2 = 7$	$6 + 2 = 8$	$7 + 2 = 9$	$8 + 2 = 10$
$3 - 2 = 1$	$4 - 2 = 2$	$5 - 2 = 3$	$6 - 2 = 4$
$7 - 2 = 5$	$8 - 2 = 6$	$9 - 2 = 7$	$10 - 2 = 8$

Таблица сложения и вычитания двух содержит самое большое количество случаев, а поскольку она изучается первой, многие дети испытывают большие трудности, пытаясь заучить этот объем.

Если ребенок хорошо владеет приемами присчитывания и отсчитывания, он всегда может вычислить забытый случай из таблицы, используя осознанную вычислительную деятельность. Для многих детей с проблемами процессов запоминания (это характерно для многих часто болеющих детей, что обусловлено действием некоторых медицинских препаратов, для детей с синдромом дефицита внимания, с гиперподвижностью, для детей с задержкой развития и т. д.) формирование осознанной вычислительной деятельности — это единственно возможный путь избежать мучительного и бессмысленного зазубривания.

Если при изучении чисел в пределах 10 (в разделе «нумерация в пределах 10»), ребенок выучил наизусть состав однозначных чисел и легко его воспроизводит, то проще всего для запоминания таблицы сложения и вычитания связать *соответствующие случаи с составом однозначных чисел*:

3 значит $3 = 1 + 2$ тогда $1 + 2 = 3$, а $3 - 2 = 1$

1 2

7 значит $7 = 5 + 2$ тогда $5 + 2 = 7$, а $7 - 2 = 5$

5 2

При опоре на состав числа имеет смысл сразу ориентировать ребенка на составление и запоминание тройки взаимосвязанных равенств:

8 $6 + 2 = 8$, $8 - 2 = 6$, $8 - 6 = 2$

6 2

Умение прибавлять и вычитать 2 является опорным умением для формирования дальнейшей вычислительной деятельности.

Вычислительные приемы $a \pm 3$ и $a \pm 4$ могут выполняться последовательным присчитыванием или отсчитыванием по 1:

$8 - 4 = 8 - 1 - 1 - 1 - 1$; $6 + 3 = 6 + 1 + 1 + 1$

В этом случае используется ссылка на понятие числа предыдущего и последующего. Может быть использована линейка, по которой ребенок делает нужное количество «шагов» вправо или влево от заданного числа, или пальцевый счет. Методически этот способ считается менее совершенным, чем прибавление и вычитание по частям для данных вычислительных приемов.

Прибавление (или вычитание) *по частям* предполагает раскладывание второго слагаемого (или вычитаемого) на удобные для выполнения вычислений составные части, и последовательное их прибавление (или вычитание):

Например:

$8 - 3 = 8 - 2 - 1$ $5 + 4 = 5 + 2 + 2$

2 1 6 5   2 2 7 9

Приведенные примеры показывают, что с приемами $a \pm 3$ и $a \pm 4$ легче справиться тем детям, которые помнят наизусть результаты случаев прибавления и вычитания двух, или могут достаточно быстро найти (вычислить) эти результаты.

Именно для освоения вычислений вида $a \pm 3$ и $a \pm 4$ предыдущую таблицу для случаев $a \pm 2$ учитель требовал заучивать наизусть.

После освоения приема вычислений по частям, составляют таблицы для случаев $a \pm 3$:

$1 + 3 = 4$	$2 + 3 = 5$	$3 + 3 = 6$	
$4 + 3 = 7$	$5 + 3 = 8$	$6 + 3 = 9$	$7 + 3 = 10$
$4 - 3 = 1$	$5 - 3 = 2$	$6 - 3 = 3$	
$7 - 3 = 4$	$8 - 3 = 5$	$9 - 3 = 6$	$10 - 3 = 7$

а также $a \pm 4$:

$1 + 4 = 5$	$2 + 4 = 6$	$3 + 4 = 7$
$4 + 4 = 8$	$5 + 4 = 9$	$6 + 4 = 10$
$5 - 4 = 1$	$6 - 4 = 2$	$7 - 4 = 3$
$8 - 4 = 4$	$9 - 4 = 5$	$10 - 4 = 6$

Первая таблица содержит 14 случаев, вторая таблица содержит 12 случаев. В сумме с 16 случаями таблицы *прибавления двух* получается 42 случая. Неудивительно, что очень многие дети на этапе изучения табличного сложения и вычитания в пределах 10 испытывают массу трудностей, в связи с необходимостью в достаточно короткие сроки заучить наизусть большой объем формализованного материала. При этом единственным мотивом изучения этого объема наизусть для ребенка выступает требование учителя. Все задания на решение примеров в этот период (а также на решение задач, на сравнение выражений и т. п.) требуют воспроизведения наизусть табличных случаев сложения и вычитания *вразбивку*. Поэтому, если ребенок учил таблицу наизусть подряд (например, по возрастанию результатов и т. п.), то даже легко отвечая ее результаты подряд, он может ошибаться при воспроизведении таблицы

вразбивку, и тем более при необходимости воспроизводить вразбивку случаи из разных таблиц.

В связи с этим при запоминании таблиц для случаев вида $a \pm 3$ и $a \pm 4$ многие учебники математики для 1 класса ориентируют ребенка на использование состава числа как основы для запоминания таблиц сложения и вычитания. При ориентации на состав числа удобнее делать акцент не на составление и заучивание таблицы каждого случая целиком, а на составление и запоминание взаимосвязанных троек:

9          $9 = 5 + 4$, значит, $5 + 4 = 9$; $9 - 4 = 5$; $9 - 5 = 4$

5 4

В качестве внешней опоры при вычислении случаев вида $a \pm 3$ и $a \pm 4$ может быть использована линейка, счеты, пальцевый счет. Для ускорения вычислений в домашних условиях (при выполнении домашней работы) часто используют треугольную таблицу, помогающую найти результат суммирования любых пар чисел в пределах 10. Такая таблица может быть повешена над столом ребенка. Постоянное обращение к ней при выполнении домашних заданий более полезно, чем использование калькулятора, поскольку зрительный образ соответствующих случаев постепенно запоминается ребенком, пополняя тем самым количество запомненных наизусть случаев табличного сложения и вычитания.

Таблица сложения и вычитания:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	
3	4	5	6	7	8	9	10		
4	5	6	7	8	9	10			
5	6	7	8	9	10				
6	7	8	9	10					
7	8	9	10						
8	9	10							
9	10								

$4 + 2 = 6$
$6 - 2 = 4$
$6 - 4 = 2$

Перестановка слагаемых

Правило перестановки слагаемых:

От перестановки слагаемых сумма не изменяется.

Свойство перестановки слагаемых (переместительное свойство сложения) используется в 1 классе при знакомстве с вычислительными приемами вида $a + 5$, $a + 6$, $a + 7$, $a + 8$ и $a + 9$.

В этих случаях второе слагаемое больше первого (поскольку рассматриваются случаи сложения в пределах 10). Применение при вычислениях перестановки слагаемых позволяет свести все эти случаи к ранее изученным.

Например: $2 + 8 = 8 + 2 = 10$.

Перестановка слагаемых может рассматриваться как *прием вычислений.*

Этот вычислительный прием облегчает вычислительную деятельность и является *общим приемом вычислений* при сложении любых чисел.

Например: $12 + 346 = 346 + 12 = 358$

Прием перестановки слагаемых позволяет составить **краткую таблицу сложения в пределах 10**:

2 + 2 = 4		
3 + 2 = 5		
4 + 2 = 6	3 + 3 = 6	
5 + 2 = 7	4 + 3 = 7	
6 + 2 = 8	5 + 3 = 8	4 + 4 = 8
7 + 2 = 9	6 + 3 = 9	5 + 4 = 9
8 + 2 = 10	7 + 3 = 10	6 + 4 = 10

С учетом свойства перестановки слагаемых данная таблица включает *все* случаи сложения в пределах 10. Таблица содержит 15 случаев и, безусловно, ее заучивание для ребенка намного более легкая задача, чем заучивание полной таблицы.

Данная таблица появляется значительно позднее, чем начинается заучивание таблиц (для случаев $a \pm 1$, $a \pm 2$, $a \pm 3$, $a \pm 4$) сложения и вычитания в пределах 10, поэтому не выполняет своей облегчающей вычисления задачи. На данный момент дети уже заучивали 42 случая предыдущих таблиц, и поэтому все случаи часто смешиваются. В связи с этим, некоторые альтернативные учебники (например, учебник Н.Б. Истоминой) сначала знакомят детей со сложением, его свойствами и таблицей сложения, а после того, как эти таблицы ребенком усваиваются, знакомят первоклассника с действием вычитания и таблицу вычитания рассматривают отдельно от таблицы сложения.

Случаи вида «вычесть 5, 6, 7, 8, 9», символически обозначаемые в учебниках □ − 5, □ − 6, □ − 7, □ − 8, □ − 9, являются вычислительными приемами, основанными на составе однозначных чисел и взаимосвязи между суммой и слагаемыми.

С правилом взаимосвязи суммы и слагаемых дети знакомились ранее (см. выше). Состав чисел изучался в разделе «Нумерация в пределах 10».

Используя эти знания, дети осваивают прием вычитания чисел больше 5:

$$\underset{3\ \ 5}{8} - 5 = 3 \qquad \underset{6\ \ 1}{7} - 6 = 1 \qquad \underset{7\ \ 3}{10} - 7 = 3$$

(8 — это 3 и 5; 8 без 5 — это 3.)

Сложение и вычитание с нулем

Основное свойство нуля:

Прибавление и вычитание нуля результата не меняет.

В общем виде это свойство можно записать так: $a \pm 0 = a$ и $0 \pm a = a$.

Порядок действий в выражениях без скобок

Порядок действий в выражениях без скобок *в первом классе* определяется следующим образом:

В выражении, содержащем сложение и вычитание, или несколько знаков сложения, или несколько знаков вычитания, действия выполняются по порядку слева направо.

Это правило не содержится в учебнике, учитель знакомит с ним детей в процессе решения соответствующих примеров.

Например:

Вычисли:
$3 + 6 - 7 = \ldots$; $8 - 2 + 4 = \ldots$; $7 - 3 - 2 = \ldots$; $5 + 2 + 3 = \ldots$

При решении этих примеров детям в 1 классе *не разрешается* пользоваться правилом группировки слагаемых, являющимся приемом рациональных вычислений.

Это правило появляется только во втором классе при изучении приемов вычислений в пределах 100, где детям сообщается:

Два соседних слагаемых можно заменить их суммой.

Такой методический подход объясняется тем, что раннее знакомство с этим приемом может быть воспринято ребенком как общее свойство для случаев сложения нескольких чисел, а также вычитания нескольких чисел.

В практике иногда наблюдается, что ребенок, полагающий, что это правило общее для сложения и вычитания, выполняет вычитание нескольких чисел следующим образом:

$$8 - 3 - 2 = 7, \text{ так как } 3 - 2 = 1, \text{ а } 8 - 1 = 7,$$

что, естественно, *неправильно.*

Поскольку в большинстве учебников для начальных классов действия сложения и вычитания рассматриваются одновременно, для избежания подобных ошибок при выполнении действий правило группировки слагаемых в первом классе не используется. В этом случае правило порядка выполнения действий в выражениях без скобок в первом классе является *единым.*

Группировка слагаемых

В некоторых альтернативных учебниках (например, в учебнике Н.Б. Истоминой) правило группировки слагаемых *в неявном виде* (без сообщения его учащимся) используется уже при изучении вычислительных приемов первого десятка. Это объясняется тем, что дети знакомятся сначала только со сложением и потому рассматривают все правила только относительно сложения (перестановка слагаемых, группировка слагаемых).

Например:

Можно ли утверждать, что значение выражений в каждом столбике одинаковы?

1 + 2 + 2 + 1	2 + 1 + 1 + 1
1 + 4 + 1	2 + 2 + 1
1 + 2 + 3	2 + 1 + 2
1 + 5	2 + 3

Подразумевается, что при объяснении равенства значений выражений в каждом столбике ребенок суммирует слагаемые, начиная со второго, т. е. такой прием считается допустимым.

(Сумма чисел 2, 2 и 1 равна 5, сумма 4 и 1 также равна 5, сумма 2 и 3 также равна 5. Во всех случаях первое слагаемое равно 1 и к нему прибавляются одинаковые суммы, значит результаты равны.)

3. Вычислительные приемы для чисел второго десятка

Разрядные случаи сложения и вычитания

Разрядными случаями сложения и вычитания во втором десятке считаются случаи вида:

10 + 2   2 + 10   12 − 2   12 − 10

При нахождении значения данных выражений ссылаются на разрядный (десятичный) состав чисел второго десятка.

Например:

12 значит,   12 − 10 = 2   10 + 2 = 12
10 2   12 − 2 = 10   2 + 10 = 12

Комплексные примеры на применение знания разрядного состава и вычислительных приемов первого десятка:

Вычисли: 2 + 8 + 3 = ...

10

13

Способ вычислений:

Действия выполняются последовательно слева направо. 2 + 8 = = 8 + 2 = 10 по свойству перестановки слагаемых. 10 + 3 = 13

Вычисли: 17 − 7 − 1 = ...

Способ вычислений:

Действия выполняются последовательно слева направо. Число 17 состоит из 10 и 7, значит 17 − 7 = 10. Вычитая из 10 один, получаем число предыдущее — это 9.

Переход через десяток

Наиболее сложным для большинства детей является прием сложения и вычитания *с переходом через десяток.* Это случаи вида: 8 + 5, 13 − 7.

Сложение с переходом через десяток

Схема приема: 8 + 5 = 10 + 3 = 13

2 3

10

13

Алгоритм приема (правило вычислений) содержит *три последовательно выполняемых вычислительных действия*:

1) второе слагаемое раскладывается на составные части таким образом, чтобы одна из частей в сумме с первым слагаемым составила число 10;

2) первое слагаемое складывается с частью второго слагаемого, образуя промежуточное число 10;

3) к промежуточному числу 10 прибавляется оставшаяся часть первого слагаемого (во всех случаях здесь имеет место разрядное суммирование) для получения окончательного ответа.

Для овладения приемом ребенок должен: 1) запомнить последовательность действий; 2) уметь быстро подбирать подходящий случай разложения любого однозначного числа на составные части (знать состав однозначных чисел); 3) уметь дополнять любое однозначное число до 10 (знать состав числа 10); 4) уметь выполнять разрядное сложение в пределах второго десятка.

Многие дети испытывают большие трудности при освоении этого сложносоставленного приема вычислений. В качестве внешней опоры можно использовать линейку. Ориентируясь по линейке, ребенок отмечает первое слагаемое, а затем делает вправо от него нужное количество «шагов» (в соответствии со значением второго слагаемого). Результат последнего «шага» совпадает со значением суммы. Аналогично можно использовать счеты.

Некоторые дети (ведущие кинестетики, о которых говорилось выше) с успехом продолжают использовать пальцевый счет. В этом случае они присчитывают к первому слагаемому единицы, пока хватает пальцев (до 10), а затем, мысленно запоминая полученный десяток, продолжают присчитывать оставшуюся часть второго слагаемого уже к десятку: 8 да еще два пальца — 9, 10. Переход на другую руку — еще три пальца — 11, 12, 13. Фактически этот способ счета моделирует присчитывание по одному, как и использование линейки. При прибавлении чисел больше 5 этот способ несколько тормозит работу ребенка, но по крайней мере дает ему возможность самостоятельно получить результат действия.

В настоящее время на первый план в педагогике начального обучения выходят требования организации личностно-ориентированного обучения, это означает, что в обучающем процессе необходимо учитывать своеобразие и индивидуальность способа мышления и ведущего способа познания каждого ребенка. Дети с превалирующей функцией аналитического мышления легко осваивают этот прием, требующий пошагового выполнения трехступенчатого действия в уме. Дети с превалирующей функцией синтетического мышления осваивают прием с большими трудностями. В некоторых альтернативных учебниках математики для начальных классов

(в первых изданиях стабильного учебника 1968 г., в современных учебниках Н.Б. Истоминой) предлагается знакомить детей с этим приемом значительно позже — после того, как они освоят всю нумерацию в пределах 100 и научатся выполнять все виды вычислений без перехода через десяток, в том числе и вида 64 + 12.

Методически ставится задача довести умение ребенка выполнять вычисления во втором десятке до автоматизма. Это означает, что учитель, как правило, ставит задачу — выучить результаты всех случаев сложения и вычитания в пределах второго десятка наизусть. С этой целью в учебнике на каждом уроке этой темы (начало второго класса) дается по три случая для заучивания наизусть. Например: 9 + 2 = 11, 9 + 3 = 12, 8 + 3 = 11.

Всего случаев, требующих запоминания 20. Во всех этих случаях второе слагаемое меньше, чем первое (в случае, когда второе слагаемое больше первого, можно применить перестановку слагаемых).

9 + 2 = 11	9 + 3 = 12	8 + 3 = 11	
7 + 4 = 11	8 + 4 = 12	9 + 4 = 13	
9 + 5 = 14	8 + 5 = 13	7 + 5 = 12	6 + 5 = 11
9 + 6 = 15	8 + 6 = 14	7 + 6 = 13	6 + 6 = 12
9 + 7 = 16	8 + 7 = 15	7 + 7 = 14	
8 + 8 = 16	9 + 8 = 17	9 + 9 = 18	

В качестве приема, помогающего некоторым детям быстрее запомнить результаты этих вычислений, можно использовать *прием опоры на сумму одинаковых слагаемых*, поскольку сумма одинаковых слагаемых запоминается детьми значительно легче, чем сумма разных слагаемых.

Например, легко запоминается сумма 5 + 5 = 10. Рассматривая любую сумму, в которой одно из слагаемых — число 5 и зная *свойство суммы:*

При увеличении любого слагаемого на несколько единиц сумма увеличивается на столько же единиц.

Можно получить значение соответствующего выражения:

7 + 5 = 5 + 5 + 2 = 10 + 2 = 12
5 2

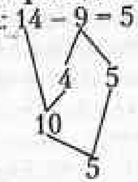
Дети легко запоминают суммы:

6 + 6 = 12   7 + 7 = 14
8 + 8 = 16   9 + 9 = 18

Используя их как «базовые», ребенок может получить нужный результат присчитывая соответствующее количество единиц к сумме или отсчитывая: 8 + 9 = 8 + 8 + 1 = 16 + 1 = 17.

Вычитание с переходом через десяток

Схема приема:



Алгоритм приема (правило вычислений) содержит *три последовательно выполняемых вычислительных действия*:

1) вычитаемое раскладывается на составные части таким образом, чтобы одна из частей при вычитании из уменьшаемого составила число 10;

2) из уменьшаемого вычитается часть вычитаемого, образуя промежуточное число 10;

3) из промежуточного числа 10 вычитается оставшаяся часть вычитаемого для получения окончательного ответа.

Для овладения приемом ребенок должен:

1) запомнить последовательность действий;

2) уметь быстро подбирать подходящий случай разложения любого однозначного числа на составные части (знать состав однозначных чисел);

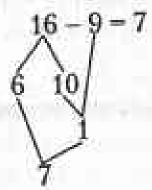
3) уметь выполнять разрядное вычитание в пределах второго десятка;

4) уметь вычитать любое однозначное число из 10 (знать состав числа 10).

Многие дети испытывают большие трудности при освоении этого сложносоставленного приема вычислений. В качестве внешней опоры можно использовать линейку. Ориентируясь по ней, ребенок отмечает уменьшаемое, а затем делает *влево* от него нужное количество «шагов» (в соответствии со значением вычитаемого). Результат последнего «шага» совпадает со значением разности. Аналогично можно использовать счеты.

Некоторые дети (кинестетики) с успехом продолжают использовать пальцевый счет и при выполнении вычитания во втором десятке. В этом случае они, имея в виду десяток «в уме», в случае нехватки пальцев, занимают «пятки́» и продолжают отсчитывать, пока не отсчитают нужное количество пальцев (в соответствии со значением вычитаемого).

Другая схема выполнения вычитания с переходом через десяток



Алгоритм приема (правило вычислений) и в этом случае содержит *три последовательно выполняемых вычислительных действия*:

1) уменьшаемое раскладывается на разрядные составляющие;

2) от десятка уменьшаемого отнимается вычитаемое, которое всегда меньше 10, образуя промежуточное число;

3) промежуточное число *складывается* с оставшейся частью уменьшаемого для получения окончательного ответа.

Для овладения приемом ребенок должен:

1) запомнить последовательность действий;

2) уметь раскладывать числа второго десятка на разрядные составляющие;

3) уметь выполнять вычитание в пределах 10;

4) уметь складывать однозначные числа в пределах 10.

Перечень действий содержит такое же количество шагов, как и в случае первой схемы, но многим детям использовать этот способ легче, поскольку он не требует мысленного подбора подходящего разложения на составные части вычитаемого. Логика действий здесь последовательная, больше соответствует синтетическому стилю мыслительной деятельности, поэтому часть детей осваивает этот способ значительно легче, чем первый.

В целом таблица вычитания с переходом через десяток содержит 36 случаев, которые предлагаются детям для запоминания наизусть. Запоминание такого большого количества случаев для многих детей представляет большую проблему.

Дети, успешно использовавшие прием опоры на значения сумм одинаковых слагаемых, могут использовать этот же прием при выполнении вычитания.

Например:

$$16 - 7 = (8 + 8) - 7 = 1 + 8 = 9$$

(16 это два раза по 8. Из одной восьмерки заберем 7, останется 1. Да еще оставалась одна восьмерка, вместе — 9.)

Освоение способов вычислений с переходом через десяток составляет базу для дальнейшего освоения устной вычислительной деятельности в пределах 100 и письменных вычислений.

Порядок действий в выражениях со скобками

Вторым правилом, определяющим порядок выполнения действий в выражениях, является *правило выполнения действий в выражениях со скобками*:

Действие, записанное в скобках, выполняется первым.

С этим правилом дети знакомятся во 2 классе.

Правило сообщается детям в качестве *непреложного факта* и путем сравнения разных вариантов значений выражений, показывается, что нарушение этой установки ведет к получению неправильных результатов.

Например:

(10 – 6) + 3 = 7   10 – (6 + 3) = 1

Никаких нарушений этого правила во втором классе не допускается.

С математической точки зрения скобки в первом приведенном выше примере не играют никакой роли и могут быть опущены, поскольку правило выполнения действий в выражениях, содержащих более одного арифметического действия требует, чтобы первым выполнялось вычитание, а вторым — сложение. Во втором выражении наличие скобок меняет порядок действий, оговоренный ранее, и требует первым выполнить сложение, т. е. в этом случае скобки имеют значение.

Чтобы не путать ребенка разнородными указаниями, учитель обычно настаивает на приучении детей к жесткому соблюдению этого правила во всех случаях, чтобы создать стереотип восприятия скобок. Так, для выполнения вычислений вида 9 + (2 + 5) также жестко требуется выполнение действия в скобках первым, хотя технически было бы проще использовать группировку слагаемых, тем более, что математически порядок действий при последовательном сложении безразличен.

Установка на приоритетность выполнения действия в скобках сохраняется на весь период обучения ребенка в начальной школе.

Родители, помня, что в математике при выполнении алгебраических преобразований в старших классах используют правила раскрытия скобок, часто пытаются учить этим правилам младших школьников, поскольку эти правила существенно упрощают вычисления во многих случаях. Методически это *нецелесообразное* действие, поскольку в третьем и четвертом классе дети изучают еще несколько правил порядка выполнения действий и вычислительных операций, основанных на приоритетности выполнения действий в скобках.

Два разнородных указания на способ действий при наличии скобок в выражениях может запутать ребенка. При этом само понятие «смена знака» при раскрытии скобок подразумевает, что ребенок знает о существовании чисел разных знаков (положительных и отрицательных), а также понимает смысл операции смены знака.

Поскольку в начальных классах дети знакомятся только с натуральными числами, все эти операции не могут быть объяснены без знакомства с отрицательными числами, их свойствами и действиями с ними. А это уже программа 5–6 классов школы.

Лекция 8.

Вычислительные приемы сложения и вычитания для чисел первой сотни

1. Используемые математические законы и правила.
2. Способы устных вычислений.
3. Способы письменных вычислений (в столбик).

1. Используемые математические законы и правила

Правило группировки слагаемых

Правило группировки слагаемых играет роль вычислительного приема, позволяющего рационализировать вычислительную деятельность. Это правило может быть использовано при выполнении действий в выражениях, содержащих двух слагаемых. При этом обязательно следует отметить, что это правило касается *только* выражений, содержащих действие сложения. Правило изучается во 2 классе.

Правило группировки слагаемых:

При сложении трех и более чисел соседние слагаемые можно заменять их суммой.

Вычисли удобным способом:

3 + 6 + 4 = ...   7 + 30 + 60 = ...

90 – 70 + 5 = ...   30 + 8 + 30 = ...

(Легче сначала сложить 6 и 4 — это 10, затем прибавить к 10 число 3, получится 13.

Легче сначала сложить 30 и 60 — это 90, затем прибавить к сумме 7 — это 97.

Для случая 90 — 70 + 5 правило группировки слагаемых неприменимо, поскольку это выражение содержит сложение и вычитание. В этом выражении действия надо выполнять по порядку слева направо.

Для случая 30 + 8 + 30 легче сначала сложить 30 и 30 — это 60, а затем прибавить к сумме 8 — это 68.)

Правило сложения и вычитания разрядных единиц

Следствием правила группировки слагаемых выступают два следующих правила, определяющих *способ сложения и вычитания разрядных единиц:*

Единицы складывают с единицами.
Десятки складывают с десятками.

Например, для случая 56 + 3 = 50 + (6 + 3) = 59

50 6

удобно единицы складывать с единицами;
для случая 60 + 35 = (60 + 30) + 5 = 95

30 5

удобно десятки складывать с десятками.

В обоих случаях одно из слагаемых представлено в виде суммы разрядных слагаемых и выполняется *прибавление числа к сумме разрядных слагаемых*. В более ранних вариантах учебников математики для начальных классов *правило прибавления числа к сумме и правило прибавления суммы к числу* изучалось в явном виде (правило сообщалось детям и заучивалось как основа вычислительного приема).

Первое правило звучало так:

> ***Чтобы прибавить число к сумме, можно прибавить его к любому слагаемому, а затем к полученной сумме прибавить оставшееся слагаемое.***

Второе правило формулировалось так:

> ***Чтобы прибавить сумму к числу, можно прибавлять к этому числу любое слагаемое суммы, а затем к полученному результату прибавить оставшееся слагаемое.***

Правила были сочтены громоздкими и их заменили формулировками, сориентированными на поразрядное сложение. Однако для случаев вида 26 + 7 или 45 + 16 приходится использовать именно эти правила, а не правила поразрядного сложения.

Аналогичное упрощенное правило вводится для вычитания:

> ***Десятки вычитают из десятков.***
> ***Единицы вычитают из единиц.***

Например, для случая 29 – 3 = 20 + (9 – 3) = 26

20 9

удобно единицы вычитать из единиц;
для случая 56 – 30 = (50 – 30) + 6 = 26

50 6

удобно десятки вычитать из десятков.

Однако для случаев вида 30 – 6, 45 – 7, 50 – 24 эти правила приходится неявно заменять на общие *правила вычитания числа из суммы и вычитания суммы из числа*. Сами правила уже не рассматриваются в последней редакции учебника математики, но использовать их при вычислениях приходится. В связи с этим большая часть вычислительных приемов первой сотни предлагается детям в виде разбора образцов действий, а затем закрепления каждого способа действия на аналогичных примерах. С психологической точки зрения такой путь обучения вычислениям не ведет к становлению обобщенных приемов вычислительной деятельности.

> ***Правило вычитания числа из суммы: чтобы вычесть число из суммы, можно вычесть это число из любого слагаемого, а затем к результату прибавить оставшееся слагаемое.***

Например:
30 – 6 = 20 + (10 – 6) = 24

20 + 10

В данном случае уменьшаемое 30 рассматривается как сумма 20 и 10.

> ***Правило вычитания суммы из числа: чтобы вычесть сумму из числа, можно вычесть из этого числа любое слагаемое, а затем из полученного результата вычесть другое слагаемое.***

Например: 45 – 7 = (45 – 5) – 2 = 40 – 2 = 38

5 + 2

В данном случае вычитаемое 7 рассматривается как сумма 5 и 2.

2. Способы устных вычислений

При обучении устным вычислительным действиям ребенок осваивает в течение первого и второго года обучения в четырехлетней начальной школе целый ряд вычислительных приемов, из которых 12 относятся к вычислениям в пределах 100.

Вопрос о значимости формирования устных вычислительных навыков на сегодняшний день является весьма дискуссионным в методическом плане. Повсеместное использование калькуляторов ставит под сомнение необходимость «жесткой» отработки этих умений. На сегодняшний день никто не связывает хорошее владение арифметическими вычислениями с математическими способностями и математической одаренностью. Однако внимание к устным арифметическим вычислениям является традиционным для русской методической школы. В связи с этим более чем значительная часть всех существующих на сегодня учебников математики для начальных классов отведена формированию устных вычислительных умений и навыков.

Приведем традиционный порядок изучения вычислительных приемов в учебнике по математике авторов М.И. Моро, М.А. Бантовой, Г.В. Бельтюковой и др., поскольку данная система на сегодня является наиболее целостной и методически разработанной.

Основные типы вычислительных приемов, которые ребенок должен освоить для успешного формирования вычислительной деятельности в пределах 100:

1) 60 + 20; 50 – 30 — сложение и вычитание целыми десятками;

2) 34 + 20; 34 + 2 — прибавление единиц или десятков к числу без перехода через десяток;

3) 26 + 4 — прибавление единиц к числу с получением в результате целого десятка, что приводит к увеличению разрядных единиц на одну в разряде десятков;

4) 48 – 30; 48 – 3 — вычитание единиц или десятков из числа без перехода через десяток;

5) 30 – 6 — вычитание единиц из целых десятков с заемом одного десятка;

6) 46 + 5 — прибавление единиц к числу с переходом через десяток;

7) 42 – 5 — вычитание единиц из числа с переходом через десяток;

8) 40 +16; 45 + 23 — сложение двузначных чисел без перехода через десяток;

9) 40 – 16 — вычитание двузначного числа из целых десятков с заемом десятков;

10) 45 – 12 — вычитание двузначных чисел без перехода через десяток;

11) 37 + 48 — сложение двузначных чисел с переходом через десяток;

12) 37 + 53 — сложение двузначных чисел с получением в результате целых десятков.

Методически все вычисления в пределах 100 считаются устными, что оговорено в учебном пособии для учителей начальных классов Бантовой М.А., Бельтюковой Г.В. «Методика преподавания математики в начальных классах»: «В методике различают устные и письменные приемы вычисления. К устным относятся все приемы для случаев вычислений в пределах 100, а также сводящиеся к ним приемы вычислений для случаев за пределами 100. К письменным относятся приемы для всех других случаев вычислений над числами, большими 100». (С. 163.)

На самом деле, уже при знакомстве со случаями вида 45 + 23 (прием 8), учитель знакомит детей со способами записи вычислительных действий «в столбик» и приемом поразрядного сложения, применяемым при письменных вычислениях.

Сначала предлагается устный способ вычислений:

45 + 23 = ...

20 3

(45 + 20) + 3 = 68

Затем отмечается, что удобно записать этот пример столбиком:

$$\begin{array}{r} +\,45 \\ 23 \\ \hline 68 \end{array}$$

Далее приводятся подробные объяснения приема вычислений:

1. Пишу десятки под десятками, а единицы под единицами.
2. Складываю единицы: 5 + 3 = 8.
Пишу 8 под единицами.
3. Складываю десятки: 4 + 2 = 6.
Пишу 6 под десятками.
4. Читаю ответ: сумма равна 68.

Главным отличием письменных вычислений от устных является порядок складывания (или вычитания) разрядных единиц. При устных вычислениях всегда начинают со старших разрядов (в данном случае — с разряда десятков) и выполняют действие, двигаясь слева направо. При письменных вычислениях всегда начинают с разряда единиц и выполняют действие, двигаясь справа налево.

Методическое обоснование знакомства детей со способами письменных вычислений при формировании вычислительной деятельности в пределах 100:

1. Многие дети с большим трудом осваивают устные вычислительные действия с двузначными числами. Письменный прием вычислений облегчает им вычислительную деятельность.

2. Полноценное освоение устной вычислительной деятельности требует от ребенка свободного владения результатами табличных вычислений в пределах 10 и 20, свободного владения разрядным составом чисел, десятичным составом чисел, умением гибко и свободно применять разнообразные вычислительные действия, выбирая способ вычислений в каждом случае. Далеко не все дети могут это делать. Письменный способ вычислений требует более простых

вычислительных действий, выполняемых по единому жесткому правилу (называемому «алгоритмом письменных вычислений»).

3. Знакомство со способами оформления вычислений «в столбик» при изучении вычислений в пределах 100 рассматривается как подготовка к использованию этой вычислительной технологии в дальнейшем (при вычислениях с трехзначными и многозначными числами).

Приведем краткие пояснения к технологии обучения ребенка вычислительным приемам в пределах 100.

Прием 60 + 20; 50 – 30 — сложение и вычитание целыми десятками

Для освоения этого приема ребенок должен хорошо представлять десятичный состав двузначного числа. Рассматривая 60 как 6 десятков и 20 как 2 десятка, 60 + 20 вычисляется как 6 десятков + + 2 десятка. Ответ 8 десятков затем рассматривается как 80 и записывается результат вычислений. Таким образом, действия целыми десятками рассматриваются как действия разрядными единицами, вычисления в этом случае сводятся к табличным вычислениям в пределах 10.

Основные виды заданий, помогающих ребенку освоить данный прием:

1. Вычисли:

40 + 20 = 50 – 30 =
4 дес. + 2 дес. = 5 дес. – 3 дес. =

2. Вычисли:

6 дес. + 1 дес. = 6 дес. – 2 дес. =
5 дес. + 3 дес. = 1 дес. + 6 дес. =
4 дес. – 1 дес. = 8 дес. – 7 дес. =

3. Вычисли:

7 + 2 = 6 – 3 = 5 – 2 =
70 + 20 = 60 – 30 = 50 – 20 =

4. Вставь числа в окошки, чтобы получились верные равенства:

4 + 2 = □ 6 – 4 = □ □ – 10 = 30
40 + 20 = □ 60 – 40 = □ 80 – □ = 10
50 + □ = 90 □ + 60 = 70

5. Какое значение может принимать значок в каждой записи?

* + 3 = 8 6 – ... = 1
* – ? ... – ?
# + 30 = 80 60 – @ = 10
# – ? @ – ?

6. Сравни выражения:

> = <

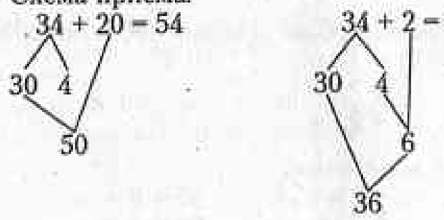
60 – 20 ... 60 – 10 70 + 10 ... 10 + 70
60 + 20 ... 60 + 10 90 – 60 ... 70 – 60

7. Вычисли:

40 + 50 – 70 = ... 50 – 40 + 90 = ... 80 – 70 + 20 = ...

Прием 34 + 20; 34 + 2 — прибавление единиц или десятков к числу без перехода через десяток

Схема приема:



Для освоения этого приема ребенок должен хорошо представлять себе разрядный состав двузначных чисел, уметь выполнять сложение целых десятков, сложение в пределах и разрядное сложение (50 + 4).

Виды заданий, помогающих ребенку освоить данный прием:

1. Найди ответ к данным примерам среди чисел, записанных ниже и покажи его стрелкой:

6 + 3 = ... 5 + 7 = ... 6 + 2 = ...
4 + 2 = ... 3 + 4 = ... 3 + 2 = ...

7 8 6 9 5 12

2. Сравни выражения:

= > <

10 + 2 ... 10 + 20
56 + 30 ... 56 + 3
63 + 30 ... 63 + 3
47 + 20 ... 47 + 2

3. Выполни действия по образцу:

40 = 30 + 10 50 = ... + ...
70 = 60 + 10 30 = ... + ...

4. Найди значение каждой суммы, используя результаты первого примера:

34 + 2 = 46 + 2 = 72 + 2 =
34 + 3 = 46 + 3 = 72 + 3 =
34 + 4 = 46 + 4 = 72 + 4 =

5. Найди значение суммы, используя разрядный состав чисел:

46 + 20 = 72 + 10 =
40 6 70 2

46 + 30 = ... 72 + 20 = ...
46 + 40 = ... 72 + 30 =...

6. Найди значение суммы любым удобным тебе способом:

34 + 20 =... 81 + 10 =...
56 + 30 =... 45 + 30 =...
27 + 50 =... 63 + 20 =...

7. Вычисли значение выражений:

48 − 8 = ... 80 − 1 = ... 30 + 8 = ...
52 − 50 = ... 79 + 1 = ... 60 − 1 = ...

8. Вычисли значение выражений:

37 − 30 + 50 90 − 1 − 80 40 + 6 + 1

9. Догадайся, какие цифры нужно вставить в окошки, чтобы получились верные равенства.

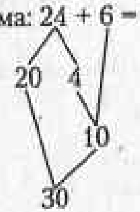
34 + □ = 64 17 + □ = 97 46 + □ = 96
52 + □ = 72 28 + □ = 78 64 + □ = 84

10. Вычисли результаты:

34 + 20 = 28 + 30 = 47 + 2 =
34 + 4 = 45 + 10 = 47 + 20 =
32 + 6 = 15 + 4 = 47 + 50 =

Прием 26 + 4 — прибавление единиц к числу с получением в результате целого десятка, что приводит к увеличению разрядных единиц на одну в разряде десятков

Схема приема: 24 + 6 = 30



Для освоения данного приема ребенок должен знать разрядный состав чисел, уметь складывать в пределах 10 и выполнять прибавление десяти к целым десяткам.

Виды заданий, помогающих ребенку освоить данный прием:

1. Выбери из чисел справа верный ответ к примеру и обведи его:

6 + 4 = (11, 10, 20)
8 + 2 = (9, 10, 11)
7 + 3 = (8, 10)
4 + 6 = (9, 10, 8)
3 + 7 = (7, 10)

2. Вставь числа в окошки:

20 + 10 → 30 40 + □ → 60 □ + 10 → 90

3. Вычисли результаты, используя значение первого выражения в каждом столбике:

48 + 1 = 57 + 2 = 87 − 1 = 16 + 4 =
48 + 2 = 57 + 3 = 87 − 7 = 26 + 4 =
48 + 20 = 57 + 10 = 87 − 10 = 36 + 4 =
48 + 40 = 57 + 30 = 87 − 70 = 46 + 4 =

4. Вставь число в окошко, чтобы равенство стало верным:

17 + □ = 20 27 + □ = 30 37 + 3 = □ 47 + 3 = □

5. Какое значение может принимать буква в каждой записи:

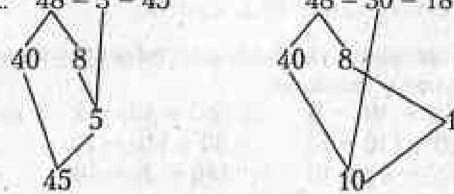
$73 + d = 80$ $76 + z = 80$ # + 6 = 70
d − ? z − ? # − ?

6. Найди ответы каждого примера среди чисел в кружках и соедини их стрелкой:

53 + 7 30 48 + 2 40 21 + 9 70
32 + 8 50 64 + 6 90 85 + 5 60

Прием 48 – 30; 48 – 3 — вычитание единиц или десятков из числа без перехода через десяток

Схема приема: 48 – 3 = 45 48 – 30 = 18



Для освоения данного приема ребенок должен знать разрядный состав чисел, уметь вычитать в пределах 10 и выполнять разрядное сложение (40 + 5).

Виды заданий, помогающих ребенку освоить данный прием:

1. Среди чисел слева найди ответ примера справа и соедини их стрелкой:

3	8 − 3
5	7 − 5
2	9 − 6
6	8 − 4
4	9 − 3

2. Вставь числа в окошки, так чтобы равенства были верными:

18 − 3 = □ 10 − □ = 5
□ − 3 = 7 19 − □ = 13
17 − □ = 12 □ − 6 = 4

3. Найди значение разности:

40 − 30 = ... 50 − 20 = ... 70 − 40 = ...

4. Найди значение разности, используя разрядный состав чисел:

56 − 20 = 36 − 10 = 68 − 40 =
50 6 □ □ □ □

43 − 30 = 97 − 80 = 78 − 30 =
□ □ □ □ □ □

50 − 30 = 67 − 1 = 48 − 3 =
96 − 20 = 67 − 2 = 48 − 4 =
66 − 40 = 67 − 3 = 48 − 5 =
67 − 4 = 48 − 6 =

5. > = < Сравнивай подчеркнутые цифры — это поможет тебе выполнить задание.

$5\underline{6} - 30$ ... $5\underline{9} - 30$
$42 + \underline{7}$ ... $42 + \underline{8}$
$78 - \underline{5}$ ... $78 - \underline{7}$
$2\underline{6} + 30$ ... $2\underline{5} + 30$

6. Подчеркни удобный для тебя способ вычислений в каждом случае и вычисли:

а) (20 + 10) − 6 б) (40 + 10) − 2 в) (80 + 10) − 7
20 + (10 − 6) 40 + (10 − 2) 80 + (10 − 7)
(20 − 6) + 10 (40 − 2) + 10 (80 − 7) + 10

7. Найди значение выражения в каждом случае, используя удобный для тебя способ:

39 − 7 = 56 + 4 = 80 + 1 =
68 − 10 = 56 − 4 = 80 − 1 =
19 − 5 = 37 + 20 = 34 + 5 =
73 − 20 = 37 − 20 = 34 − 5 =

Прием 30 − 6 — вычитание единиц из целых десятков с заемом одного десятка

Схема приема:

30 − 6 = 24
20 10
4
24

Для освоения данного приема ребенок должен знать десятичный состав целых чисел, уметь вычитать в пределах 10 и выполнять разрядное сложение (20 + 4).

Виды заданий, помогающих ребенку освоить данный прием:

1. Разгадай закономерность и заполни пустые окошки

10 | * | *** | 6 10 | * | | 8 10 | | | 2
10 | **** | | 4 10 | | *** | 3 10 | | | 5

2. Заполни пустые окошки в равенствах по образцу:

30 = 20 + 10 40 = □ + □ 90 = □ + □
70 = 60 + 10 80 = □ + □ 100 = □ + □

3. Найди значения выражений в каждом столбике, используя первый ответ:

70 − 1 = 30 − 1 = 90 − 1 =
70 − 2 = 30 − 2 = 90 − 2 =
70 − 3 = 30 − 3 = 90 − 3 =
70 − 5 = 30 − 6 = 90 − 5 =

4. Вычисли, используя разложение целого числа, заданное схемой:

30 − 6 = 20 − 4 = 80 − 5 =
20 10 10 10 70 10

5. Найди парные примеры в соответствии со стрелками, и обозначь их такими же стрелками:

70 − 8	24 + 6	90 − 7	36 + 4
30 − 6	62 + 8	40 − 4	83 + 7
50 − 9	55 + 5	40 − 6	34 + 6
60 − 5	41 + 9	70 − 3	63 + 7

Можно ли считать парными по тому же принципу выражения 70 − 3 и 63 + 7? Исправь выражения так, чтобы они стали парными по тому же принципу.

6. Найди значения выражений удобным тебе способом:

53 − 40 =   19 − 5 =   76 − 30 =
28 − 7 =   68 − 10 =   45 − 4 =

7. Какие значения могут принимать буквы в равенствах?

$F + 40 = 90$ $r + u = 80$
F — ? $u = 20$
    r — ?

8. Вычисли, соблюдая порядок действий:

46 − 30 − 4 =   23 − 10 + 7 =
58 − 40 + 2 =   97 − 80 − 8 =

9. Найди ответы и соедини их стрелкой с примером:

30 − 9	64	60 − 2	40	48 − 8	21
70−6	58	50 − 5	13	20 − 7	45

10. Какое значение может принимать буква в равенстве?

50 − & = 4   28 − L = 20   # + & = 70
& − ?   30 − L = ...   60 − # = 52
    L − ?   & − ? # − ?

11. По какому правилу записаны ряды чисел? Продолжи каждый ряд.

12, 22, 32, 42, ...
22, 24, 26, 28, 30, ...
57, 58, 59, 60, ...
86, 85, 84, 83, ...
78, 76, 74, 72, 70, ...

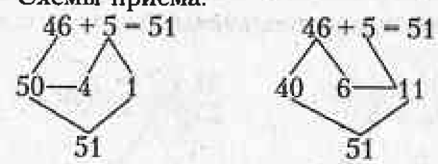
12. Найди и исправь ошибку:

50 − 6 = 36   30 − 7 = 13
40 10   □ □

70 − 3 = 63   40 − 2 = 38
□ □   □ □

Прием 46 + 5 — прибавление единиц к числу с переходом через десяток

Схемы приема:



Для освоения данного приема ребенок должен знать состав однозначных чисел, уметь дополнять любое двузначное число до ближайшего целого, и выполнять разрядное сложение (50 + 1).

Виды заданий, помогающих ребенку освоить данный прием:

1. Какие числа нужно вставить в пустые окошки, чтобы сохранить закономерность?

10	7	3		5	5	10		2

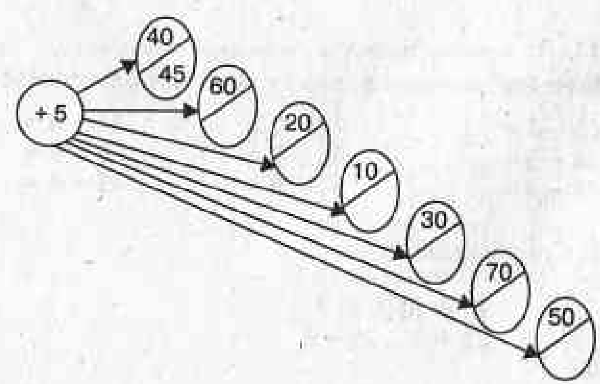
2. Вставь числа в окошки, чтобы равенства были верными:

7 + 5 = □   5 + □ = 14   □ + 7 = 16   □ + 7 = 15

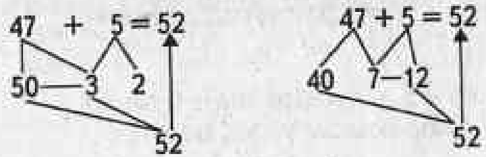
3. Найди ответы к примерам и соедини их стрелкой:

10 + 5	22	17 + 5	19	10 + 9	15
10 + 3	16	10 + 6	22	16 + 6	13

4. Назови и запиши сумму:



5. Рассмотри схемы приема:



Найди суммы, используя, где нужно, схемы:

47 + 3 =
47 + 4 =

68 + 2 =
68 + 3 =

23 + 7 =
23 + 8 =

47 + 5 =
47 + 6 =
47 + 7 =

68 + 4 =
68 + 5 =
68 + 6 =

23 + 9 =

6. Найди суммы:

47 + 5 = (3 2)

64 + 9 = (6 3)

38 + 8 = (2 6)

7. Найди суммы:

48 + 6 = (2 4)

78 + 9 =

83 + 8 =

57 + 5 =

34 + 8 =

66 + 7 =

8. Найди значение разности удобным тебе способом:

67 − 7 =
54 − 5 =
73 − 4 =

92 − 2 =
86 − 7 =
37 − 8 =

34 − 4 =
68 − 9 =
45 − 6 =

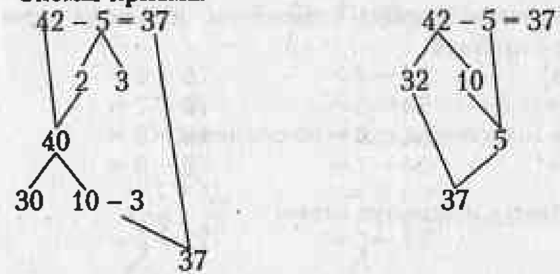
9. Сравни выражения:

(>, =, <)

75 + <u>10</u> ... 75 + <u>1</u>
2<u>3</u> + 9 ... 2<u>5</u> + 9

Прием 42 – 5 — вычитание единиц из числа с переходом через десяток

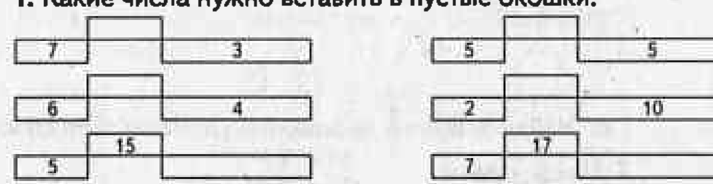
Схемы приема:



Для освоения данного приема ребенок должен знать состав однозначных чисел, уметь выделять десяток из любого двузначного числа, уметь вычитать в пределах 10 и выполнять разрядное сложение или сложение без перехода через десяток.

Виды заданий, помогающих ребенку освоить данный прием:

1. Какие числа нужно вставить в пустые окошки:



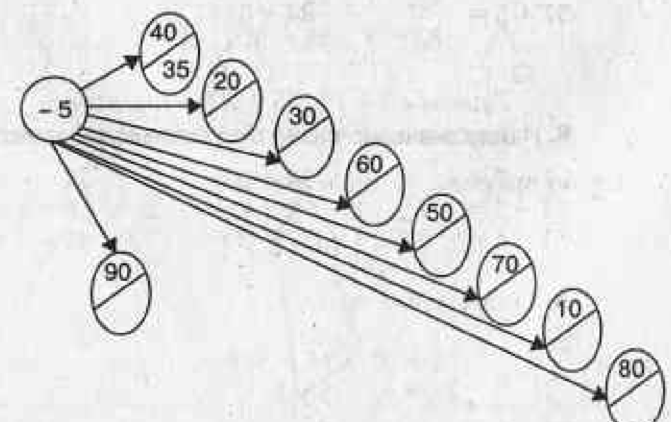
2. Вставь числа в окошки, чтобы равенства были верными:

7 + 5 = □
12 − 5 = □
□ + 7 = 15

4 + □ = 13
□ + 6 = 14
□ − 5 = 8

14 − □ = 6
17 − □ = 8

3.



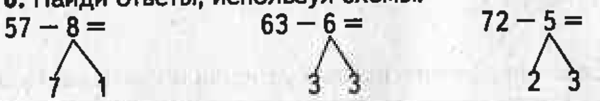
4. Найди значение выражения:

35 – 5 = 67 – 7 = 98 – 8 =
54 – 4 = 76 – 6 = 43 – 3 =

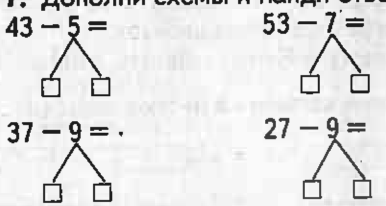
5. Найди значение каждого выражения, используя первый ответ каждого столбика:

42 – 2 =	54 – 4 =	76 – 6 =
42 – 3 =	54 – 5 =	76 – 7 =
42 – 4 =	54 – 6 =	76 – 8 =
42 – 5 =	54 – 7 =	76 – 9 =

6. Найди ответы, используя схемы:



7. Дополни схемы и найди ответы:



8. Найди значение выражений удобным тебе способом:

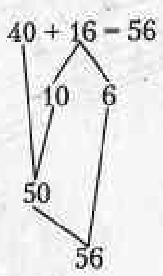
58 – 7 = 78 – 9 =
65 – 6 = 34 – 6 =

9. Сравни выражения:

$37 + \underline{20} \ldots 37 + \underline{2}$
$61 - \underline{40} \ldots 61 - \underline{4}$
$5\underline{8} + 7 \ldots 5\underline{5} + 7$
$8\underline{3} - 9 \ldots 8\underline{6} - 9$

Прием 40 + 16; 45 + 23 — сложение двузначных чисел без перехода через десяток

Схема приема:

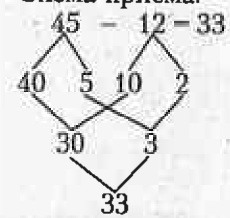


Для освоения данного приема ребенок должен знать разрядный состав двузначных чисел, уметь выполнять сложение разрядных единиц (десятки с десятками, единицы с единицами).

На основе этих же знаний и умений ребенок осваивает следующий прием.

Прием 45 – 12 — вычитание двузначных чисел без перехода через десяток

Схема приема:



Виды заданий, помогающих ребенку освоить данный прием:

1. Найди ответ каждого примера в цепочке примеров и покажи стрелкой:

5 + 2 → 7 – 6 1 + 4 5 + 4 9 – 6 3 + 5 8 – 3

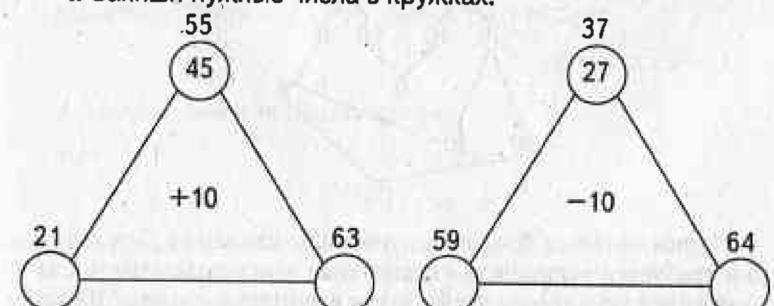
2. Вставь числа в окошки, чтобы равенства были верными:

40 + □ = 50 50 + □ = 90 □ + 40 = 60
70 – □ = 60 □ – 30 = 60 90 – □ = 40

3. Какие числа нужно вставить в пустые окошки:

а)	45	2	47	55	4	59	21	4		63	5	
б)	37	6	31	59	6	53	48	5		64		61

4. Запиши нужные числа в кружках.



5. Вычисли, используя схемы:

45 + 12 =
10 2

45 − 12 =
10 2

59 − 16 =
10 6

21 + 24 =
20 4

37 − 26 =
20 6

35 + 14 =
10 4

6. Вычисли, используя схемы:

63 + 14 =
□ □

56 − 13 =
□ □

87 − 12 =
□ □

35 + 12 =
□ □

7. Найди значение выражений любым удобным тебе способом:

55 + 12 =
31 + 24 =
45 + 14 =

55 − 12 =
47 − 26 =
69 − 16 =

53 + 35 =
54 − 33 =

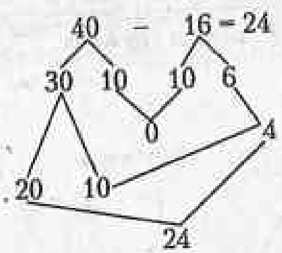
8. Какое значение может принимать в данных равенствах буква?

A − 54 = 22
A − ?
B + & = 68
& = 12
B − ?

23 + *L* = 47
L − ?
40 − *K* + *C* = 58
40 − *K* = 26
C − ?

Прием 40 − 16 — вычитание двузначного числа из целых десятков с заемом десятков

Схема приема:



Прием является технически довольно сложным. Для его выполнения требуется выполнить ступенчатые «расщепления» числа 40, последовательно занимая десятки для вычитания сначала 10, затем 6.

Виды заданий, помогающих ребенку освоить данный прием:

1. Добавь нужные числа на крышах домиков.

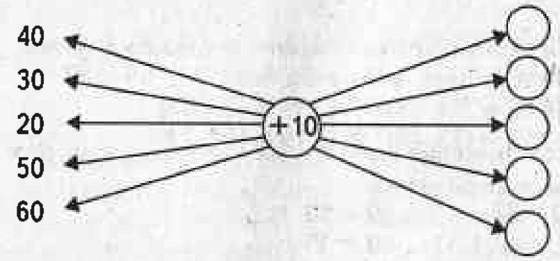
16 / 10 + 6
10 + 4
10 + 8
10 − 6
10 − 5
10 − 8

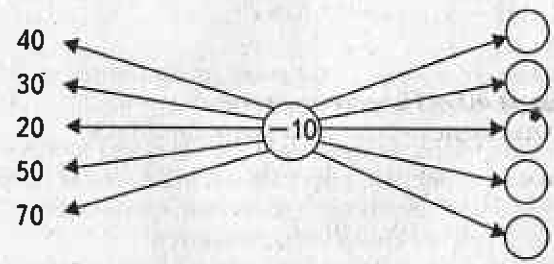
2. Найди ответы примеров и покажи стрелкой:

а) 40 + 6 | 34 30 + 4 | 68 60+8 | 46

б) 40 − 6 | 42 70 − 5 | 36 50 − 8 | 65

3. Напиши в кружках нужные числа:





4. Найди сумму, используя схему:

40 + 16 =
10 6

30 + 24 =
20 4

60 + 38 =
30 8

50 + 42 =
40 2

5. Выполни вычитание, используя схему:

40 − 16 =
10 6

70 − 35 =
30 5

50 − 28 =
20 8

90 − 47 =
40 7

6. Найди значение выражений любым удобным тебе способом:

50 + 26 =
□ □

60 + 19 =

90 − 37 =

70 + 14 =
□ □

60 − 28 =

30 + 23 =

70 − 26 =
□ □

60 − 35 =

40 + 35 =

7. Выбери знак, который можно поставить в окошко, и значение ответа из двух чисел в скобках:

70 □ 46 = (24, 34) 80 □ 17 = (53, 63)
20 □ 13 = (33, 48) 90 □ 19 = (81, 71)

8. Сравни выражения.

>
=
<

56 − 30 ... 59 − 30
40 + 17 ... 40 + 19
70 − 13 ... 70 − 15
62 − 5 ... 64 − 7

Прием 37 + 48 — сложение двузначных чисел с переходом через десяток

При выполнении данного приема в уме (устно) каждое число раскладывается на разрядные составляющие, а затем разрядные единицы складываются: десятки с десятками, единицы с единицами. Получившиеся суммы снова складываются.

Для успешного выполнения этого приема ребенок должен хорошо знать разрядный состав двузначных чисел, уметь складывать целые десятки и складывать однозначные числа в пределах 20.

Прием 37 + 53 — сложение двузначных чисел с получением в результате целых десятков

Выполнение этого приема требует тех же знаний и умений, что и предыдущий прием. Способ выполнения тот же. При устном

выполнении данный случай не вызывает затруднений, но при письменном выполнении ребенок может терять разрядную единицу, поскольку при письменном выполнении действия начинают выполнять с разряда единиц и вновь полученную разрядную единицу следует добавить дополнительно к сумме десятков.

Прием, облегчающий ребенку выполнение устных вычислений в пределах 100

Значительная часть детей испытывает большие трудности при устных вычислениях в пределах 100. Учить детей сразу приемам письменных вычислений — значит с первых же шагов обрекать их на полную беспомощность при выполнении устных вычислений уже в пределах 100. Научить приемам письменных вычислений иногда проще, чем пытаться развивать собственную вычислительную деятельность ребенка. Однако в практической жизни людям довольно часто приходится выполнять несложные (в пределах 100) вычисления в уме, а также довольно часто требуется умение оценить возможные границы результатов несложных вычислений. Психологами доказано, что формирование и развитие собственной вычислительной деятельности ребенка благотворно действует на развитие внутреннего плана действий, гибкости и рациональности мышления.

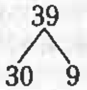
Особые трудности с устными вычислениями часто испытывают дети с замедленным типом мышления, дети с ведущим синтетическим способом мыслительной деятельности, а также ведущие кинестетики (дети, которые предпочитают опору на пальцевый счет).

Для детей с преобладанием синтетического типа мыслительной деятельности и для детей с замедленной мыслительной деятельностью были разработаны специальные схематические модели двузначных чисел, отражающие их *десятичную структуру*. На базе использования этих моделей (как основы для построения адекватной схематической модели приема) для этих детей была разработана иная последовательность знакомства с вычислительными приемами и иные способы их выполнения. Использование этих способов при устных вычислениях лишь в небольшой степени меняет порядок изучения вычислительных приемов приведенный выше.

Традиционно в начальной школе мы уделяем наибольшее внимание разрядной структуре двузначного и многозначных чисел, гораздо меньше внимания уделяется их десятичной структуре, хотя десяток является основанием десятичной системы счисления. Это можно объяснить тем, что познакомить ребенка с разрядным разложением числа мы можем уже в первом классе, используя понятие «разрядные слагаемые», т. е. 39 = 30 + 9, а чтобы познакомить его с десятичным разложением того же числа пришлось бы использовать запись $39 = 10 \cdot 3 + 9$.

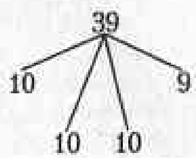
Поскольку знакомство с действием умножения по сегодняшним вариантам программ по математике для начальных классов предполагается лишь во втором классе, такая запись, естественно, в 1 классе не может быть использована.

Соответственно понятию «разрядный состав двузначного числа», мы рассматриваем два случая так называемого разрядного сложения и вычитания, которые в дальнейшем становятся одним из опорных приемов для обучения сложению и вычитанию с переходом через десяток и других вычислительных приемов в пределах 100. В соответствии с разрядным составом строится и схематическая разрядная модель числа, с которой связываются соответствующие случаи сложения и вычитания:

	30 + 9	39 – 9
	9 + 30	39 – 30

Для детей с трудностями вычислительной деятельности предлагается другая схематическая модель двузначного числа, имеющая в основе его десятичный состав. Использование схематической *десятичной модели*, доступной восприятию первоклассника, позволило обойти невозможность использования аналитической записи, отражающей десятичную структуру числа.

С другой стороны, данная модель позволяет эффективно использовать мыслительные особенности ребенка с преобладанием синтетического типа мышления (а их среди первоклассников большинство), которые *предрасположены* к работе с *наглядными моделями* изучаемых понятий. Используемая модель понятия (двузначного числа) позволяет такому ребенку в конкретной деятельности моделировать сам *прием вычисления*, в то же время являясь основой для *самопроверки* (т. е. дает возможность убедиться в правильности ответа). Десятичная модель числа выглядит следующим образом (дети назвали ее «солнышко»):

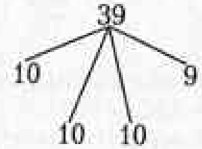


С этой моделью связаны следующие случаи сложения и вычитания:

39 – 9	39 – 10	39 – 20	30 + 9
39 – 19	39 – 29	39 – 30	9 + 30

Как видим, их гораздо больше, чем в случае опоры на разрядную модель. В то же время, все эти случаи не выходят за рамки десятичного состава числа 39, воплощенного в его схематической модели.

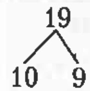
Используя эту модель, ребенок не только осваивает вышеозначенные случаи вычисления, представляя себе *суть приема на наглядном уровне*, но и действуя руками (просто закрывая на модели пальцем или ладонью вычитаемое), *сразу же проверяет правильность полученного ответа*:



39 – 19 = 20

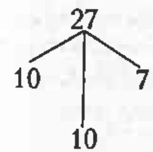
Таким образом, формируется прием *собственной* вычислительной деятельности ребенка.

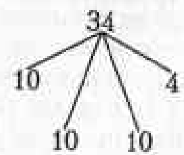
Поскольку для чисел второго десятка десятичная модель совпадает с разрядной, использование этого приема моделирования при знакомстве с разрядным сложением и вычитанием в пределах 20, наряду с рассматриваемыми там предметными моделями (кубиками, палочками) будет носить ознакомительный характер:

	10 + 9	19 – 10
	9 + 10	19 – 9

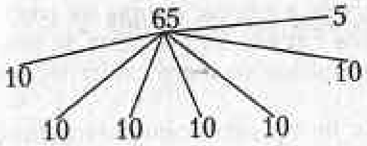
Активное использование этих моделей для осознания десятичной структуры двузначного числа при изучении нумерации двузначных чисел позволит создать прочную базу для усвоения вычислительных приемов в пределах 100.

Приведем варианты вычислений, которые позволяет организовать использование десятичной модели двузначного числа:



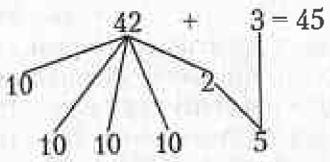


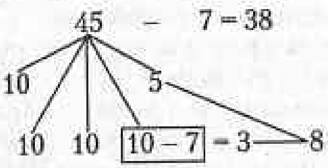
20 + 7	27 – 10 – 10	34 – 10	34 – 4
27 – 7	27 – 20	34 – 20	34 – 14
27 – 10	27 – 10 – 7	34 – 30	34 – 24
27 – 27	27 – 17	30 + 4	34 + 2



65 – 5	65 – 30	65 + 1	65 – 5
65 – 10	65 – 35	65 – 1	65 + 5
65 – 20	65 – 45	65 + 2	
65 – 50	65 – 55	65 – 2	
65 – 40	65 – 25	65 + 3	
	65 – 15	65 – 3	

Детям, которым трудно даются арифметические вычисления, такая модель значительно облегчает работу. Используя эту модель, для этих детей можно разработать индивидуальный путь освоения и других случаев вычислений, например:





На первый взгляд, такая схема приема производит гораздо более громоздкое впечатление, чем его аналитическая запись:

$$45 + 7 = 45 + (5 + 2) = (45 + 5) + 2 = 50 + 2 = 52$$

Однако в отношении тех детей, о которых идет речь (синтетики с замедленным типом мышления, необходимо требующие наглядной внешней опоры для формирования осознанного типа деятельности), такая модель оказывается более эффективной в связи со своей наглядностью, а чуть большая затрата труда и времени для построения этой модели (самостоятельного рисования десятичной схемы числа) этих детей не отвращает, наоборот, она служит как бы *приемом подготовительно-организующим дальнейшую вычислительную деятельность*. Использование таких моделей еще на этапе изучения нумерации в пределах 100 (до начала изучения темы «Сложение и вычитание в пределах 100»), позволяет легко освоить первые девять приемов вычислений.

Использовать ли десятичную схему и дальше или перейти к аналитической записи приема вычисления, учитель решит, ориентируясь на преобладающие индивидуально-типологические характеристики учеников своего класса.

3. Способы письменных вычислений (в столбик)

В основе выполнения письменных способов вычислений лежит использование правила сложения суммы с суммой. В явном виде в современных учебниках математики для начальных классов данное правило не изучается, оно заменено упрощенным вариантом правила поразрядного сложения: единицы складываются с единицами, десятки с десятками.

Письменный алгоритм сложения содержит:

1. Правило *записи* слагаемых при письменном сложении: разряд записывается под соответствующим разрядом.
2. Указание на *порядок* выполнения действий: сложение начинаем с разряда единиц (справа налево).
3. Прием *добавления накапливающихся единиц* старших разрядов в соответствующий разряд после выполнения основного сложения.

Алгоритм письменного сложения и вычитания в начальной школе вводится во 2 классе на примере сложения и вычитания двузначных чисел в пределах сотни.

На самом же деле, уже при знакомстве со случаями вида 45 + 23, учитель знакомит детей со способами записи вычислительных действий «в столбик» и приемом поразрядного сложения, применяемым при письменных вычислениях:

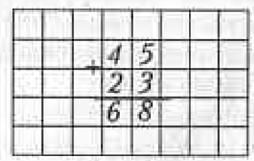
Сначала предлагается устный способ вычислений:

45 + 23 = ...

20 3

(45 + 20) + 3 = 68

Затем отмечается, что удобно записать этот пример столбиком:



Далее в учебнике приводятся подробные объяснения приема вычислений:

1. Пишу десятки под десятками, а единицы под единицами.
2. Складываю единицы: 5 + 3 = 8.
Пишу 8 под единицами.
3. Складываю десятки: 4 + 2 = 6.
Пишу 6 под десятками.
4. Читаю ответ: сумма равна 68.

Главным отличием письменных вычислений от устных является порядок складывания (или вычитания) разрядных единиц. При устных вычислениях всегда начинают со старших разрядов (в данном случае — с разряда десятков) и выполняют действие, двигаясь слева направо. При письменных вычислениях всегда начинают с разряда единиц и выполняют действие, двигаясь справа налево.

Методическое обоснование знакомства детей со способами письменных вычислений при формировании вычислительной деятельности в пределах 100:

1. Многие дети с большим трудом осваивают устные вычислительные действия с двузначными числами. Письменный прием вычислений облегчает им вычислительную деятельность.

2. Полноценное освоение устной вычислительной деятельности требует от ребенка свободного владения результатами табличных вычислений в пределах 10 и 20, свободного владения разрядным составом чисел, десятичным составом чисел, умением гибко и свободно применять разнообразные вычислительные действия, выбирая способ вычислений в каждом случае. Далеко не все дети могут это делать. Письменный способ вычислений требует более простых вычислительных действий, выполняемых по единому жесткому правилу (называемому «алгоритмом письменных вычислений»).

3. Знакомство со способами оформления вычислений «в столбик» при изучении вычислений в пределах 100 рассматривается как подготовка к использованию этой вычислительной технологии в дальнейшем (при вычислениях с трехзначными и многозначными числами).

Запись и способ вычисления «в столбик» для многих детей, с трудом усваивающих устные приемы сложения и вычитания (особенно с переходом через десяток), является более легким и доступным. Запись «в столбик» и применяемые при этом вычислительные приемы позволяет создать для ребенка «систему промежуточных опор», так как на каждом шаге вычислений ребенок фактически действует не более чем в пределах второго десятка, что значительно облегчает вычисления.

Например:

1)
$$\begin{array}{r} 217 \\ +\ 439 \\ \hline 6 \end{array}$$

$7 + 9 = 16 = 1$ дес. $+ 6$

2)
$$\begin{array}{r} 217 \\ +\ 439 \\ \hline 56 \end{array}$$

1 дес. + 3 дес. = 4 дес.

4 дес. + 1 дес. = 5 дес.

3)
2 сот. + 4 сот. = 6 сот.
$$\begin{array}{r} 217 \\ +\ 439 \\ \hline 656 \end{array}$$

В основе письменного сложения и вычитания лежат:

1) прочное знание таблицы сложения и соответствующих случаев вычитания в пределах 10;

2) умение складывать и вычитать в пределах 20 (с переходом через десяток);

3) знание разрядного состава чисел и соотношение разрядных единиц.

Алгоритм письменного вычитания строится на тех же принципах. Сначала детей знакомят со способом записи чисел при выполнении письменных вычислений и определяют порядок выполнения вычислений (справа налево, начиная с разряда единиц).

Например:

$$\begin{array}{r} 56 \\ -\ 42 \\ \hline 14 \end{array}$$

1. *Пишу* десятки под десятками, а единицы под единицами.
2. *Вычитаю* единицы из единиц: $6 - 2 = 4$. *Пишу* 4 под единицами.
3. *Вычитаю* десятки из десятков: 5 дес. – 4 дес. = 1 дес. *Пишу* 1 под десятками.
4. Читаю *ответ*: разность равна 14.

Наиболее трудны для многих детей, как и при устных вычислениях, случаи вида $50 - 24$ и $52 - 24$, где для выполнения вычислений необходимо выполнить «заем» десятка из старшего разряда.

Например: 5 дес. = 4 дес. + 1 дес.
1 дес. = 10
$10 - 4 = 6$

$$\begin{array}{r} 50 \\ -\ 24 \\ \hline 26 \end{array}$$

1. *Пишу* единицы под единицами, десятки под десятками.
2. *Вычитаю единицы.* Из 0 нельзя вычесть 4. Занимаю 1 дес. из 5 дес.
1 дес. = 10; $10 - 4 = 6$. *Пишу* под единицами 6.
3. *Вычитаю десятки.* Было 5 дес., но 1 дес. заняли при вычитании единиц. Осталось 4 дес. 4 дес. – 2 дес. = 2 дес. Пишу 2 под десятками.
4. Читаю *ответ*: разность равна 26.

Для того чтобы не забывать о заемной единице, над разрядом десятков можно ставить точку, черточку, или подписывать число оставшихся после заема разрядных единиц.

Лекция 4.

Вычислительные приемы сложения и вычитания для чисел первой тысячи и многозначных чисел

1. Вычислительные приемы для чисел первой тысячи.
2. Вычислительные приемы для многозначных чисел.

1. Вычислительные приемы для чисел первой тысячи

Используемые математические законы и правила

В концентре «Тысяча» изучаются устные и письменные приемы вычислений. В основе формирования вычислительной деятельности ребенка в пределах первой тысячи лежат следующие закономерности, законы и правила арифметических действий:

1. *Принцип построения натурального ряда* используется для случаев, позволяющих опираться на прием присчитывания и отсчитывания по 1:

655 + 1   999 + 1   760 – 1   500 – 1

2. *Разрядный и десятичный состав* трехзначных чисел является основой для выполнения действий сложения и вычитания целыми разрядами:

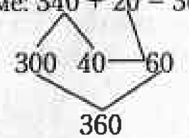
340 – 40   340 – 300   600 + 50   430 + 6   234 – 34

3. *Правила арифметических действий*, с которыми дети знакомились в концентре «Сотня»:

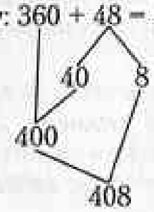
а) перестановка слагаемых : 7 + 345 = 345 + 7

б) группировка слагаемых: 235 + 56 + 15 = 235 + 15 + 56

в) правило прибавления числа к сумме: 340 + 20 = 360



г) правило прибавления суммы к числу: 360 + 48 = 408



д) правило прибавления суммы к сумме является основой письменного алгоритма вычислений, активно используемого при вычислениях в пределах первой тысячи: сотни складываем с сотнями, десятки складываем с десятками, единицы — с единицами.

е) соответствующие правила используются для вычитания: вычитание числа из суммы, вычитание суммы из числа, вычитание суммы из суммы.

В методике изучения устных и письменных приемов вычислений в первой тысяче много сходного с методикой работы над аналогичной темой в концентре «Сотня».

Способы устных вычислений

Устные приемы сложения и вычитания в пределах первой тысячи изучаются в третьем классе четырехлетней начальной школы в следующем порядке:

1. Нумерационные случаи

а) Случаи вида:

345 + 1   345 – 1   560 + 1   560 – 1   399 + 1   400 – 1

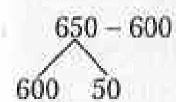
При выполнении вычислений данного вида ссылаются на принцип построения натурального ряда чисел: добавление к числу единицы дает число, следующее по счету; вычитание единицы дает число, предшествующее по счету.

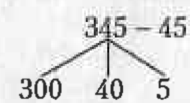
Например: 399 + 1 — добавляя к числу 1, получаем число следующее. Следующее за числом 399 число 400, значит 399 + 1 = 400.

б) Случаи вида:

650 – 50   650 – 600   600 + 50   345 – 5   345 – 45

При выполнении вычислений данного вида ребенок должен хорошо знать принцип поразрядного строения чисел в десятичной системе счисления.





Например: 820 + 8 — в числе 820 в разряде единиц 0. Добавляя 8, помещаем их в разряд единиц, получаем 828.

2. Сложение и вычитание целых сотен

Сложение и вычитание вида 300 + 200, 900 – 500 является первым вычислительным приемом, с которого начинается формирование устных вычислений в пределах 1 000.

9-2681

Для освоения этого приема ребенок должен хорошо представлять разрядный состав трехзначного числа. Рассматривая 300 как 3 сот. и 200 как 2 сот., прием 300 + 200 вычисляется как 3 сот. + + 2 сот. Ответ 5 сот. затем рассматривается как 500 и записывается результат вычислений. Таким образом, действия целыми сотнями рассматриваются как действия разрядными единицами, вычисления в этом случае сводятся к табличным вычислениям в пределах 10.

3. Сложение и вычитание целых десятков, приводящее к действиям в пределах тысячи

К этим случаям относятся вычисления вида 70 + 60 и 140 – 80. Вычислительный прием: 70 = 7 дес.; 60 = 6 дес.; 7 дес. + 6 дес. = = 13 дес.; 13 дес. = 130. Значит 70 + 60 = 130.

140 = 14 дес.; 80 = 8 дес.; 14 дес. – 8 дес. = 6 дес.; 6 дес. = 60. Значит 140 – 80 = 60.

При вычислениях используется знание десятичного состава трехзначных чисел. Таким образом действия целыми десятками рассматриваются как действия разрядными числами в пределах 20 (табличные случаи).

4. Сложение и вычитание целых десятков, приводящее к действиям в пределах 100

К этим случаям относятся вычисления вида 450 + 30, 450 – 300.

Вычисления могут выполняться *двумя* способами:

а) на основе знания десятичного состава трехзначных чисел данные вычисления могут быть заменены на вычисления вида

45 дес. + 3 дес. и 45 дес. – 30 дес. — в этом случае вычисления в пределах 1 000 заменяются уже знакомыми приемами вычислений в пределах 100;

б) могут быть использованы правила прибавления числа к сумме и вычитания числа из суммы:

$450 + 30 = (400 + 50) + 30 = 400 + (50 + 30) = 400 + 80 = 480$

$450 - 300 = (400 + 50) - 300 = (400 - 300) + 50 = 100 + 50 = 150$

Аналогичным образом используются правила прибавления суммы к числу, вычитания суммы из числа, прибавления суммы к сумме:

$500 + 150 = 500 + (100 + 50) = (500 + 100) + 50 = 600 + 50 = 650$

В основе всех этих случаев лежит хорошее знание разрядного состава трехзначных чисел и умение выполнять устные вычисления в пределах 10, 20 и 100.

Способы письменных вычислений (в столбик)

Наиболее важную роль письменные приемы сложения и вычитания играют при вычислениях в пределах 1 000 (трехзначные числа), поскольку вычисления в уме с трехзначными числами представляют собой достаточно сложную проблему для всех детей. Использование письменных алгоритмов вычислений в этих условиях является психологически оправданным.

В свою очередь, усвоение детьми нумерации четырехзначных и многозначных чисел позволяет им осуществить перенос умения складывать и вычитать числа «столбиком» из области трехзначных чисел на область многозначных чисел.

При знакомстве с письменными приемами сложения и вычитания в пределах 1 000 проводится аналогия с алгоритмом письменного сложения и вычитания в пределах 100:

При сложении трехзначных чисел удобно записывать пример столбиком, как и при сложении двузначных чисел и складывать сначала единицы, потом десятки, а потом сотни.

$$\begin{array}{r} +\,325 \\ 434 \\ \hline 759 \end{array}$$

5 + 4 = 9. Записываю 9 в разряд единиц.
2 дес. + 3 дес. = 5 дес. Записываю 5 в разряд десятков.
3 сот. + 4 сот. = 7 сот. Записываю 7 в разряд сотен.
Ответ: 759.

Письменный алгоритм сложения и вычитания содержит:

1. Правило *записи* слагаемых (или уменьшаемого и вычитаемого) при письменном сложении (вычитании): *разряд записывается под соответствующим разрядом.*

2. Указание на *порядок* выполнения действий: сложение (вычитание) начинаем с разряда единиц (справа налево).

3. Прием *добавления накапливающихся единиц* старших разрядов в соответствующий разряд после выполнения основного сложения. Прием *«заема» разрядных единиц* в старших разрядах при вычитании в случае нехватки единиц для выполнения действий.

Порядок знакомства детей с различными по сложностями случаями сложения и вычитания:

1. Случаи сложения без перехода через разряд: 325 + 434.

2. Случаи сложения с одним переходом через один разряд (разряд десятков или разряд единиц): 356 + 272, 338 + 23.

3. Случаи сложения с двумя переходами через разряд: 437 + 95, 89 + 78.

4. Случи сложения с переходом через разряд, приводящие к получению нуля в одном из разрядов: 326 + 279 = 605.

5. Случаи вычитания без перехода через разряд (без «заема»): 465 – 123.

6. Случаи вычитания с одним переходом через разряд (с одним «заемом»): 637 – 273.

7. Случаи вычитания с двумя переходами через разряд (с двумя «заемами»): 754 – 687.

8. Случаи вычитания с переходами через разряд при наличии нуля в одном из разрядов уменьшаемого: 630 – 254, 405 – 34.

9. Случаи вычитания с переходами через разряд, требующие «заема» с переходом через разряд: 807 – 239.

Последний случай требует «заема» разрядной единицы из разряда сотен, раскладывания ее на десятки, «заема» одного десятка для выполнения действий в разряде единиц, а затем выполнения действий с остатком «заемных» десятков в разряде десятков.

Этот случай является наиболее сложным для многих детей. Для того, чтобы не терять количество «заемных» десятков, можно подписывать над нулем уменьшаемого девятку, обозначая количество оставшихся заемных десятков. При этом над восьмеркой уменьшаемого следует подписать семерку, чтобы не забыть, что количество сотен на одну уменьшилось за счет «заема».

Усвоение письменных приемов сложения и вычитания трехзначных чисел является условием успешного применения их к числам любой величины.

Приведем основные виды заданий, помогающих ребенку освоить письменные способы вычислений:

1. Вставь числа в окошки так, чтобы равенства были верными:

238 = □ сот. □ дес. □ ед.
452 = □ сот. □ дес. □ ед.
502 = □ сот. □ дес. □ ед.
54 = □ + 10 + 7
75 = □ + 10 + 5
473 = 400 + □ + 10 + 3

2. Найди значения выражений:

23 + 66 =	46 + 24 =	75 – 10 =
92 – 42 =	46 + 25 =	75 – 12 =
52 + 34 =	46 + 29 =	75 – 40 =
87 – 46 =	46 + 36 =	75 – 42 =

3. Сравни числа, записанные по-разному:

$<$ $>$ $=$

3 сот. 2 дес. 8 ед. ... 308
24 дес. ... 240
72 дес. 2 ед. ... 72
4 дес. 2 ед. ... 420
5 дес. ... 50

4. Найди и вставь нужные числа в окошки:

$$\begin{array}{r}+32\\20\\\hline\square\square\end{array}\quad\begin{array}{r}+46\\13\\\hline5\square\end{array}\quad\begin{array}{r}+35\\25\\\hline\square0\end{array}\quad\begin{array}{r}-60\\25\\\hline\square5\end{array}\quad\begin{array}{r}-48\\28\\\hline2\square\end{array}\quad\begin{array}{r}+630\\360\\\hline\square\square\square\end{array}$$

$$\begin{array}{r}+25\\28\\\hline5\square\end{array}\quad\begin{array}{r}-62\\47\\\hline\square5\end{array}\quad\begin{array}{r}+59\\14\\\hline7\square\end{array}\quad\begin{array}{r}-91\\37\\\hline\square4\end{array}\quad\begin{array}{r}+252\\245\\\hline\square9\square\end{array}\quad\begin{array}{r}-597\\474\\\hline\square2\square\end{array}$$

5. Найди результаты, используя присчитывание и отсчитывание:

700 – 1	699 + 1	1000 – 1
999 + 1	899 + 1	1000 – 10

6. Зачеркни неверную запись. Для верной записи вычисли результат:

$$\begin{array}{r}+131\\45\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{l}-356\\34\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{r}-356\\34\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{r}-356\\34\\\hline\end{array}$$

$$\begin{array}{r}+467\\123\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{r}+467\\123\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{r}+467\\123\\\hline\end{array}$$

$$\begin{array}{r}-234\\121\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{r}-234\\121\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{r}-234\\121\\\hline\end{array}$$

7. Заполни окошки так, чтобы равенства были верными:

532 – 30 = □	620 = 600 + 10 + □
694 – 604 = □	730 = □ + 10 + □
825 + 40 = □	400 = 390 + □
394 – 204 = □	500 = □ + □
	700 = 600 + □ + 10
	400 = □ + □ + □

8. Вычисли любым способом, который кажется тебе удобным:

70 – 5	700 – 2	100 – 12
90 – 6	900 – 20	90 – 23
100 – 7	1000 – 200	80 – 44

9. Вычисли любым удобным способом:

70 − 8 =	170 − 2 =	370 − 2 =
60 − 5 =	160 − 5 =	370 − 5 =
100 − 2 =	200 − 2 =	400 − 2 =
100 − 3 =	200 − 3 =	400 − 3 =
100 − 6 =	200 − 6 =	400 − 7 =
100 − 16 =	200 − 16 =	400 − 17 =

10. Вычисли, используя отсчитывание, или занимая десятки в уменьшаемом.

$$\begin{array}{r}-100\\8\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{r}-90\\6\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{r}-70\\4\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{r}-70\\14\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{r}-70\\24\\\hline\end{array}$$

$$\begin{array}{r}-500\\2\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{r}-500\\3\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{r}-500\\5\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{r}-500\\15\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{r}-500\\25\\\hline\end{array}$$

$$\begin{array}{r}-620\\2\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{r}-620\\3\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{r}-620\\5\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{r}-620\\15\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{r}-620\\20\\\hline\end{array}$$

11. Попробуй восстановить пропущенные числа так, чтобы равенства были верными:

$$\begin{array}{r}-7\square\square\\20\\\hline680\end{array}\qquad\begin{array}{r}-400\\\square\square\\\hline320\end{array}\qquad\begin{array}{r}-5\square\square\\60\\\hline440\end{array}$$

$$\begin{array}{r}-1000\\\square\square\square\\\hline900\end{array}\qquad\begin{array}{r}-1000\\\square\square\\\hline990\end{array}\qquad\begin{array}{r}-1000\\\square\square\square\\\hline800\end{array}$$

При выполнении письменного сложения и вычитания для каждого действия используется *два способа проверки полученных результатов.*

Для сложения: из суммы можно вычесть любое из слагаемых, при этом в результате должно получиться другое слагаемое.

Для вычитания: можно найти сумму вычитаемого и разности, при этом в результате получится уменьшаемое; можно из уменьшаемого вычесть разность, при этом в результате получится вычитаемое.

2. Вычислительные приемы для многозначных чисел

Способы устных вычислений

Устные приемы сложения и вычитания многозначных чисел изучаются в 4 классе четырехлетней начальной школы в следующем порядке:

1. Нумерационные случаи

а) Случаи вида:

99 999 + 1	345 000 – 1	560 999 + 1
560 000 – 1	399 999 + 1	40 000 – 1

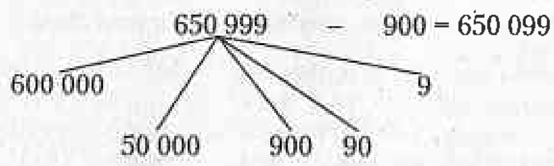
При выполнении вычислений данного вида ссылаются на принцип построения натурального ряда чисел: добавление к числу единицы дает число, следующее по счету; вычитание единицы дает число, предшествующее по счету.

Например: 399 999 + 1 — добавляя к числу 1, получаем число следующее. Следующее за числом 399 999 число 400 000, значит 399 999 + 1 = 400 000.

б) Случаи вида:

30 000 + 1 000	650 999 – 900	600 000 + 5
60 345 – 5	345 000 – 45 000	800 700 + 1 000

При выполнении вычислений данного вида ребенок должен хорошо знать принцип поразрядного строения чисел в десятичной системе счисления.



2. Сложение и вычитание целых тысяч

Сложение и вычитание вида 32 000 + 2 000, 690 000 – 50 000 является первым вычислительным приемом, с которого начинается формирование устных вычислений в объеме многозначных чисел.

Для освоения этого приема ребенок должен хорошо представлять разрядный состав многозначного числа. Рассматривая 32 000 как 32 тыс. и 2 000 как 2 тыс., прием 32 000 + 2 000 вычисляется, как 32 тыс. + 2 тыс. Ответ 34 тыс. затем рассматривается, как 34 000 и записывается результат вычислений. Таким образом, действия целыми тысячами рассматриваются как действия разрядными единицами, вычисления в этом случае сводятся к табличным вычислениям в пределах 10, 20 или 100.

3. Сложение и вычитание целых тысяч на основе правил арифметических действий

Учебник математики для 4 класса практически не предлагает вычислений соответствующего вида, однако учителя часто используют их на устном счете.

К этим случаям относятся вычисления вида: 70 200 + 400, 600 100 – 99, 3 008 + 351, 425 100 – 24 100 и т. п.

При вычислениях используется знание десятичного состава многозначных чисел и понимание того, что во всех случаях действия затрагивают только часть первого числа (первое число может рассматриваться как сумма). Таким образом действия могут выполняться только с частью первого числа.

Например:

Вычисляя сумму 70 200 + 400, можно отдельно сложить 400 и 200, а затем их сумму прибавить к числу 70 000. Фактически используется правило прибавления числа к сумме.

При выполнении вычислений в случае 425 100 – 24 100 используется правило вычитания числа из суммы. 425 100 рассматривается, как сумма 400 000 и 25 100. Из одного из слагаемых вычитается 24 100 (25 100 – 24 100 = 1 000), и полученный результат складывается с первым слагаемым: 400 000 + 1 000 = 401 000.

В основе всех этих случаев лежит хорошее знание разрядного состава многозначных чисел и умение выполнять устные вычисления целыми разрядами.

Способы письменных вычислений (в столбик)

Письменные приемы сложения и вычитания являются основными вычислительными действиями при вычислениях в объеме многозначных чисел, поскольку вычисления в уме с многозначными числами представляют собой слишком сложную проблему для всех детей. Использование письменных алгоритмов вычислений в этих условиях является психологически и методически оправданным.

Усвоение детьми нумерации четырехзначных и многозначных чисел позволяет им осуществить перенос умения складывать и вычитать числа «столбиком» из области трехзначных чисел на область многозначных чисел.

При знакомстве с письменными приемами сложения и вычитания в объеме многозначных чисел проводится аналогия с алгоритмом письменного сложения и вычитания в пределах 1000:

1) Письменное сложение и вычитание любых многозначных чисел выполняется так же, как сложение и вычитание трехзначных чисел.

2) При записи столбиком, как и при сложении трехзначных чисел следует записывать разряд под соответствующим разрядом,

и складывать сначала единицы, потом десятки, а потом сотни, потом тысячи и т. д. (справа налево).

Считается, что дети хорошо научены выполнять действия сложения и вычитания в столбик, поэтому в учебнике 4 класса не предусмотрено распределение случаев сложения и вычитания по уровням сложности.

Первыми рассматриваются различные случаи с переходами через разряд как при сложении , так и при вычитании:

3 126 + 4 232; 25 346 – 13 407.

Затем рассматриваются случаи вычитания с нулями в уменьшаемом:

600 – 25; 1 000 – 124; 30 007 – 648.

Эти случаи являются наиболее сложными, поскольку требуют «заема» разрядных единиц не из соседних, а из далеко отстоящих разрядов. Эти случаи полезно сначала сопровождать подробной пояснительной записью на доске, чтобы дети понимали и видели, откуда появляются девятки в «пустых» разрядах.

Например:

$$\begin{array}{r} -\,30\,007 \\ \underline{648} \end{array}$$

Вычитаю единицы. Из 7 нельзя вычесть 8. Пробую занять единицу в соседнем разряде. В разряде десятков, сотен и тысяч нет разрядных единиц, поэтому «заем» возможно произвести только из разряда десятков тысяч: 30 тыс. – 1 тыс. = 29 тыс. Подписываем 29 над 30.

«Занятую» тысячу представляем в виде суммы 1 тыс. = 1000 = = 990 + 10.

Подписываем над разрядами сотен и десятков девятки, а из 10 единиц вычитаем 8, получаем 2 единицы. Но в разряде единиц было 7 единиц. Добавляем их к полученным 2 единицам и пишем в разряде единиц 9.

Вычитаем: 9 дес. – 4 дес. = 5 дес. Пишем 5 в разряде десятков.
9 сот. – 6 сот. = 3 сот. Пишем 3 в разряде сотен.

От десятков тысяч осталось 29 тыс. Пишем 9 в разряде тысяч, 2 — в разряде десятков тысяч.

При изучении сложения и вычитания многозначных чисел рекомендуется повторять и закреплять названия компонентов и результатов действий; свойства нахождения неизвестных компонентов действий при проверке результатов вычислений; рассматривать закономерности изменения суммы и разности при изменении одного из компонентов действий.

Многие дети используют калькуляторы как при выполнении вычислений с многозначными числами, так и при проверке результатов. В старших классах не возбраняется использовать калькуляторы при необходимости выполнить громоздкие вычисления (на уроках физики, химии, геометрии).

Чтобы стимулировать ребенка к использованию умения самостоятельно вычислять в столбик, следует предлагать задания, не позволяющие механического использования калькулятора для вычисления результата. Это различные задания на нахождение ошибки в записях или цифрах вычислений, на прикидку округленных результатов вычислений, на восстановление пропущенных цифр в компонентах действий, на выбор верных ответов из предложенных и т. п. Учителю следует помнить, что механический характер вычислительных действий при вычислениях с многозначными числами быстро приводит к утомлению детей, что провоцирует появление ошибок. Поэтому не стоит задавать подряд больше трех примеров на вычисления с многозначными числами.

Лекция 10.

Умножение

1. Смысл действия умножения.
2. Табличное умножение.
3. Приемы запоминания таблицы умножения.

1. Смысл действия умножения

Действие *умножения* рассматривается как *суммирование одинаковых слагаемых.*

По определению умножение целых неотрицательных чисел (натуральных) — это действие, выполняющееся по следующим правилам:

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + a + a + a \ldots + a}_{b \text{ слагаемых}}, \text{ при } b > 1$$

$$a \cdot 1 = a, \text{ при } b = 1$$

$$a \cdot 0 = 0, \text{ при } b = 0$$

Использование символики умножения позволяет сократить запись сложения одинаковых слагаемых.

Запись вида $2 \cdot 4 = 8$ подразумевает сокращение записи вида $2 + 2 + 2 + 2 = 8$. Ее читают так: «по 2 взять 4 раза, получится 8»; или: «2 умножить на 4 получится 8».

Действие умножения во всех учебниках математики для начальных классов рассматривают ранее действия деления.

С теоретико-множественной точки зрения *умножению* соответствуют такие предметные действия с совокупностями (множествами, группами предметов) как объединение равных (равночисленных) совокупностей. Поэтому, прежде, чем знакомиться с символикой записи действий и вычислениями результатов действий, ребенок должен

научиться моделировать на предметных совокупностях все эти ситуации, понимать (т. е. правильно представлять) их со слов учителя, уметь показывать руками как процесс, так и результат предметного действия, а затем характеризовать их словесно.

Виды заданий, которые предлагаются детям *до знакомства с символикой действия умножения* (в 1 и 2 классе):

1. Посчитай двойками (тройками, пятерками).

2. Нарисуй рисунок: «На трех тарелках по 2 апельсина». Сосчитай, сколько всего апельсинов.

3. Найди лишнюю запись:

$2 + 2$

$2 + 2 + 2$

$2 + 2 + 2 + 2$

$2 + 3 + 2 + 2 + 2$

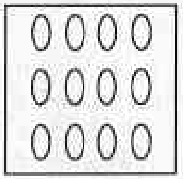
Найди значение каждого выражения наиболее удобным способом.

4. Сделай запись выражения по рисунку:

Виды заданий, используемых для усвоения ребенком смысла умножения при знакомстве с этим действием:

а) На соотнесение рисунка и математической записи:

Рассмотри рисунок и объясни записи:

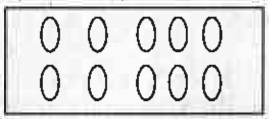


$4 + 4 + 4 = 12$

$4 \cdot 3 = 12$

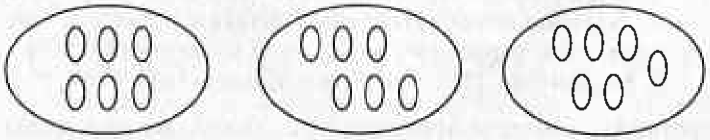
$2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$ и $2 \cdot 5 = 10$

$5 + 5 = 10$ и $5 \cdot 2 = 10$



б) На нахождение суммы одинаковых слагаемых:

Рассмотри рисунки и закончи записи:



$6 + 6 + 6 = \ldots$ $\qquad$ $6 \cdot 3 = \ldots$

в) На замену сложения умножением:

Замени, где возможно сложение умножением и вычисли результаты:

5 + 5 + 5 + 5	1 + 1 + 1 + 1 + 1	5 + 6 + 3
42 + 42	0 + 0 + 0 + 0 + 0	4 + 6 + 8

г) На понимание смысла определения действия умножения:

Рассмотри записи и объясни, какое число берется слагаемым и сколько раз берется слагаемым это число:

$6 \cdot 4 = 24$	$9 \cdot 3 = ...$
$6 + 6 + 6 + 6 = 24$	$9 + 9 + 9 = ...$

Выражение вида $3 \cdot 5$ называют *произведением.*

Числа 3 и 5 в этой записи называют *сомножителями (множителями).*

Запись вида $3 \cdot 5 = 15$ называют *равенством.* Число 15 называют *значением выражения.* Поскольку число 15 в данном случае получено в результате умножения, его также часто называют *произведением.*

Например:

Найдите произведение чисел 4 и 6. (Произведение чисел 4 и 6 — это 24.)

Поскольку названия компонентов действия умножения вводятся по соглашению (детям сообщаются эти названия и их необходимо запомнить), педагог активно использует задания, требующие распознавания компонентов действий и употребления их названий в речи.

Например:

1. Среди данных выражений найдите такие, в которых первый множитель равен 3 (второй множитель равен 2 и т. д.):

$2 \cdot 2 \quad 7 \cdot 3 \quad 6 \cdot 2 \quad 1 \cdot 6 \quad 3 \cdot 5 \quad 3 \cdot 2 \quad 7 \cdot 3 \quad 3 \cdot 4 \quad 3 \cdot 1$

2. Составьте произведение, в котором второй множитель равен 5. Найдите его значение.

3. Выберите примеры, в которых произведение равно 6. Подчеркните их красным цветом. Выберите примеры, в которых произведение равно 12. Подчеркните их синим цветом.

$7 \cdot 3 \quad 6 \cdot 1 \quad 2 \cdot 2 \quad 2 \cdot 3 \quad 6 \cdot 2 \quad 3 \cdot 2 \quad 2 \cdot 6$

4. Как называют число 4 в выражении $5 \cdot 4$? Как называют число 5? Найдите произведение. Составьте пример, в котором произведение равно тому же числу, а множители другие.

5. Множители 8 и 2. Найдите произведение.

В третьем классе дети знакомятся с правилом взаимосвязи компонентов умножения, которое является основой для обучения

нахождению неизвестных компонентов умножения при решении уравнений:

Если произведение разделить на один множитель, то получится другой множитель.

Например:

Решите уравнение $6 \cdot x = 24$. (*В уравнении неизвестен множитель. Чтобы найти неизвестный множитель, нужно произведение разделить на известный множитель.* $x = 24 : 6$, $x = 4$.)

Однако, данное правило в учебнике математики 3 класса не является обобщением представлений ребенка о способах проверки действия умножения. Правило проверки результатов умножения рассматривается в учебнике намного позже — после знакомства с внетабличным умножением и делением (знакомства с умножением и делением двузначных чисел на однозначные, не входящим в таблицу умножения и деления). Это объясняется тем, что правило взаимосвязи компонентов умножения является основой составления таблицы деления. Поскольку предполагается, что табличные случаи умножения ребенок к этому времени знает наизусть, то нет необходимости в проверке результатов. Есть только необходимость быстро восстанавливать (вспоминать) нужное третье число по двум данным.

Например:

Вычисли

$9 \cdot 2 = ...$	$5 \cdot 4 = ...$	$1 \cdot 7 = ...$
$18 : 2 = ...$	$20 : 4 = ...$	$7 : 7 = ...$

При выполнении устного внетабличного умножения, требующего применения достаточно сложного алгоритма, необходима проверка, поскольку многие дети часто ошибаются в этих случаях.

Правило проверки действия умножения:

1) Произведение делят на множитель.

2) Сравнивают полученный результат с другим множителем. Если эти числа равны, умножение выполнено верно.

Например: $18 \cdot 4 = 72$. Проверка: 1) $72 : 4 = 18$; 2) $18 = 18$.

2. Табличное умножение

Изучение таблицы умножения является центральной задачей обучения математике во 2 и 3 классе.

К табличному умножению относят случаи умножения однозначных натуральных чисел на однозначные натуральные числа, результаты которых находят на основе конкретного смысла действия умножения (находят суммы одинаковых слагаемых).

Результаты табличного умножения в соответствии с программными требованиями к знаниям, умениям и навыкам дети должны знать наизусть. Умножение с числом нуль, умножение с числами 1 и 10 относят к особым случаям.

Первые приемы составления таблиц умножения связаны со смыслом действия умножения (см. предыдущий пункт). Результаты этих таблиц получают *последовательным сложением одинаковых слагаемых*.

Например:

Умножение числа 2

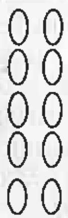
Вычисли и запомни:

$2+2 \qquad 2\cdot 2$

$2+2+2 \qquad 2\cdot 3$

$2+2+2+2 \qquad 2\cdot 4$

$2+2+2+2+2 \qquad 2\cdot 5$



Расположенный рядом рисунок помогает ребенку получить результат пересчетом фигурок. При небольших значениях множителей прием сосчитывания для получения табличного значения произведения вполне приемлем, и учитель им часто пользуется при получении результатов таблиц значений умножения чисел 2, 3, 4. Приведенный пример показывает, что этот прием удобен лишь при небольших значениях второго множителя.

При значении второго множителя больше 5, удобнее использовать для получения результатов табличных значений другой прием: *прием прибавления к предыдущему результату*.

Например:

Вычисли и запомни:

$2\cdot 6 = 2\cdot 5 + 2 = \ldots$

$2\cdot 7 = 2\cdot 6 + 2 = \ldots$

$2\cdot 8 = 2\cdot 7 + 2 = \ldots$

$2\cdot 9 = 2\cdot 8 + 2 = \ldots$

В учебнике математики для 2 класса этот прием дан более пространно, и поэтому не всегда правильно понимается с точки зрения техники выполнения:

$2+2+2+2+2+2 \qquad 2\cdot 6$

$2+2+2+2+2+2+2 \qquad 2\cdot 7$ и т. п.

Аналогичным образом составляется таблица значений умножения числа 3.

Следующим приемом, на основе которого составляются таблицы значений умножения чисел, является *прием перестановки множителей*.

Этот прием фактически является первым математическим законом относительно действия умножения в начальной школе:

От перестановки множителей произведение не меняется.

Способ знакомства детей с этим правилом (законом) обусловлен ранее введенным смыслом действия умножения. Используя предметные модели множеств, дети сосчитывают результаты группировки их элементов разными способами, убеждаясь, что результаты не меняются от изменения способов группировки.

Например:

$2\cdot 3 = 6$

$3\cdot 2 = 6$

Счет элементов рисунка (множества) парами по горизонтали совпадает со счетом элементов тройками по вертикали. Рассмотрение нескольких вариантов подобных случаев дает учителю основание произвести индуктивное обобщение (т. е. обобщение нескольких частных случаев в обобщенном правиле) о том, что перестановка множителей не меняет значение произведения.

На основе этого правила, используемого как прием счета, составляется таблица умножения на 2.

Например:

Используя таблицу умножения числа 2, вычисли и запомни таблицу умножения на 2:

$2\cdot 3 = 6$	$3\cdot 2 = \ldots$
$2\cdot 4 = 8$	$4\cdot 2 = \ldots$
$2\cdot 5 = 10$	$5\cdot 2 = \ldots$
$2\cdot 6 = 12$	$6\cdot 2 = \ldots$
$2\cdot 7 = 14$	$7\cdot 2 = \ldots$
$2\cdot 8 = 16$	$8\cdot 2 = \ldots$
$2\cdot 9 = 18$	$9\cdot 2 = \ldots$

На основе этого же приема составляется таблица умножения на 3:

$3\cdot 4 = 12$	$3\cdot 7 = 21$	$4\cdot 3 = \ldots$	$7\cdot 3 = \ldots$
$3\cdot 5 = 15$	$3\cdot 8 = 24$	$5\cdot 3 = \ldots$	$8\cdot 3 = \ldots$
$3\cdot 6 = 18$	$3\cdot 9 = 27$	$6\cdot 3 = \ldots$	$9\cdot 3 = \ldots$

Составление двух первых таблиц распределяется на два урока, что соответственно увеличивает время, отведенное на их заучивание. Каждая из двух последних таблиц составляется на одном уроке, поскольку предполагается, что дети, зная исходную таблицу, не должны отдельно заучивать результаты таблиц, полученных с помощью перестановки множителей. На самом деле, многие дети учат каждую таблицу отдельно, поскольку недостаточный уровень развития гибкости мышления не позволяет им легко перестроить модель заученной схемы табличного случая в обратном порядке. При вычислении случаев вида $9 \cdot 2$ или $8 \cdot 3$ дети снова возвращаются к приему последовательного сложения, что естественно требует времени для получения результата. Такая ситуация порождается скорее всего тем, что для значительного числа детей такое разнесение во времени взаимосвязанных случаев умножения (тех, что связаны правилом перестановки множителей) не позволяет сформироваться ассоциативной цепочке, ориентированной именно на взаимосвязь. Та же ситуация прослеживалась у ряда детей при применении свойства перестановки слагаемых для составления таблиц сложения: запомнив случай $3 + 5$, такой ребенок учит отдельно случай $5 + 3$, поскольку требование выучить этот случай поступает от учителя через 16 уроков после требования заучить первый, и при этом в промежутке заучивалась таблица вида $\square + 4$, $\square - 4$. Иными словами, отсрочка в образовании ассоциативной связи, ориентированной на взаимосвязь этих случаев, оказалась для ребенка слишком большой, что помешало образованию такой связи. Поэтому каждый случай из фактически взаимосвязанной пары учится ребенком наизусть отдельно.

При составлении таблицы умножения числа 5 в 3 классе, только первое произведение получают путем сложения одинаковых слагаемых: $5 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25$. Остальные случаи получают приемом прибавления пяти к предыдущему результату:

$5 \cdot 6 = 5 \cdot 5 + 5 = 30$
$5 \cdot 7 = 5 \cdot 6 + 5 = 35$
$5 \cdot 8 = 5 \cdot 7 + 5 = 40$
$5 \cdot 9 = 5 \cdot 8 + 5 = 45$

Одновременно с этой таблицей составляется и взаимосвязанная с ней таблица умножения на 5: $6 \cdot 5; 7 \cdot 5; 8 \cdot 5; 9 \cdot 5$.

Таблица умножения числа 6 содержит четыре случая: $6 \cdot 6; 6 \cdot 7; 6 \cdot 8; 6 \cdot 9$.

Таблица умножения на 6 содержит три случая: $7 \cdot 6; 8 \cdot 6; 9 \cdot 6$.

Таблица умножения числа 7 содержит три случая: $7 \cdot 7; 7 \cdot 8; 7 \cdot 9$.

Таблица умножения на 7 содержит два случая: $8 \cdot 7; 9 \cdot 7$.

Таблица умножения числа 8 содержит два случая: $8 \cdot 8; 8 \cdot 9$.

Таблица умножения на 8 содержит один случай: $9 \cdot 8$.

Таблица умножения числа 9 содержит, только один случай: $9 \cdot 9$.

Теоретический подход к подобному построению системы изучения табличного умножения предполагает, что именно в таком соответствии ребенок и будет запоминать случаи табличного умножения.

Наибольшее количество случаев содержит наиболее легкая для запоминания таблица умножения числа 2, а наиболее трудная для запоминания таблица умножения числа 9 содержит всего один случай. Реально, рассматривая каждую новую «порцию» таблицы умножения, учитель обычно восстанавливает весь объем каждой таблицы (все случаи). Даже при условии, что учитель обращает внимание детей на то, что новым случаем на данном уроке является, например, только случай $9 \cdot 9$, а $9 \cdot 8$, $9 \cdot 7$ и т. п. изучались на предыдущих уроках, большая часть детей воспринимает весь предложенный объем как материал для нового заучивания. Таким образом, фактически, для многих детей таблица умножения числа 9 является самой большой и сложной (а это действительно так, если иметь в виду перечень всех случаев, который к ней относится).

Большой объем материала, требующего заучивания наизусть, сложность в образовании ассоциативных связей при запоминании взаимосвязанных случаев, необходимость достижения всеми детьми прочного запоминания всех табличных случаев наизусть в установленные программой сроки — все это делает тему изучения табличного умножения в начальных классах одной из наиболее методически сложных. В связи с этим важными являются вопросы, связанные с приемами запоминания ребенком таблицы умножения.

3. Приемы запоминания таблицы умножения

1. Прием счета двойками, тройками, пятерками

Прием обучения ребенка счету двойками, тройками, пятерками применяется до знакомства с действием умножения. Методически целесообразно применять этот прием уже в первом классе. Обучение ребенка свободному счету двойками, тройками, пятерками является подготовительным приемом к знакомству с умножением и таблицей умножения. Технологически этот прием соответствует приему заучивания состава однозначных чисел до знакомства с табличным сложением в первом классе. При хорошем усвоении таких способов счета ребенку будет легко освоить таблицы умножения чисел 2, 3 и 5. Знание этого базового объема табличных случаев поможет ребенку при освоении более сложных случаев.

2. Прием последовательного сложения

Прием последовательного сложения одинаковых слагаемых является основным приемом получения результатов табличного умножения. Данный прием связан со смыслом действия умножения как сложения одинаковых слагаемых. Прием последовательного сложения продолжает оставаться достаточно удобным даже при вычислении табличных случаев умножения чисел 7, 8 и 9, при небольших значениях второго множителя.

Например: $6 \cdot 7 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$. Найти значение произведения чисел 6 и 7 таким способом достаточно сложно. Но для случаев $8 \cdot 3$ или $9 \cdot 2$ этот способ достаточно удобен.

3. Прием прибавления слагаемого к предыдущему результату (вычитания из предыдущего результата)

Данный прием является вторым основным приемом получения результатов табличного умножения. Используется в том случае, если ребенок смог выучить хотя бы несколько случаев из каждой таблицы. Это могут быть 3—4 первых самых легких случая, или 2—3 наиболее запоминающихся случая.

Так, приведенный выше случай $6 \cdot 7$ является одним из наиболее плохо запоминающихся случаев. В то же время случаи $6 \cdot 6$ и $6 \cdot 8$ наиболее легко запоминаются из этой таблицы. Запомнив результат $6 \cdot 6 = 36$, ребенок может использовать прием прибавления 6 к предыдущему результату для получения значения случая $6 \cdot 7$. Запомнив случай $6 \cdot 8$, ребенок использует прием вычитания 6 из его результата. Для осознанного применения этого приема необходимо хорошее понимание смысла действия умножения и смысла каждого множителя в записи действия умножения: чтобы получить $6 \cdot 6$ надо по 6 взять шесть раз, значит, чтобы получить $6 \cdot 7$ надо по 6 взять семь раз, т. е. $6 \cdot 7 = 6 \cdot 6 + 6 = 36 + 6 = 42$ или $6 \cdot 7 = 6 \cdot 8 - 6 = 48 - 6 = 42$.

Кроме того, необходимо уметь выполнять сложение и вычитание в пределах 100 в уме.

4. Прием взаимосвязанной пары: $2 \cdot 6$ $6 \cdot 2$ (перестановка множителей)

При хорошем понимании правила перестановки множителей ребенок заучивает в два раза меньше случаев табличного умножения, чем содержит полная таблица. Используя перестановку множителей, все остальные случаи можно получить из имеющихся.

5. Прием запоминания последовательности случаев с ориентиром на возрастание второго множителя

Этот прием активно реализован в традиционном учебнике по математике для 2 и 3 классов, где табличные случаи предлагаются ребенку на уроке «серией»:

$3 \cdot 2$ $3 \cdot 3$ $3 \cdot 4$ $3 \cdot 5$

Эту же «серию» учитель предлагает детям для заучивания к следующему уроку. На следующем уроке изучается новая «серия»:

$3 \cdot 6$ $3 \cdot 7$ $3 \cdot 8$ $3 \cdot 9$

Эта же «серия» предлагается детям для заучивания. В каждой серии задано последовательное увеличение второго множителя. Ребенок фиксирует серию как визуально, так и мнемонически (учит на память, глядя на запись). В результате может получиться парадоксальный результат: от начала до конца, т. е. подряд ребенок «серию» воспроизводит, а отдельные случаи вразбивку восстановить не может (выучил как стихи).

6. Прием «порции»

Этот прием активно реализован в учебнике математики для 2 и 3 классов автора Н.Б. Истоминой. Для заучивания ребенку предлагается «порция», состоящая из 2—3 случаев, но не по принципу возрастания второго множителя.

Например, «порция» состоит из трех случаев: $9 \cdot 5$; $9 \cdot 6$; $9 \cdot 7$. Первым для заучивания предлагается случай $9 \cdot 6$, а от него, используя прием 3, ребенок переходит к случаям $9 \cdot 5$ и $9 \cdot 7$.

В следующий раз «порция» снова содержит три случая $9 \cdot 4$; $9 \cdot 3$; $9 \cdot 2$. Здесь опорным случаем является случай $9 \cdot 3$.

7. Прием запоминающегося случая в качестве опорного

Например, $5 \cdot 6 = 30$, значит $5 \cdot 7 = 30 + 5 = 35$.

Прием является производным от приема 3. Используются легко запоминающиеся случаи: $6 \cdot 5$, $6 \cdot 8$, $5 \cdot 4$, $5 \cdot 9$, $7 \cdot 7$, $6 \cdot 6$, $5 \cdot 5$ и т. п. Применяя затем прием прибавления или вычитания первого множителя, ребенок получает нужные результаты.

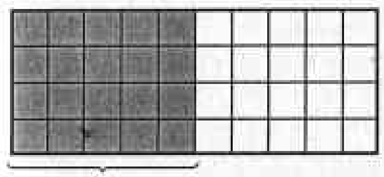
8. Прием внешней опоры

В качестве опоры используется рисунок или прямоугольная таблица чисел.

Детям, которые обладают плохой механической памятью, можно на первых порах предложить использовать клетчатое поле тетради.

Обводя на клетчатом поле прямоугольник с заданным количеством клеток в сторонах, ребенок использует эту модель для контроля полученного результата или просто подсчитывает клетки как умеет.

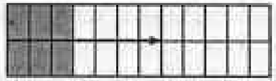
Например:

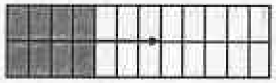


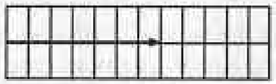
5

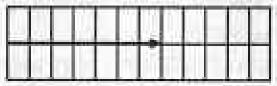
$4 \cdot 5 = 20$

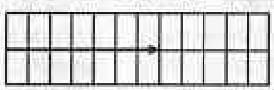
Задание:
Найди результаты умножения и проверь себя по рисунку:

2 · 3 = 6  3 · 2 = 6

2 · 4 =  4 · 2 =

2 · 5 =  5 · 2 =

2 · ...  6 · 2 =

2 · ...  7 · 2 =

В качестве внешней опоры может также использоваться прямоугольная таблица чисел, позволяющая получить результаты умножения в пределах 100. Такая таблица часто помещается на последней обложке тетрадей в клетку:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

$8 \cdot 7 = 7 \cdot 8 = 56$

9. Прием запоминания таблицы «с конца»

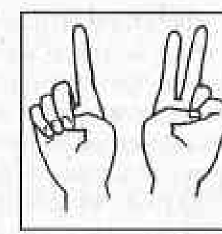
Прием активно реализован в учебнике Н.Б. Истоминой. Он рекомендуется для использования при работе с детьми, плохо запоминающими большие объемы информации. В этом случае установка на запоминание ребенку дается порциями, начиная с самых сложных случав: $9 \cdot 9$, $9 \cdot 8$, $9 \cdot 7$. Таким образом, ребенок с ограниченным объемом

запоминания запомнит сначала самые сложные случаи, а более легкие случаи таблицы чисел 2, 3 и 4 он может получать приемом сложения одинаковых слагаемых или любым другим приемом.

10. Пальцевый счет при запоминании таблицы умножения

Прием пальцевого счета при получении значений табличного умножения мало известен среди учителей начальных классов, хотя является одним из древнейших вычислительных приемов. Следует заметить, что многие учителя не признают правомочности приемов пальцевого счета при изучении табличного сложения и табличного умножения, придерживаясь мнения, что их результаты необходимо учить наизусть. На самом деле многие дети не могут твердо освоить весь объем таблицы умножения именно по причине неумения использовать приемы, помогающие ее освоению. Выучить всю таблицу наизусть могут не все дети. Учителя математики знают, что и среди школьников средних и даже старших классов имеется достаточное количество детей, плохо знающих таблицу умножения.

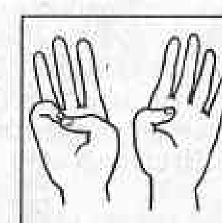
Для детей младшего школьного возраста с преобладающим кинестезическим восприятием и кинестезической памятью прием пальцевого счета при освоении таблицы умножения может быть рекомендован как вспомогательный. Для того чтобы его эффективно использовать, следует знать результаты табличного умножения в пределах таблицы умножения числа 4.



Например, нужно умножить 6 на 7. Зажимаем пальцы на обеих руках в кулак, а затем на каждой руке отгибаем столько пальцев, на сколько каждый множитель больше, чем пять.

На двух руках отогнуто три пальца — это число десятков в искомом числе. На одной руке остались прижатыми к ладони три пальца, на другой — четыре пальца. Эти числа перемножаем $3 \cdot 4 = 12$ и прибавляем к числу имеющихся десятков. $30 + 12 = 42$. Ответ: $6 \cdot 7 = 42$.

Еще один пример: необходимо умножить 8 на 9.



Отгибаем на одной руке три пальца, а на другой руке — четыре пальца (на столько каждый множитель больше, чем пять).

Отогнуто 7 пальцев — это десятки в искомом числе. Перемножаем число загнутых пальцев обеих рук: $2 \cdot 1 = 2$. Прибавляем это количество к числу десятков $70 + 2 = 72$. Таким образом $9 \cdot 8 = 72$.

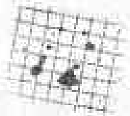
11. Мнемонические приемы при заучивании таблицы умножения

Мнемонические приемы при заучивании таблицы умножения сходны с приемами заучивания иностранных слов. Это могут быть карточки с записями табличных случаев, которые ребенок носит в кармане и просматривает при любом удобном случае (в транспорте, в очереди и т. п.).

Карточки лучше делать двусторонними: с одной стороны табличный случай, а с другой — ответ.

Карточки с записью «порции» для заучивания можно развешивать в местах, где ребенок их чаще увидит: над его столом, в ванной у зеркала, в кухне возле его места и т. п.

В любом случае следует учесть, что процесс должен быть распределен во времени, требует многократных повторов и подкрепления любыми из приведенных выше приемов, облегчающих заучивание таблицы.



Лекция 11.

Деление

1. Смысл действия деления.
2. Табличное деление.
3. Приемы запоминания таблицы деления.

1. Смысл действия деления

Действие деления рассматривается в начальной школе как действие, обратное умножению.

С теоретико-множественной точки зрения смыслу деления соответствует операция *разбиения множества на равночисленные подмножества*. Таким образом, процесс нахождения результатов действия деления связан с предметными действиями двух видов:

а) разбиение множества на равные части (например, 8 кружков разложили в 4 коробки поровну — раскладывают 8 кружков по одному в 4 коробки, а затем считают, сколько кружков получилось в каждой коробке);

б) разбиение множества на части по сколько-то в каждой части (например, 8 кружков разложили в коробки по 4 штуки — раскладывают 8 кружков по 4 штуки в коробки, а затем считают, сколько получилось коробок; деление по этому принципу в методике называют «деление по содержанию»).

Используя подобные предметные действия и рисунки, дети находят результаты деления.

Например:

6 : 2 = ...   6 : 3 = ...

Выражение вида 12 : 6 называют *частным*.

Число 12 в этой записи называют *делимым*, а число 6 — *делителем*.

Запись вида 12 : 6 = 2 называют *равенством*. Число 2 называют *значением выражения*. Поскольку число 2 в данном случае получено в результате деления, его также часто называют *частным*.

Например:

Найдите частное чисел 10 и 5. *(Частное чисел 10 и 5 — это 2.)*

Поскольку названия компонентов действия деления вводятся по соглашению (детям сообщаются эти названия и их необходимо запомнить), педагог активно использует задания, требующие распознавания компонентов действий и употребления их названий в речи.

Например:

1. Среди данных выражений найдите такие, в которых делитель равен 3:

2 : 2   6 : 3   6 : 2   10 : 5   3 : 1   3 · 2   15 : 3   3 · 4

2. Составьте частное, в котором делимое равно 15. Найдите его значение.

3. Выберите примеры, в которых частное равно 6. Подчеркните их красным цветом. Выберите примеры, в которых частное равно 2. Подчеркните их синим цветом.

4. Как называют число 4 в выражении 20 : 4? Как называют число 20? Найдите частное. Составьте пример, в котором частное равно тому же числу, а делимое и делитель — другие.

5. Делимое 8, делитель 2 . Найдите частное.

В 3 классе дети знакомятся с правилом взаимосвязи компонентов деления, которое является основой для обучения нахождению неизвестных компонентов деления при решении уравнений:

Если делитель умножить на частное, то получится делимое.

Если делимое разделить на частное, то получится делитель.

Например:

Решите уравнение 16 : x = 2. (*В уравнении неизвестен делитель. Чтобы найти неизвестный делитель, нужно делимое разделить на частное.* x = 16 : 2, x = 8.)

Однако, данные правила в учебнике математики 3 класса не являются обобщением представлений ребенка о способах проверки действия деления. Правило проверки результатов деления рассматривается в учебнике после знакомства с внетабличным умножением и делением (знакомства с умножением и делением двузначных чисел на однозначные, не входящим в таблицу умножения и деления), перед последним самым трудным случаем вида 87 : 29. Это объясняется тем, что получение результатов деления в этом случае представляет собой сложный процесс подбора частного с постоянной его проверкой умножением, поэтому правило проверки действия деления дети рассматривают даже раньше, чем правило проверки действия умножения.

Правило проверки действия деления:

1) Частное умножают на делитель.
2) Сравнивают полученный результат с делимым. Если эти числа равны, деление выполнено верно.

Например: 78 : 3 = 26. Проверка: 1) 26 · 3 = 78; 2) 78 = 78.

2. Табличное деление

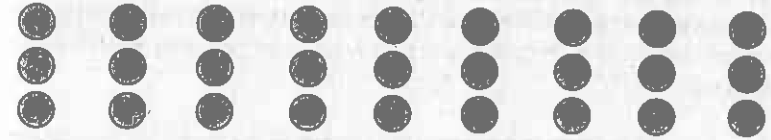
В начальной школе действие деления рассматривают как действие обратное умножению. В связи с этим сначала дети знакомятся со случаями деления без остатка в пределах 100 — так называемым *табличным делением.* С действием деления дети знакомятся после того, как уже выучили наизусть таблицы умножения чисел 2 и 3. На основе знания этих таблиц уже на четвертом уроке после знакомства с делением, составляется первая *таблица деления на 2.* Для получения ее значений используют предметный рисунок.

2 : 2 = ...	8 : 2 = ...	14 : 2 = ...
4 : 2 = ...	10 : 2 = ...	16 : 2 = ...
6 : 2 = ...	12 : 2 = ...	18 : 2 = ...

Значения частных в этой таблице получают подсчетом элементов рисунка на картинке.

Следующая таблица деления — деление на 3 является последней таблицей, изучаемой во втором классе. Составляется эта таблица на основе взаимосвязи компонентов умножения с использованием правила нахождения неизвестного множителя. В связи с тем, что данное правило в явном виде предлагается детям в полной формулировке только в 3 классе, на этапе составления таблицы деления на 3 по-прежнему целесообразнее опираться на предметную модель действия (модель на фланелеграфе или рисунок).

Например:



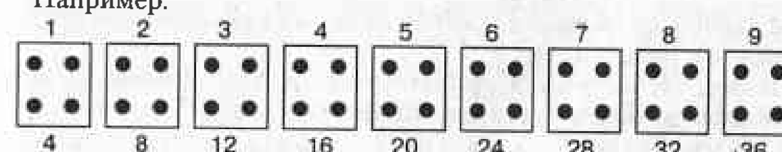
Вычисли и запомни результаты действий. Для проверки используй рисунок:

3 · 3 = ...	9 : 3 = ...	
4 · 3 = ...	12 : 3 = ...	12 : 4 = ...
5 · 3 = ...	15 : 3 = ...	15 : 5 = ...
6 · 3 = ...	18 : 3 = ...	18 : 6 = ...
7 · 3 = ...	21 : 3 = ...	21 : 7 = ...
8 · 3 = ...	24 : 3 = ...	24 : 8 = ...
9 · 3 = ...	27 : 3 = ...	27 : 9 = ...

Использование такого рисунка дает возможность составить и третий, взаимосвязанный с первыми двумя, случай деления (третий столбик). Он не относится к таблице деления на 3, но является членом взаимосвязанной тройки, который легче запоминать, ориентируясь на первые два случая. Такой прием запоминания таблицы деления (ориентир на взаимосвязанную тройку) является удобным мнемоническим приемом. Можно видеть, как дети пользуются им, реально запоминая только один прием действия умножения.

Все остальные таблицы деления изучаются в 3 классе. Поскольку умножение числа 4 и умножение на 4 также изучается уже в 3 классе, на этом году обучения прекращается практика раздельного изучения таблиц умножения и деления. Начиная с таблицы умножения числа 4, взаимосвязанные с ней таблицы деления изучают на одном уроке, сразу составляя четыре взаимосвязанных столбика случаев умножения и деления.

Например:



Вычисли и запомни:

4 · 4 = 16		16 : 4	
4 · 5 = 20	5 · 4	20 : 4	20 : 5
4 · 6 = 24	6 · 4	24 : 4	24 : 6
4 · 7 = 28	7 · 4	28 : 4	28 : 7
4 · 8 = 32	8 · 4	32 : 4	32 : 8
4 · 9 = 36	9 · 4	36 : 4	36 : 9

Используя результаты первого столбика, дети получают второй столбик перестановкой множителей, а результаты третьего и четвертого столбиков — на основе правила взаимосвязи компонентов умножения:

Если произведение разделить на один из множителей, то получится другой множитель.

Все остальные таблицы деления получают аналогичным способом.

3. Приемы запоминания таблицы деления

Приемы запоминания табличных случаев деления связаны со способами получения таблицы деления из соответствующих табличных случаев умножения.

1. Прием, связанный со смыслом действия деления

При небольших значениях делимого и делителя ребенок может либо произвести предметные действия для непосредственного получения результата деления, либо выполнить эти действия мысленно, либо использовать пальцевую модель.

Например: На два окна расставили поровну 10 горшков с цветами. Сколько горшков на каждом окне?

Для получения результата ребенок может воспользоваться любой из упомянутых выше моделей.

При больших значениях делимого и делителя этот прием неудобен. Например: 72 горшка с цветами расставили на 8 окон. Сколько горшков на каждом окне?

Находить результат, используя предметную модель в этом случае неудобно.

2. Прием, связанный с правилом взаимосвязи компонентов умножения и деления

В этом случае ребенок ориентируется на запоминание взаимосвязанной тройки случаев, например:

$7 \cdot 9 = 63$ $\qquad$ $63 : 7 = 9$ $\qquad$ $63 : 9 = 7$

Если ребенку удается хорошо запомнить один из этих случаев (обычно опорный — это случай умножения) или он может получить его с помощью любого из приемов запоминания таблицы умножения, то используя правило «если произведение разделить на один из множителей, то получится второй множитель», легко получить второй и третий табличные случаи.

Лекция 12.

Особые случаи умножения и деления

1. Умножение и деление с 0 и 1.
2. Внетабличное умножение и деление в пределах 100.
3. Деление с остатком.
4. Приемы устных вычислений умножения и деления трехзначных и многозначных чисел.

1. Умножение и деление с 0 и 1

Случаи умножения и деления с 0 и 1 считаются особыми и рассматриваются отдельно от табличных случаев умножения и деления, поскольку они не могут быть объяснены с общих позиций смысла действий умножения и деления. Для обоснования математического смысла этих случаев в определении действия умножения оговорены два дополнения, определяющие способ получения результата в этих случаях.

По определению умножение целых неотрицательных (натуральных) чисел — это действие, выполняющееся по следующим правилам:

$$a \cdot b = a + \underbrace{a + a + a + a}_{b \text{ слагаемых}} \ldots.. + a\text{, при } b > 1$$

$$a \cdot 1 = a\text{, при } b = 1$$
$$a \cdot 0 = 0\text{, при } b = 0$$

Поскольку фраза: «повторяем слагаемые 1 раз» или «повторяем слагаемые 0 раз» не имеет смысла, на общее определение в этом случае не ссылаются, а просто вводят эти случаи по соглашению, т. е. сообщают детям, что умножая любое число на 1 получаем в произведении это же число; а умножая любое число на 0, получаем в произведении 0.

В общем виде эти правила оформляются в буквенном выражении:

$\boxed{a \cdot 1 = a}$ $\qquad$ $\boxed{a \cdot 0 = 0}$

Соответствующие правила предлагаются детям для запоминания:

При умножении любого числа на 1 получается то число, которое умножали.

При умножении любого числа на нуль получается нуль.

Аналогичным образом вводится правило:

На нуль делить нельзя!

В отличие от этих правил, способы деления числа на само себя с получением числа 1 в результате, а также способы умножения числа 1 на любое число и способы умножения числа 0 на любое число возможно объяснить ученику начальной школы, используя имеющиеся у него знания.

Например, для объяснения случая $1 \cdot 7$ обратимся к смыслу действия умножения как суммирования одинаковых слагаемых. В данной записи первый множитель показывает, какое число суммируем, а второй множитель — сколько раз, таким образом:

$1 \cdot 7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7$

Для объяснения случая $0 \cdot 5$ воспользуемся тем же приемом:

$0 \cdot 5 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

Для объяснения случаев вида $a : a = 1$ (если $a \neq 0$), $a : 1 = a$, $0 : a = 0$ следует обратиться к правилу взаимосвязи компонентов умножения и деления.

Например, рассмотрим случай $13 : 13 = ...$

Для получения значения частного воспользуемся правилом: «если значение частного умножить на делитель, то получим делимое». Делитель — число 13, найдем частное *методом подбора* с последующей проверкой по обозначенному правилу.

Единственное число, подбираемое к данному значению частного — это 1, поскольку $1 \cdot 13 = 13$. Значит, $13 : 13 = 1$.

Рассмотрим случай $27 : 1 = ...$

Для получения значения частного воспользуемся правилом: «если значение частного умножить на делитель, то получим делимое». Делитель — число 1, найдем частное *методом подбора* с последующей проверкой по обозначенному правилу.

Единственное число, подбираемое к данному значению частного — это 27, поскольку $27 \cdot 1 = 27$. Значит, $27 : 1 = 27$.

Рассмотрим случай $0 : 8 = ...$

Для получения значения частного воспользуемся правилом: «если значение частного умножить на делитель, то получим делимое». Делитель — число 8, найдем частное *методом подбора* с последующей проверкой по обозначенному правилу.

Единственное число, подбираемое к данному значению частного — это 0, поскольку $0 \cdot 8 = 0$. Значит, $0 : 8 = 0$.

В общем виде эти закономерности оформляются в буквенном виде:

$\boxed{a : a = 1}$ $\boxed{a : 1 = a}$ $\boxed{0 : a = 0}$

и в виде словесного правила:

При делении числа на то же самое число получается 1.
При делении числа на 1 получается то же самое число.
При делении нуля на любое другое число получается 0.

2. Внетабличное умножение и деление в пределах 100

К внетабличным случаям умножения и деления в пределах 100 относят случаи умножения двузначного числа на однозначное ($20 \cdot 3$, $18 \cdot 3$), а также случаи деления двузначного числа на однозначное, не входящие в число табличных ($80 : 4$, $96 : 6$) и случаи деления двузначного числа на двузначное в пределах 100 ($80 : 40$, $96 : 16$). Эти случаи рассматриваются как случаи устных вычислений, и предполагается, что ребенок выполняет их без обращения к письменным алгоритмам вычислений, а лишь используя известные ему правила и законы арифметических действий и знание табличного умножения и деления.

Используемые математические законы и правила

Для подготовки к изучению внетабличного умножения и деления необходимо рассмотреть следующие правила арифметических действий:

1) правило умножения суммы на число и правило умножения числа на сумму;

2) правило деления суммы на число;

3) правило группировки множителей (сочетательное свойство умножения).

Рассмотрим каждое из этих правил и обоснуем их использование при устных внетабличных вычислениях.

Правило умножения суммы на число и правило умножения числа на сумму

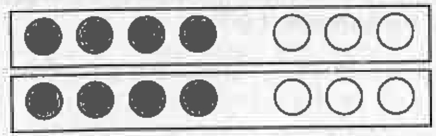
Эти два правила являются двумя вариантами раскрытия смысла распределительного свойства умножения относительно сложения. В буквенном виде эти варианты могут быть записаны следующим образом:

$\boxed{(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c}$ $\boxed{c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b}$

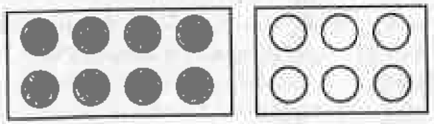
Реально знакомство детей с этими двумя вариантами одного и того же правила разведено во времени почти на целый год: первое правило лежит в основе обучения детей умножению двузначных чисел на однозначные в теме «Внетабличное умножение и деление» в 3 классе, а второе правило лежит в основе способа действия при умножении двузначного числа на двузначное при умножении в столбик в 4 классе.

В основе разъяснения правила умножения суммы на число лежит опора на знание конкретного смысла действия умножения.

Например:



$$(4+3)\cdot 2 = 7\cdot 2 = 14$$



$$(4+3)\cdot 2 = 4\cdot 2 + 3\cdot 2 = 8 + 6 = 14$$

Рассматривая два способа вычисления результатов с опорой на анализ рисунка, дети убеждаются в том, что результат при обоих способах вычислений одинаков.

Следует отметить, что первый способ вычислений не требует специальных объяснений и введения нового правила, поскольку он подчиняется общим требованиям к порядку выполнения действий в выражениях со скобками: *действия в скобках выполняются первыми.*

Особо следует оговорить второй способ, поскольку при таких вычислениях фактически *нарушается установка на выполнение действия в скобках первым.* Именно поэтому при знакомстве детей с этим правилом в 3 классе снова возвращаются к предметным картинкам, позволяющим получить результаты действий пересчетом. В данном случае пересчет фигурок является тем единственным аргументом, который учитель может привести в подкрепление правомочности такого нарушения устоявшегося правила (действие в скобках выполняется первым).

Введение правила таким образом является нестрогим, эмпирическим (т. е. опирающимся на непосредственный практический опыт). Более общие способы доказательства этого закона требуют привлечения сложного математического аппарата и нецелесообразны в начальной школе. Безусловно, такое введение правила не формирует у детей обобщенных представлений о способах раскрытия скобок при вычислениях, однако в начальной школе это и не предполагается. Более того, терминология, содержащая слова «раскрываем скобки», не употребляется в начальной школе вообще. Хотя дети и знакомятся с правилом умножения суммы на число, но применять они его могут только на ограниченном количестве случаев, связанных с внетабличным умножением двузначных чисел на однозначное. Применение того же правила в других обстоятельствах (например, при решении уравнений) не предусмотрено. Так при решении уравнения вида $(x+2)\cdot 3 = 15$ дети не будут применять

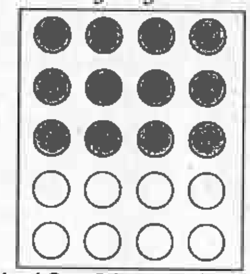
правило умножения суммы на число (это не предусмотрено ни учебником, ни программой, ни методикой) не только в начальной школе, но и в 5—6 классе, а будут использовать правила взаимосвязи компонентов действий умножения и сложения.

Способ решения: $x+2 = 15:3 \quad x+2=5 \quad x=5-2 \quad x=3.$

Правило умножения суммы на число:

Чтобы умножить сумму на число, можно умножить на это число каждое слагаемое и полученные результаты сложить.

Используя аналогичный предметный рисунок, рассматривают *правило умножения числа на сумму:*



$$4\cdot(3+2) = 4\cdot 5 = 20$$
$$4\cdot(3+2) = 4\cdot 3 + 4\cdot 2 = 12 + 8 = 20$$

Анализ предметного рисунка и подсчет фигурок на нем помогает ребенку убедиться в том, что результаты вычислений совпадают, несмотря на разные способы вычислений. Этот способ знакомства с правилом используется в 4 классе также как и в 3 классе использовался предыдущий вариант. Точно также, речь идет не о формировании у ребенка обобщенных представлений о способах действий в выражениях со скобками, а только об использовании данного способа вычислений при письменных вычислениях в столбик.

Правило умножения числа на сумму:

Чтобы умножить число на сумму можно умножить это число на каждое слагаемое и полученные произведения сложить.

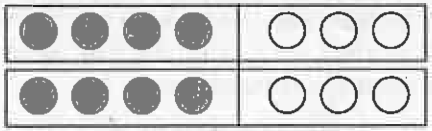
Правило деления суммы на число

Это правило является вариантом раскрытия смысла распределительного свойства деления относительно сложения. В буквенном виде это правило может быть записано следующим образом:

$$\boxed{(a+b):c = a:c + b:c}$$

В основе разъяснения правила деления суммы на число лежит опора на знание конкретного смысла действия деления.

Например:



$$(8 + 6) : 2 = 14 : 2 = 7$$
$$(8 + 6) : 2 = 8 : 2 + 6 : 2 = 4 + 3 = 7$$

Рассматривая два способа вычисления результатов с опорой на анализ рисунка, дети убеждаются в том, что результат при обоих способах вычислений одинаков.

Следует отметить, что первый способ вычислений не требует специальных объяснений и введения нового правила, поскольку он подчиняется общим требованиям к порядку выполнения действий в выражениях со скобками: *действия в скобках выполняются первыми.*

Особо следует оговорить второй способ, поскольку при таких вычислениях фактически *нарушается установка на выполнение действия в скобках первым.* Именно поэтому при знакомстве детей с этим правилом в 3 классе снова возвращаются к предметным картинкам, позволяющим получить результаты действий пересчетом. В данном случае пересчет фигурок является тем единственным аргументом, который учитель может привести в подкрепление правомочности такого нарушения устоявшегося правила (действие в скобках выполняется первым).

Такое введение правила является нестрогим, эмпирическим. Более общие способы доказательства этого закона требуют привлечения сложного математического аппарата и нецелесообразны в начальной школе. Такое введение правила не формирует у детей обобщенных представлений о способах раскрытия скобок при вычислениях, что в начальной школе и не предполагается. Хотя дети и знакомятся с правилом деления суммы на число, но применять они его могут только на ограниченном количестве случаев, связанных с внетабличным делением двузначных чисел на однозначные. Применение того же правила в других обстоятельствах (например, при решении уравнений) не предусмотрено. Так при решении уравнения вида $(x + 6) : 3 = 5$ дети не будут применять правило деления суммы на число (это не предусмотрено ни учебником, ни программой, ни методикой) не только в начальной школе, но и в 5—6 классе, а будут использовать правила взаимосвязи компонентов действий умножения и сложения.

Способ решения: $x + 6 = 5 \cdot 3 \quad x + 6 = 15 \quad x = 15 - 6 \quad x = 9$

Правило деления суммы на число:

Чтобы разделить сумму на число, можно разделить на это число каждое слагаемое и полученные результаты сложить.

Правило группировки множителей (сочетательное свойство умножения)

Правило группировки множителей (сочетательное свойство умножения) представлено в учебнике как *правило умножения числа на произведение.* Это правило позволяет научить детей новым способам действия при выполнении устных внетабличных вычислений. В буквенном виде правило может быть представлено следующим образом:

$$\boxed{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot c) \cdot b}$$

В основе его разъяснения лежит конкретный смысл действия умножения и правило перестановки множителей. В учебнике 4 класса для разъяснения этого свойства используется такой рисунок:

$$(5 \cdot 2) \cdot 4 = 40$$
$$5 \cdot (4 \cdot 2) = 40$$
$$(5 \cdot 4) \cdot 2 = 40$$

Рассматривая три способа вычисления результатов с опорой на анализ рисунка, дети убеждаются в том, что результат при всех способах вычислений одинаковый.

Формулируется правило:

Умножить число на произведение можно разными способами:

1) Вычислить произведение и умножить на него число:
$6 \cdot (3 \cdot 4) = 6 \cdot 12 = 72$

2) Умножить число на первый множитель и результат умножить на второй множитель:

$6 \cdot (3 \cdot 4) = (6 \cdot 3) \cdot 4 = 18 \cdot 4 = 72$

3) Умножить число на второй множитель и результат умножить на первый множитель:

$6 \cdot (3 \cdot 4) = (6 \cdot 4) \cdot 3 = 24 \cdot 3 = 72$

Фактически все три данные правила могут быть заменены более короткой общей формулировкой:

Произведение двух соседних множителей можно заменить его значением.

Или:

Чтобы найти произведение нескольких множителей, их можно перемножить в любом порядке.

Методически данное правило имеет целью подготовить ребенка к знакомству со способами умножения в столбик чисел, оканчивающихся нулями, поэтому с ним знакомятся только в четвертом классе. Реально данное свойство умножения позволяет рационализировать устные вычисления как во 2, так и в 3 классе.

Например:

Вычисли: $(7 \cdot 2) \cdot 5 = ...$

В данном случае намного легче вычислить вариант $7 \cdot (2 \cdot 5) = 7 \cdot 10 = 70$.

Вычисли: $12 \cdot (5 \cdot 7) = ...$

В данном случае намного легче вычислить вариант $(12 \cdot 5) \cdot 7 = 60 \cdot 7 = 420$.

Приемы вычислений

1. Умножение и деление чисел, оканчивающихся нулем: 20 · 3; 3 · 20; 60 : 3; 80 : 20

Вычислительный прием в данном случае сводится к умножению и делению однозначных чисел, выражающих число десятков в заданных числах.

Например:

$20 \cdot 3 = ...$	$3 \cdot 20 = ...$	$60 : 3 = ...$
2 дес. · 3 =	$20 \cdot 3 = 60$	6 дес. : 3 = 2 дес.
$20 \cdot 3 = 60$	$3 \cdot 20 = 60$	$60 : 3 = 20$

Для случая 80 : 20 может быть использовано два способа вычислений: тот, что использовался в предыдущих случаях, и способ подбора частного.

Например:	$80 : 20 = ...$		$80 : 20 = ...$
	8 дес. : 2 дес. = 4	или	$20 \cdot 4 = 80$
	$80 : 20 = 4$		$80 : 20 = 4$

В первом случае использовался прием представления двузначных десятков в виде разрядных единиц, что сводит рассматриваемый случай к табличному (8 : 2). Во втором случае цифра частного находится подбором и проверяется умножением. Во втором случае ребенок возможно не сразу подберет верную цифру частного, это означает, что проверка будет выполнена не один раз.

2. Прием умножения двузначного числа на однозначное: 23 · 4; 4 · 23

При умножении двузначного числа на однозначное актуализируются следующие знания и умения:

$$\underbrace{23 \cdot 4 = (20 + 3) \cdot 4}_{\text{разрядный состав числа}} = \underbrace{20 \cdot 4 + 3 \cdot 4}_{\text{свойство умножения суммы на число}} = \underbrace{80 + 12 = 92}_{\text{сложение двузначных чисел}}$$

$$\underbrace{20 \cdot 4}_{\text{умножение целых десятков}} + \underbrace{3 \cdot 4}_{\text{таблица умножения}}$$

В случае умножения вида 4 · 23 сначала применяется перестановка множителей, а затем та же схема умножения, что и выше.

3. Прием деления двузначного числа на однозначное: 48 : 3; 48 : 2

При делении двузначного числа на однозначное актуализируются следующие знания и умения:

$$48 : 3 = \underbrace{(30 + 18)}_{\text{«удобные» слагаемые}} : 3 = \underbrace{30 : 3 + 18 : 3}_{\text{свойство деления суммы на число}} = \underbrace{10 + 6 = 16}_{\text{«разрядное» сложение}}$$

$$\underbrace{30 : 3}_{\text{деление целых десятков}} \qquad \underbrace{18 : 3}_{\text{табличное деление}}$$

В случае $48 : 2 = \underbrace{(40 + 8)}_{\text{разрядные слагаемые}} : 2$, а дальше аналогично предыдущему случаю.

4. Прием деления двузначного числа на двузначное: 68 : 17

При делении двузначного числа на двузначное необходимы следующие знания и умения:

$$68 : 17 =$$

Прием подбора частного ⟷ Связь деления и умножения

$$\underbrace{2 \cdot 17 = 17 \cdot 2}_{\text{коммутативность умножения}} = 34 < 68$$

$$3 \cdot 17 = \underbrace{17 \cdot 3 = 51}_{\text{умножение двузначного на однозначное}} \underbrace{< 68}_{\text{сравнение двузначных чисел}}$$

$$4 \cdot 17 = 17 \cdot 4 = 68$$

$$68 : 17 = 4$$

Сложность последнего приема состоит в том, что ребенок не может сразу подобрать нужную цифру частного и выполняет несколько проверок подобранных цифр, что требует достаточно сложных вычислений. Многие дети тратят много времени на выполнение вычислений этого вида, поскольку начинают не столько подбирать подходящую цифру частного, сколько перебирают все множители подряд, начиная с двух.

С целью облегчения вычислений могут быть использованы два приема:

1) ориентировка на последнюю цифру делимого;

2) прием округления.

Первый прием предполагает, что при подборе возможной цифры частного ребенок ориентируется на знание таблицы умножения, сразу перемножая подобранную цифру (число) и последнюю цифру *делителя*.

Например, $3 \cdot 7 = 21$. Последняя цифра числа 68 — это 8, значит нет смысла умножать 17 на 3, последняя цифра делителя все равно не совпадает. Пробуем в частном число 4 — умножаем $7 \cdot 4 = 28$. Последняя цифра совпадает, значит имеет смысл найти произведение $17 \cdot 4$.

Второй прием предполагает округление делителя и подбор цифры частного с ориентиром на округленный делитель.

Например, $68 : 17$ делитель 17 округляется до 20. Примерная цифра частного 3 дает при проверке $20 \cdot 3 = 60 < 68$, значит имеет смысл сразу проверять в качестве цифры частного 4: $17 \cdot 4 = 68$.

Эти приемы позволяют сократить затраты сил и времени при выполнении вычислений данного вида, но требуют хорошего знания таблицы умножения и *умения округлять числа*.

> ***Целые числа, оканчивающиеся цифрами 0, 1, 2, 3, 4, округляют до ближайшего целого десятка, отбрасывая эти цифры.***

Например, числа 12, 13, 14 следует округлять до 10. Числа 62, 63, 64 округляют до 60.

> ***Целые числа, оканчивающиеся цифрами 5, 6, 7, 8, 9, округляют до ближайшего целого десятка в большую сторону.***

Например, числа 15, 16, 17, 18, 19 округляют до 20. Числа 45, 47, 49 округляют до 50.

Порядок действий в выражениях, содержащих умножение и деление

Правила порядка выполнения действий задают основные признаки выражений, на которые следует ориентироваться при вычислении их значений.

Первые правила, определяющие порядок действий в арифметических выражениях, задавали порядок действий в выражениях, содержащих действия сложения и вычитания:

> ***1. В выражениях без скобок, содержащих только действия сложения и вычитания, действия выполняются в том порядке, как они записаны: слева направо.***
> ***2. Действия в скобках выполняют первыми.***
> ***3. Если выражение содержит только действия сложения, то два соседних слагаемых всегда можно заменить их суммой (сочетательное свойство сложения).***

В 3 классе изучаются новые правила порядка выполнения действий в выражениях, содержащих умножение и деление:

> ***4. В выражениях без скобок, содержащих только умножение и деление, действия выполняются в том порядке, как они записаны: слева направо.***
> ***5. В выражениях без скобок умножение и деление выполняются раньше, чем сложение и вычитание.***

При этом установка на *выполнение действия в скобках первым* сохраняется. Возможные случаи нарушения этой установки были оговорены ранее.

Правила порядка выполнения действий являются общими правилами вычислений значений математических выражений (примеров), которые сохраняются на протяжении всего периода изучения математики в школе. В связи с этим формирование у ребенка четкого понимания алгоритма порядка выполнения действий является важной преемственной задачей обучения математике в начальной школе. Проблема заключается в том, что правила порядка выполнения действий являются достаточно вариативными и не всегда однозначно заданными.

Например, в выражении $48 - 3 + 7 + 8$ следует по общей установке применять правило 1 для выражения без скобок, содержащего действия сложения и вычитания. В то же время, как вариант рациональных вычислений, можно использовать прием замены суммой части $7 + 8$, поскольку после вычитания числа 3 из 48 получится 45, к чему удобно прибавить 15.

Однако подобный разбор такого выражения в начальных классах не предусмотрен, поскольку есть опасения, что при неадекватном понимании такого подхода ребенок будет применять его в случаях вида $72 - 9 - 3 + 6$. В данном случае замена выражения $3 + 6$ суммой невозможна, она приведет к неверному ответу.

Большая вариативность в применении всей группы правил и вариантов правил при определении порядка действий требует значительной гибкости мышления, хорошего понимания смысла математических действий, последовательности мыслительных действий, математического «чутья» и интуиции (математики называют это «чувство числа»). Реально намного проще приучить ребенка жестко соблюдать четко установленный порядок анализа числового выражения с точки зрения тех признаков, на которые ориентировано каждое правило.

Определяя порядок действий, рассуждай так:
1) Если есть скобки, выполняю первым действие, записанное в скобках.
2) Выполняю по порядку умножение и деление.
3) Выполняю по порядку сложение и вычитание.

Данный алгоритм задает порядок действий достаточно однозначно, хотя и с небольшими вариациями.

Например:

$100 \overset{2}{-} 21 \overset{1}{:} 3 = 100 - 7 = 93$ $\qquad 60 \overset{2}{+} 9 \overset{1}{\cdot} 3 = 60 + 27 = 87$

$30 \overset{3}{+} 6 \overset{2}{\cdot} (13 \overset{1}{-} 9) = 30 + 6 \cdot 4 = 30 + 24 = 54$

В этих выражениях порядок действий определен алгоритмом однозначно и является единственно возможным.

Приведем другие примеры:

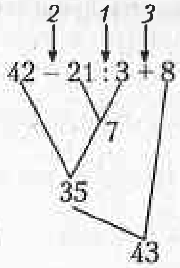
$54 \overset{3}{+} 6 \overset{1}{\cdot} 3 \overset{4}{-} 72 \overset{2}{:} 8 \overset{5}{+} 6 = 54 + 18 - 72 : 8 + 6 = 54 + 18 - 9 + 6 = 72 - 9 + 6 = 63 + 6 = 69$

После выполнения умножения и деления в данном примере можно было сразу к 54 прибавить 6, а из 18 вычесть 9, после чего результаты сложить. Технически было бы значительно легче, чем путь, обусловленный алгоритмом, возможен изначально другой порядок действий в примере:

$54 \overset{3}{+} 6 \overset{2}{\cdot} 3 \overset{4}{-} 72 \overset{1}{:} 8 \overset{5}{+} 6$ — этот путь не противоречит алгоритму, хотя также не является рациональным.

Таким образом, вопрос о формировании умения определять порядок действий в выражениях в начальной школе определенным образом противоречит необходимости обучать ребенка способам рациональных вычислений.

Например, в случае порядок действий определен алгоритмом абсолютно однозначно, при этом требует от ребенка сложнейших вычислений в уме с переходами через разряд: 42 – 7 и 35 + 8.



Если же после выполнения деления 21 : 3, выполнить сложение 42 + 8 = 50, а затем вычитание 50 – 7 = 43, что намного легче технически, ответ будет тот же. Этот путь вычислений противоречит установке данного в учебнике алгоритма, хотя и является рациональным.

В общем можно сказать, что изменять порядок действий, оговоренный правилом, можно только в тех случаях, когда это позволяют законы сложения и умножения (сочетательный и распределительный). Для того, чтобы научить ребенка распознавать такие случаи, необходимо реализовать при обучении математике специальную систему формирования *рациональных вычислений*. Одним из элементов этой системы является знакомство ребенка с признаками делимости чисел.

Признаки делимости

Признаки делимости как таковые не рассматриваются в начальной школе специально. Единственным признаком делимости, рассматриваемым в новом учебнике математики можно считать понятие о четности натуральных чисел в учебнике 3 класса:

Числа, которые делятся на 2, называются четными, а числа, которые не делятся на 2, — нечетными.

Однако целью введения данного определения является не столько знакомство детей с одним из признаков делимости (являющимися крайне полезными с точки зрения формирования вычислительных умений и рациональных вычислений), что видно из формы построения определения, а знакомство детей с еще одним математическим термином (понятием), определенным по соглашению (методом сообщения ребенку термина и его значения).

Умение применять признаки делимости для рационализации вычислений является важным и полезным умением перспективного характера, сохраняющим свою ценность в старших классах.

Признак делимости на 2:
Если последняя цифра числа делится на 2, то и само число разделится на 2.

Например:
49 – последняя цифра 9 на 2 не делится, значит, и все число на 2 не разделится.
12 345 678 – последняя цифра 8 на 2 делится, значит, и все число на 2 разделится.
12 345 678 : 2 = 6 172 839

Признак делимости на 3:
Если сумма цифр числа делится на 3, то и само число разделится на 3.

Например:
375 – сумма цифр 3 + 7 + 5 = 15 делится на 3, значит, и само число разделится на 3.
375 : 3 = 125.
679 – сумма цифр 6 + 7 + 9 = 22 не делится на 3, значит, и само число не разделится на 3.

Признак делимости на 4:
Если две последние цифры числа образуют число, делящееся на 4, то и само число разделится на 4.

Например:
3732 – две последние цифры образуют число 32, которое делится на 4, значит число 3732 разделится на 4. 3732 : 4 = 933.
Число 3700 также разделится на 4, поскольку две последние цифры – это нули, а нуль делится на любое число. 3700 : 4 = 925.

Признак делимости на 5:
Если число оканчивается на 0 или на 5, то оно делится на 5.

Например:
3700 – делится на 5, 3705 – делится на 5, а 3703 – не делится на 5.

Признак делимости на 9:
Если сумма цифр числа делится на 9, то и само число разделится на 9.

Например:
7245 – сумма цифр 7 + 2 + 4 + 5 =18 делится на 9, значит и само число разделится на 9. 7245 : 9 = 805.
7234 – сумма цифр 7 + 2 + 3 + 4 = 16 не делится на 9, значит и само число не разделится на 9.

Признак делимости на 10:
Если число оканчивается цифрой 0, то оно разделится на 10.

Это единственный признак делимости, рассмотренный в учебнике математики для 4 класса в виде: «Чтобы число разделилось без остатка на 10, достаточно, чтобы в его записи на конце был хотя бы один нуль».

Следует отметить, что данное требование не только достаточное условие, но и необходимое.

Как следствие этого признака делимости, можно рассматривать *признак делимости без остатка на 100 (1 000)*: для делимости числа на разрядную единицу нужно, чтобы число имело такое же количество нулей на конце.

Признак делимости на 6:
Если число делится одновременно на 2 и на 3, то оно разделится на 6.

Аналогичным образом можно определить делимость на 8. Она следует из одновременной делимости на 2 и на 4.

Вопрос о делимости натуральных чисел предполагает, что речь идет о делении нацело, т. е. без остатка. Таким образом, он предваряет знакомство детей с понятием «деление с остатком».

3. Деление с остатком

Тема «Деление с остатком» предваряет знакомство с письменным алгоритмом деления (в столбик). С математической точки зрения деление с остатком является более общим случаем, чем деление без остатка. Деление без остатка получается в случае равенства остатка нулю. Однако в связи с тем, что в начальной школе действие деления рассматривается как действие, обратное умножению, дети сначала знакомятся с делением без остатка, а затем с делением с остатком.

Конкретный смысл действия деления в общем смысле раскрывается в процессе выполнения операций с предметными множествами: разбиении множества на равночисленные подмножества. При таких операциях не всегда возможно получение равночисленных подмножеств. Для того чтобы продемонстрировать это детям, учитель снова вынужден возвращаться к предметным действиям, манипулируя небольшим количеством предметов, чтобы продемонстрировать детям возможность получения неделимого остатка.

Например:

17 карандашей разложили в три коробки поровну. Сколько карандашей в каждой коробке?

Выполняя предметные действия в соответствии с заданной ситуацией, дети убеждаются в том, что выполнить такое разбиение множества карандашей невозможно. Остаются 2 карандаша, которые нельзя распределить поровну в три коробки.

На основании выполнения подобных заданий, учитель вводит новую запись, позволяющую определить роль оставшихся в процессе распределения предметов:

17 : 3 = 5 (остаток 2) и поясняет, что действие, записанное таким образом называют *«деление с остатком»*.

В данной записи: 17 — делимое, 3 — делитель, 5 — *неполное частное* от деления 17 на 3, 2 — остаток.

Для проверки правильности выполненного деления следует:

1. Умножить неполное частное на делитель ($5 \cdot 3$).

2. К полученному произведению прибавить остаток ($15 + 2 = 17$).

В буквенном выражении данные операции соответствуют общему правилу деления с остатком:

$$a : b = q \text{ (ост. } p\text{), тогда } a = q \cdot b + p$$

В общем виде правило деления с остатком в начальной школе не рассматривается.

Основное требование к делению с остатком:

При делении остаток всегда должен быть меньше делителя.

Это основное требование к делению с остатком. При выполнении деления с остатком всегда следует проверять выполнимость этого требования по завершении деления. Если остаток получился больше делителя, это означает, что деление выполнено неверно.

Например, при делении любого числа на 7 остаток может быть 1, 2, 3, 4, 5, 6. Но не может быть 8 или 9.

Для закрепления понимания данной закономерности учитель предлагает детям задания вида:

1. Какой остаток может получиться при делении натурального числа на 2; на 3; на 6?

Ответ: При делении на 2 остаток может быть только 1; при делении на 3 — остаток может быть 2 и 1; при делении на 6 остаток может быть 1, 2, 3, 4, 5.

2. Ученик выполнил деление 144 : 15 = 8 (ост. 24). В чем заключается его ошибка? Исправьте ошибку.

Ответ: Остаток должен быть меньше делителя, а в данном случае $24 > 15$, значит, деление выполнено неверно.

3. Найдите делимое в примерах:

$a : 12 = 3$ (ост. 1) $b : 26 = 7$ (ост. 4)

Ответ: По общему правилу деления с остатком

$a = 12 \cdot 3 + 1 = 36 + 1 = 37$

$b = 26 \cdot 7 + 4 = 182 + 4 = 186.$

4. Найдите делители в примерах:

$56 : a = 11$ (ост. 1) $93 : b = 2$ (ост. 3)

Ответ: По общему правилу деления с остатком

$a \cdot 11 + 1 = 56$; $a \cdot 11 = 56 - 1$; $a \cdot 11 = 55$; $a = 55 : 11$; $a = 5$

$b \cdot 2 + 3 = 93$; $b \cdot 2 = 93 - 3$; $b \cdot 2 = 90$; $b = 90 : 2$; $b = 45$

Для нахождения результатов деления с остатком в начальной школе используют *два основных приема*:

1) При делении вида 27 : 5 основным приемом нахождения результата является *опора на таблицу умножения*. В качестве неполного частного подбирается такое значение множителя, чтобы при умножении на 5 (на делитель) получалось число, ближайшее к 27 (делимому). В данном случае — это число 5. Остаток в таком случае равен 2, что удовлетворяет основному требованию к делению с остатком.

Например:

Раздели 34 : 9.

Подбираем значение частного так, чтобы при умножении его на 9 получилось число, ближайшее к 34. Это 3. Проверим $9 \cdot 3 = 27$. Найдем остаток $34 - 27 = 7$. Сравним его с делителем $7 < 9$.

Значит, 34 : 9 = 3 (ост. 7).

Если ребенок лучше помнит таблицу деления, то можно ориентироваться на нее. В этом случае рассуждения будут несколько иными.

Например:

Раздели 34 : 9.

Вспомним самое большое число до 34, которое делится на 9. Это 27.

27 : 9 = 3. Проверим остаток: $34 - 27 = 7$. $7 < 9$, значит, деление выполнено верно.

34 : 9 = 3 (ост. 7)

2) При делении с остатком вида 85 : 15 применяется *прием подбора частного с проверкой*, поскольку этот случай не может опираться на знание табличного умножения или деления. В этом случае примерную цифру частного следует проверять умножением до тех пор, пока не подберется цифра, умножение которой на делитель даст в результате число, близкое к делимому.

Например:

Раздели 85 : 15.

При подборе цифр частного следует применять все рациональные приемы, оговоренные ранее. В данном случае можно использовать прием округления: число 15 округляем до 20 и сразу проверяем цифру 4: $20 \cdot 4 = 80 < 85$ — не подходит. Проверяем цифру 5 сразу на делителе: $15 \cdot 5 = 75$. Находим остаток: $85 - 75 = 10 < 15$.

Значит деление закончено и выполнено верно: 85 : 15 = 5 (ост. 10).

В новом учебнике математики для 3 класса рассмотрен *особый случай* вида 3 : 4. Рассмотрение таких случаев является необходимой подготовкой к обучению делению в столбик, поскольку могут попадаться случаи, когда неполное делимое не делится на делитель, и в этом случае в частном в данном разряде записывается 0.

Например:

Раздели 612 : 6.

При делении данного числа имеем 6 сот. : 6 = 1 сот.

1 дес. нельзя разделить на 6 так, чтобы в частном получились десятки, поэтому в разряде десятков запишем 0, добавим к 1 дес. еще 2 ед. и разделим 12 : 6 = 2.

2 единицы запишем в разряд единиц. Таким образом 612 : 6 = 102.

Выполнить этот случай письменного деления невозможно с полным осознанием смысла процесса, если ребенок не знаком со случаями получения нулей в неполном частном.

Для знакомства с этими случаями рассматривают деление вида 3 : 4.

Рассуждают следующим образом: 3 нельзя разделить на 4 так, чтобы получить целые единицы в частном, поэтому в частном запишем 0, а неразделенное число 3 запишем в остаток:

3 : 4 = 0 (ост. 3)

В новом учебнике математики для 3 класса при знакомстве с делением с остатком вводится новый вид записи действия деления — «уголок»:

$$\begin{array}{r|l} -\,3 & 4 \\ \cline{2-2} \underline{0} & 0 \\ 3 & \end{array}$$

Этот вид записи ребенок будет в дальнейшем использовать при письменном делении. Здесь эта запись используется в ознакомительном плане.

4. Приемы устных вычислений умножения и деления трехзначных и многозначных чисел

Приемы устных вычислений с трехзначными и многозначными числами касаются действий умножения и деления с числами, оканчивающимися нулями.

Прием вычислений для случаев вида 200 · 3; 800 : 4; 800 : 200

В этом случае целые сотни (или тысячи в примерах вида 4 000 · 3) рассматриваются как разрядные единицы, что позволяет свести эти случаи к табличному умножению и делению:

200 · 3	800 : 4	800 : 400
2 сот. · 3 = 6 сот.	8 сот. : 4 = 2 сот.	8 сот. : 4 сот. = 2
200 · 3 = 600	800 : 4 = 200	800 : 400 = 2

Прием вычисления для случаев вида 70 · 6; 320 : 8; 4 800 : 800

В этом случае целые десятки (или сотни) также рассматриваются как разрядные единицы, что позволяет свести эти случаи либо к табличному умножению и делению, либо применять к ним приемы устного внетабличного умножения и деления в пределах 100.

Например:

70 · 6	320 : 8	4 800 : 800
7 дес. · 6 = 42 дес.	32 дес. : 8 = 4 дес.	48 сот. : 8 сот. = 6
70 · 6 = 420	320 : 8 = 40	4 800 : 800 = 6

При хорошем владении разрядным и десятичным составом чисел дети без труда осваивают эти приемы самостоятельно. Для подведения ребенка к осознанию смысла этих приемов можно использовать примеры — помощники:

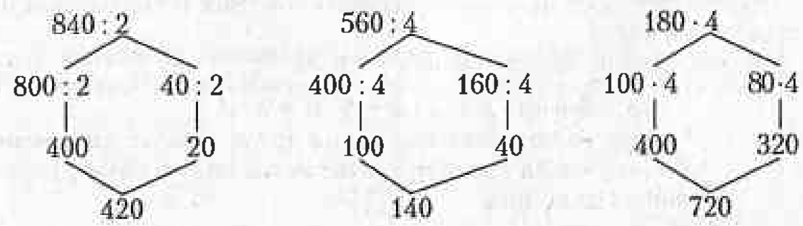
Например:

Вычисли:	4 · 7	40 · 70	140 : 2
	40 · 7	14 : 2	140 : 20

Прием вычисления для случаев вида 840 : 2; 560 : 4; 303 · 2; 180 · 4

В подобных случаях необходимо использовать как знание десятичного состава чисел, так и приемы устного внетабличного умножения и деления в пределах 100.

Например:



Приемы умножения и деления на разрядную единицу (умножения и деления на 10, 100, 1 000)

Умножение на разрядную единицу переводит число в следующие разряды. Технически такое умножение добавляет нули справа в запись числа, что увеличивает количество содержащихся в нем разрядов на количество добавленных нулей.

Например:

$65 \cdot 1\underline{0} = 65\underline{0}$ $43 \cdot 1\underline{00} = 4\ 3\underline{00}$ $75 \cdot 1\ \underline{000} = 75\ \underline{000}$

Делить на 10, 100, 1 000 в области натуральных чисел можно только числа, содержащие соответствующее количество младших разрядов, не имеющих значащих цифр. Технически при этом как бы убирают соответствующее количество нулей справа, начиная с последнего.

Например:

$65\underline{0} : 1\underline{0} = 65$ $8\ 6\underline{00} : 1\underline{00} = 86$ $71\ \underline{000} : 1\ \underline{000} = 71$

$4\ 50\underline{0} : 1\underline{0} = 450$ $123\ 0\underline{00} : 1\underline{00} = 1\ 230$

Во всех остальных случаях деления на разрядную единицу в области натуральных чисел будет получаться деление с остатком.

Например:

642 : 10 = 64 (ост. 2) 5 140 : 100 = 51 (ост. 40)

Лекция 13.
Письменное умножение и деление

1. Умножение в столбик.
2. Деление в столбик.

1. Умножение в столбик

Используемые математические законы и правила

Вычисления произведения многозначного числа на однозначное или многозначного числа на многозначное требует применения письменных приемов вычислений (письменного алгоритма). Этот алгоритм построен на основе законов сложения и умножения натуральных чисел.

Правило умножения суммы на число:

$$(a + b + c) \cdot d = a \cdot d + b \cdot d + c \cdot d$$

При умножении суммы на число можно умножить на это число каждое слагаемое и полученные результаты сложить.

В качестве суммы рассматривается трехзначное (многозначное) число, представляемое в виде суммы разрядных слагаемых. Умножение таким образом представленного многозначного числа на однозначное выполняется в соответствии с правилом умножения суммы на число.

Например:

$125 \cdot 3 = (100 + 20 + 5) \cdot 3 = 100 \cdot 3 + 20 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 300 + 60 + 15 = 375$

Переводя данный способ умножения в запись «столбиком», получаем письменный прием (алгоритм) умножения на однозначное число.

Правило умножения числа на сумму:

$$a \cdot (b + c + p) = a \cdot b + a \cdot c + a \cdot p$$

При умножении числа на сумму можно умножить это число на каждое слагаемое и полученные результаты сложить.

Это правило является основой приема умножения многозначного числа на многозначное. Первый множитель — это число, умножаемое на сумму. В качестве суммы в этом случае рассматривается второй множитель, представляемый в виде разрядной суммы. Умножение многозначного числа на многозначное выполняется в соответствии с правилом умножения числа на сумму.

Например:

$123 \cdot 212 = 123 \cdot (200 + 10 + 2) = 123 \cdot 200 + 123 \cdot 10 + 123 \cdot 2 =$
$= 24\ 600 + 1\ 230 + 246 = 26\ 076$

Переводя данный способ умножения в запись «столбиком», получаем письменный прием (алгоритм) умножения на многозначное число.

Приемы вычислений

Письменное умножение на однозначное число

Записать умножение столбиком можно подробно.

Например:

$$\begin{array}{r} \times\,327 \\ 8 \\ \hline 56 \\ +\,160 \\ 2400 \\ \hline 2616 \end{array}$$

Но обычно используется краткая запись, поскольку главным достоинством письменных приемов умножения является краткость записи вычислений:

$$\begin{array}{r} \times\,327 \\ 8 \\ \hline 2616 \end{array}$$

Сложность состоит в том, что достоинства этого приема на первых порах составляют главную проблему его усвоения, поскольку все опущенные в короткой записи промежуточные вычисления необходимо выполнять в уме (устно), запоминая при этом промежуточные результаты (сколько и каких единиц нужно прибавить к следующему разряду).

Учебник математики для 3 класса содержит подробное описание процесса умножения «в столбик», пошагово оговаривающее каждое умственное действие по выполнению умножения и сложения получаемых отдельных сумм:

1. Умножаю единицы: $7 \cdot 8 = 56$, 56 это 5 дес. и 6 ед.

2. 6 ед. пишу под единицами, а 5 дес. *запоминаю* и *прибавляю* их к десяткам *после умножения десятков*.

3. Умножаю десятки: 2 дес. $\cdot$ 8 = 16 дес. К 16 дес. прибавляю 5 дес., которые были получены при умножении единиц:

16 дес. + 5 дес. = 21 дес. — это 2 сот. и 1 дес. Пишу 1 дес. под десятками, а 2 сот. запоминаю и прибавляю их к сотням после умножения сотен.

4. Умножаю сотни: 3 сот. $\cdot$ 8 = 24 сот. К 24 сот. прибавляю 2 сот., которые были получены при умножении десятков.

24 сот. + 2 сот. = 26 сот. — это 2 тыс. и 6 сот. Пишу 6 сот. под сотнями, 2 тыс. под тысячами.

Читаю ответ: 2 616.

Для прочного усвоения письменных приемов умножения ребенок должен:

1. Запомнить правильную запись: разряд записывается под соответствующим разрядом.

2. Запомнить правильный порядок выполнения действия: умножение начинаем с младших разрядов (справа налево).

3. Овладеть технологией запоминания и добавления излишних разрядных единиц, получаемых при умножении однозначных чисел, в следующий по старшинству разряд.

Для облегчения (на первых уроках) письменного приема умножения можно:

1) производить подробную, а не сокращенную запись приема. В этом случае выполнять сложение можно по записям неполных произведений, а не в уме, запоминая излишние разрядные единицы (использование этого приема рекомендуется для детей, плохо считающих в уме);

2) производить запись промежуточных вычислений рядом с примером или на черновике — в этом случае все необходимые для запоминания и добавочного прибавления разрядные единицы будут зафиксированы, и ребенок не будет их «терять».

Например:

$$\begin{array}{r} \times\,125 \\ 3 \\ \hline 375 \end{array}$$

5 ед. $\cdot$ 3 = 15 ед. 15 ед. = 1 дес. + 5 ед.

2 дес. $\cdot$ 3 = 6 дес. 6 дес. + 1 дес. = 7 дес.

1 сот. $\cdot$ 3 = 3 сот.

Такая запись часто кажется человеку, владеющему алгоритмом письменного умножения, излишней, слишком подробной. Даже учителя редко пользуются указанными приемами помощи ребенку. Однако следует обратить внимание на то, что взрослый человек (особенно тот, кто учился в «докалькуляторную эпоху») имеет очень большую практику употребления этого алгоритма и, естественно, он уже, как говорят педагоги, автоматизировался, т. е. взрослый человек часто не задумывается над процессом его применения. Ребенку, который только начинает этому учиться намного труднее, особенно, если он при этом не очень тверд в таблице умножения и сложении двузначных чисел в уме.

Письменное умножение на двузначное (и многозначное) число опирается на правило умножения числа на сумму. Прием письменного умножения на двузначное число можно записать подробно:

$$329 \cdot 24 = 329 \cdot (20 + 4) = 329 \cdot 20 + 329 \cdot 4 = 6580 + 1316 = 7896$$

или кратко (в столбик):

$$\begin{array}{r} \times\,329 \\ 24 \\ \hline +\,1316 \\ 658 \\ \hline 7896 \end{array}$$

Число 1316 называют *первым неполным произведением*, число 6580 называют *вторым неполным произведением*. Последний нуль (в разряде единиц) в записи числа 6580 при вычислениях в столбик опускают, лишь подразумевая его, для скорости записи. При этом цифру 8 (количество десятков) записывают в разряде десятков (таким образом, второе неполное произведение записывается со сдвигом влево на одну позицию).

Аналогично производится вычисление и запись умножения на трехзначное число:

$$\begin{array}{r} \times\,382 \\ 729 \\ \hline 3438 \\ +\,764 \\ 2674 \\ \hline 278478 \end{array}$$

В этом случае имеем три неполных произведения:

382 · 700 = **267 400** — результат умножения числа 382 на число единиц;

382 · 20 =**7 640** — результат умножения числа 382 на число десятков;

382 · 9 = **3 438** — результат умножения числа 382 на число сотен.

Результат умножения 382 · 729 дает сумма этих неполных произведений.

Записи последних нулей в неполных произведениях при вычислениях в столбик опускаются для экономичности записи, однако они подразумеваются, что показано сдвигом влево на один разряд каждого следующего неполного произведения.

Технически, несмотря на экономичный способ записи, выполнение умножения многозначного числа на двузначное или трехзначное число — процесс сложный и трудоемкий, требующий не только знания способов записи и порядка выполнения действий при письменных вычислениях, но и прочного знания таблицы умножения (до автоматизма), а также умения производить сложение двузначных и однозначных чисел в уме.

Особые случаи

В качестве особых случаев рассматривают случаи умножения целых чисел (чисел с нулями) вида: 35 · 20; 532 · 300; 2540 · 400.

В основе умножения в этих случаях лежит правило умножения числа на произведение (сочетательное свойство умножения): $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b$.

Например:

$35 \cdot 20 = 35 \cdot (2 \cdot 10) = (35 \cdot 2) \cdot 10 = 70 \cdot 10 = 700$

$2\,540 \cdot 400 = 2\,540 \cdot (4 \cdot 100) = (2\,540 \cdot 4) \cdot 100 = 10\,160 \cdot 100 = 1\,016\,000$

Письменное умножение чисел с нулями рассматривается отдельно в связи с тем, что при записи таких вычислений в столбик происходит *нарушение общего правила записи чисел при письменном умножении.*

Записывают такие случаи следующим образом:

$$\times\begin{array}{r}243\\ 20\\ \hline 4\,860\end{array}\qquad \times\begin{array}{r}532\\ 300\\ \hline 159\,600\end{array}\qquad \times\begin{array}{r}2\,540\\ 400\\ \hline 1\,016\,000\end{array}$$

При этом уже *не соблюдается* установка: «записываем разряд под соответствующим разрядом». Записывают одну под другой значащие цифры множителей. Например, в последнем случае значащая цифра 4 (число сотен) второго множителя записывается под значащей цифрой 4 (число десятков) первого множителя. Далее

умножение производится по принципу «многозначное число умножаем на однозначное», а результат домножается в уме на количество десятков и сотен в множителях. Технически это выглядит как дописывание к результату справа такого же количества нулей, как в обоих множителях.

Сложные случаи письменного умножения

К сложным случаям письменного умножения относят все случаи вычислений, в которых происходит либо нарушение способа записи (для краткости вычислений), либо нарушение порядка выполнения алгоритма.

В общем случае при записи умножения в столбик следует записывать разряд под соответствующим разрядом, а вычисления начинать с умножения первого множителя на единицы младшего разряда (разряда единиц), далее умножают первый множитель на число десятков второго множителя, далее — на число сотен и т. д. Таким образом находят неполные произведения, которые затем складывают, получая результат умножения.

В сложных случаях может происходить нарушение формы записи.

Например:

$$\times\begin{array}{r}973\\ 50\\ \hline 48\,650\end{array}\qquad \times\begin{array}{r}7050\\ 7\\ \hline 49\,350\end{array}\qquad \times\begin{array}{r}340\\ 24\\ \hline +\,136\\ 68\;\\ \hline 8\,160\end{array}\qquad \times\begin{array}{r}421\\ 305\\ \hline +\,2105\\ 1263\;\;\\ \hline 128\,405\end{array}$$

В первых трех случаях нарушение формы записи можно объяснить наличием нулей (незначащих цифр) в множителях, что позволяет на первом вычислительном этапе мысленно опускать их, домножая затем результат на нужное количество десятков.

В четвертом случае происходит нарушение порядка выполнения действий — после умножения первого множителя на число единиц второго множителя, сразу переходим к умножению первого множителя на число сотен, поскольку число десятков второго множителя обозначено цифрой 0. Подразумевается, что умножение первого множителя на 0 десятков дает нулевой результат во втором неполном произведении. Поэтому для экономичности записи его опускают, подразумевая его «по умолчанию». В связи с этим при умножении первого множителя на число сотен второе (фактически — третье) неполное произведение записывают со сдвигом влево на два разряда, поскольку первая справа значащая цифра этого неполного произведения будет цифрой сотен, поэтому ее следует записать в разряд сотен.

Для того чтобы ребенок понял смысл всех этих многочисленных действий «по умолчанию», при знакомстве с этими трудными случаями следует сначала производить полные записи и выполнять все, предписанные алгоритмом действия, а не просто указывать ребенку, что куда следует «сдвигать». Затем, сравнивая два вида записи (полный и сокращенный) нужно помочь ребенку понять, какие элементы и этапы полного алгоритма и полной записи можно опустить, и что при этом произойдет с формой записи. В этом случае ребенок будет выполнять трансформации формы записи и порядка выполнения действий при письменном умножении осознанно, что способствует пониманию вычислительного приема и формированию осознанной вычислительной деятельности школьника.

2. Деление в столбик

Вычисления результатов деления многозначного числа на однозначное или многозначного числа на многозначное требует применения письменных приемов вычислений (письменного алгоритма деления). Этот алгоритм построен на основе правил деления суммы на число, деления числа на произведение и приемов нахождения результатов деления с остатком.

Используемые математические законы и правила

Правило деления суммы на число:

$$(a + b + c) : d = a : d + b : d + c : d$$

При делении суммы на число можно разделить на это число каждое слагаемое и полученные результаты сложить.

В качестве суммы рассматривается трехзначное (многозначное) число, представляемое в виде суммы разрядных или удобных слагаемых. Деление таким образом представленного многозначного числа на однозначное выполняется в соответствии с правилом деления суммы на число.

Например:

$396 : 3 = (300 + 90 + 6) : 3 = 300 : 3 + 90 : 3 + 6 : 3 = 100 + 30 + 2 = 132$

$365 : 5 = (350 + 15) : 5 = 350 : 5 + 15 : 5 = 70 + 3 = 73$

Переводя данный способ деления в запись «столбиком», получаем письменный прием (алгоритм) деления на однозначное число.

Правило деления числа на произведение:

$$a : (b \cdot c) = (a : b) : c$$

При делении числа на произведение можно разделить это число сначала на один множитель, а затем полученный результат разделить на второй множитель.

Например:

$5\,400 : 600 = 5\,400 : (6 \cdot 100) = 5\,400 : 100 : 6 = 54 : 6 = 9$

$600 : \underbrace{24}_{6 \cdot 4} = 600 : (6 \cdot 4) = (600 : 6) : 4 = 100 : 4 = 25$

Использование данного правила позволяет устно выполнять деление, которое в общем случае требует письменных вычислений.

Деление с остатком является основным видом действий, последовательно выполняемым при письменном делении.

Свойства и способы деления с остатком см. с. 169—172.

Приемы вычислений

Письменное деление на однозначное число

Прием письменного деления включает такие операции: замену делимого суммой удобных слагаемых (это чаще называют выделением *неполных делимых*), деление на делитель каждого слагаемого (неполного делимого) и сложение полученных частных. Для получения цифр частного используют *прием подбора*. Не всегда получается сразу подобрать оптимальную цифру частного. Каждую подобранную цифру частного проверяют, умножая ее на делитель находят разницу между неполным делимым и полученным произведением. Если этот остаток меньше делимого, то цифра частного выбрана верно, ее можно записывать в частное и продолжать процесс со вторым неполным делимым и т. п.

Письменное деление может быть с остатком и без остатка.

Письменное деление всегда начинают с высших разрядов, в отличие от письменного умножения.

В традиционном учебнике математики использован поэтапный подход к формированию письменного алгоритма деления:

1-й этап: рассматриваются случаи вида 794 : 2; 984 : 4 — *первое неполное делимое однозначное*;

2-й этап: рассматриваются случаи вида 376 : 4; 198 : 6 — *первое неполное делимое двузначное*;

3-й этап: рассматриваются случаи *с нулями в частном* (на конце или в середине);

4-й этап: рассматривается *деление чисел, оканчивающихся нулями.*

Учебник математики для 3 класса содержит подробное описание процесса деления «в столбик», пошагово оговаривающее каждое умственное действие по выполнению подбора и проверки цифр частного, нахождения количества разделенных разрядных единиц, нахождения остатка.

Например:

Рассмотрим как выполнено деление с объяснением:

$$\begin{array}{r|l} -748 & 2 \\ \underline{6} & 374 \\ -14 & \\ \underline{14} & \\ -8 & \\ \underline{8} & \\ 0 & \end{array}$$

1. Делю сотни: 7 сот. делю на 2, можно взять по 3 сот. В частном будет 3 сот.

Проверяю, сколько сотен разделилось: 3 сот. · 2 = 6 сот. Нахожу остаток от деления сотен: 7 сот. – 6 сот. = 1 сот.

2. Делю десятки: 1 сот. = 10 дес. и еще 4 дес. — это 14 дес. 14 дес. делю на 2 — можно взять по 7. Записываю в частном 7 в разряде десятков. 7 дес. · 2 = 14 дес. Нахожу остаток: 14 дес. – 14 дес. = 0. Десятки разделились все.

3. Делю единицы — единиц 8. 8 делю на 2, можно взять по 4. Проверяю: 4 · 2 = 8. Пишу в частном 4 в разряде единиц. Единицы разделились все: 8 – 8 = 0. Остатка нет. Деление закончено.

Ответ: 374.

При делении вида 456 : 8 ход рассуждений аналогичен, только первое неполное делимое — 45 десятков, поскольку 4 сотни нельзя разделить на 8 так, чтобы получить в частном сотни. Таким образом, первая значащая цифра частного в этом случае будет цифрой десятков.

При делении многозначных чисел для самопроверки полезно заранее определить, сколько цифр должно получиться в записи частного. Выделение первого неполного делимого и определение его десятичного состава как раз и является приемом, позволяющим определить количество цифр частного.

Например:

В случае деления 748 : 2 первое неполное делимое — 7 сотен, поскольку 7 сотен можно разделить на 2 так, чтобы в частном получились сотни. Следовательно, первой значащей цифрой частного будет цифра сотен, тогда в частном будет *три цифры (сотни, десятки и единицы)*.

Во втором случае деления 456 : 8 первое неполное делимое — 45 десятков, следовательно первой значащей цифрой частного будет цифра десятков, тогда в частном будет *две цифры (десятки и единицы)*.

Обучение ребенка этому приему самопроверки является важным способом формирования осознаваемой вычислительной деятельности. Особенно важен этот прием при выполнении деления, приводящего к случаям получения нулей в частном.

Например:

$$\begin{array}{r|l} 5648 & 8 \\ & {*}{*}{*} \end{array}$$

сотни

Первое неполное делимое 56 сотен (поскольку 5 тысяч нельзя разделить на 8 так, чтобы получить в частном тысячи), значит, первой цифрой частного будет цифра сотен. Следовательно, в частном будет три цифры (сотни, десятки и единицы). Данное рассуждение полезно отметить постановкой соответствующего количества точек в частном. Это предупредит распространенную в таких случаях ошибку — потерю цифры частного.

Далее деление выполняется по общему алгоритму:

$$\begin{array}{r|l} -5648 & 8 \\ \underline{56} & 706 \\ -4 & \\ \underline{0} & \\ -48 & \\ \underline{48} & \\ 0 & \end{array}$$

При объяснении получения нуля в частном следует в речевом сопровождении компенсировать условность сокращенной записи деления в столбик: 4 десятка нельзя разделить на 8 так, чтобы в частном получились *целые десятки*, поэтому в разряде десятков частного ставим 0. 4 десятка — это 40 единиц, да еще 8 единиц — делим 48 на 8...

При делении чисел, оканчивающихся нулями, следует постоянно применять прием «прикидки» цифр частного, это поможет ребенку не терять нули в конце деления.

Например:

$$\begin{array}{r|l} 1850 & 5 \\ & {*}{*}{*} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -1850 & 5 \\ \underline{15} & 370 \\ -35 & \\ \underline{35} & \\ 0 & \end{array}$$

сотни

Прием «прикидки» цифр частного поможет ребенку при выполнении деления вида:

$$\begin{array}{r|l} 40160 & 80 \\ & {*}{*}{*} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -40160 & 80 \\ \underline{400} & 502 \\ -16 & \\ \underline{0} & \\ -160 & \\ \underline{160} & \\ 0 & \end{array}$$

сотни

Деление на двузначное и трехзначное число

В основе устного деления на двузначное и трехзначное число лежит свойство деления числа на произведение:

$$a : (b \cdot c) = (a : b) : c$$

При делении числа на произведение можно разделить это число сначала на один множитель, а затем полученный результат разделить на второй множитель.

Например:
$240 : 30 = 240 : (3 \cdot 10) = (240 : 10) : 3 = 24 : 3 = 8$
$2700 : 900 = 2700 : (9 \cdot 100) = 2700 : 100 : 9 = 27 : 9 = 3$

Однако в основе письменного деления на разрядные числа лежит не данный устный прием, а общий алгоритм деления на однозначное число.

Например:

```
2290 0 | 300
         ** 
 десятки
```

```
_22900 | 300
 2100  | 76 (ост. 100)
 _1900
  1800
   100 ( остаток)
```

При ознакомлении с делением на двузначное число сначала рассматривают случаи, когда в частном получается одна цифра.

Например:

```
_492 | 82
 492 | 6
   0
```

Эту цифру частного находят *приемом подбора* с последующей проверкой.

При этом можно использовать два приема, облегчающих ребенку подбор цифры частного:

1) Прием ориентировки на таблицу умножения однозначных чисел.

В этом случае ориентируются на последнюю цифру делителя, подбирая такую цифру частного, чтобы при умножении на нее получался результат, совпадающий с последней цифрой делимого.

Например, при делении $492 : 82$ это может быть только 6, так как $2 \cdot 6 = 12$.

Проверка этой цифры частного при умножении $82 \cdot 6$ дает делимое 492.

Приведем еще один пример:
$384 : 96$

В таблице умножения числа 6 только множитель 4 дает в результате умножения число, оканчивающееся на 4: $6 \cdot 4 = 24$. Проверка цифры 4 в качестве пробной цифры частного дает делимое: $96 \cdot 4 = 384$. Следовательно $384 : 96 = 4$.

Этот прием помогает быстро найти цифры частного, если речь идет о делении без остатка.

2) Прием замены делителя ближайшим разрядным числом.

В этом случае делитель заменяется на ближайшее разрядное число (в данном случае вместо 96 можно брать 90). В отношении разрядного числа легче найти пробную цифру частного. В данном случае деление 38 дес. на 9 дес. дает пробную цифру частного — 4. Затем ее проверяют, умножая на нее делитель. Цифра может подойти, а может и не подойти, поскольку ближайшее разрядное число берут не по правилу округления, а по принципу отбрасывания единиц. В этом случае проводится коррекция и уточненная цифра частного записывается в ответ.

Процесс деления многозначных чисел на двузначное и трехзначное технически очень сложный и трудоемкий. В старших классах на уроках физики и химии, где бывают нужны многозначные вычисления детям рекомендуют пользоваться калькуляторами.

Эти же приемы облегчения поиска пробной цифры частного можно использовать при делении на трехзначное число.

Например:
$738 : 246$

Заменим число 246 ближайшим разрядным числом — это 200. 200 это 2 сот. Разделим 7 сот. на 2 сот. В частном можно пробовать цифру 3. Проверим эту пробную цифру: умножим 246 на 3, получим 738. Значит $738 : 246 = 3$

Например:

```
1456 | 364
     | *
```

В частном будет *одна цифра*, поскольку 145 дес. нельзя разделить на 364 так, чтобы в частном получились десятки. В таблице умножения числа 4 только множители 4 и 9 дают в результате числа, оканчивающиеся числом 6. 3 сот., умноженные на 9, дадут 27 сот. — это число больше делимого. Проверим пробную цифру частного 4: $364 \cdot 4 = 1\,456$. Значит $1\,456 : 364 = 4$.

Прием замены делителя на ближайшее разрядное число часто приводит к тому, что первая подобранная таким путем цифра частного не подходит и ее нужно изменять. Это происходит потому, что замена происходит не по правилам округления, а простым отбрасыванием единиц делителя.

Например:

```
282 | 47
    | *
```

Заменим 47 на ближайшее разрядное число — это 40, т. е. 40 — это 4 дес. Разделим 28 дес. на 4 дес., получим 7 — это пробная цифра частного.

Проверяем, подходит ли цифра 7 : $47 \cdot 7 = 329$ — это больше, чем 282, значит, в частном должно быть меньше, чем 7.

Проверяем, подходит ли цифра 6 : 47 · 6 = 282. Значит, 282 : 47 = 6.

Использование первого из обозначенных приемов в сочетании с приемом замены делителя на ближайшее разрядное число позволит уменьшить затраты сил и времени на поиски пробных цифр частного.

Использование общего приема округления делителя также позволит быстрее и точнее искать пробную цифру частного. В частности, в данном случае по правилам округления следовало округлять 47 до 50, а значит первая пробная цифра частного — это 6 : 50 · 6 = 300 > 282, но округление произведено с увеличением, а результат близок к делимому, значит можно пробовать 6 в качестве цифры частного.

Наиболее трудоемки случаи, требующие нескольких прикидок по цифрам частного. Особо рассматривается случай, когда при первой пробе получается число 10.

Например: $\begin{array}{r|l} 1016 & 127 \\ \cline{2-2} & * \end{array}$

В частном одна цифра. Прием округления, как и прием замены делителя на ближайшее разрядное число, дает в качестве делителя число 100. Первая пробная цифра частного в этом случае получается 10. Но число 10 содержит две цифры, поэтому оно не подходит.

Пробуем в качестве цифры частного 9. Проверяем: 127 · 9 = 1143 > > 1016, значит, цифра 9 не подходит.

Пробуем 8: 127 · 8 = 1016. Значит 1016 : 127 = 8.

При делении на двух- и трехзначное число в случаях, когда в частном получается не одна цифра, проще ориентироваться при подборе пробной цифры частного на первые цифры делимого и делителя.

Например:

$$\begin{array}{r|l} 8184 & 341 \\ \cline{2-2} & * * \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -8184 & 341 \\ 682 & 24 \\ \cline{1-2} -1364 & \\ 1364 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Первое неполное делимое — 818 десятков, значит, в частном будет две цифры — десятки и единицы.

Первая цифра делимого 8, первая цифра делителя 3, делим 8 : 3, можно взять по 2. Проверяем первую пробную цифру частного 341 · 2 = 682. Находим остаток 818 – 682 = 136 < 341, значит, цифра 2 подходит.

Второе неполное делимое 1364, первая цифра 1, но она на 3 не разделится. Значит, делим 13 на 3. Можно взять по 4. Проверяем вторую пробную цифру частного 341 · 4 = 1364. Значит, 4 подходит. Деление закончено.

Ответ 24.

Пробная цифра частного проверяется устно, и в этом основная трудность деления на двузначное и трехзначное число. Если ребенок не владеет приемами, облегчающими поиск и первичную проверку пробных цифр частного, то он каждый раз умножает на пробную цифру частного весь делитель, что является сложным и трудоемким процессом, который невозможно выполнить без применения письменных алгоритмов умножения.

Письменные алгоритмы умножения и деления на двузначное и трехзначное число дети изучают в конце 4 класса, поэтому учитель не всегда успевает уделить им достаточно много времени. Большие затраты времени при непродуктивном поиске пробных цифр частного приводят к тому, что на одном уроке дети успевают решить 2—3 примера. Большее количество примеров может быстро привести к утомлению детей и соответственно большому количеству ошибок при вычислениях. Использование продуктивных вычислительных приемов при выполнении письменных вычислений поможет ребенку в овладении осознанной вычислительной деятельностью.

Лекция 14.
Приемы рациональных вычислений в начальных классах

Приемы рациональных вычислений имеют в основе хорошее знание свойств арифметических действий, знание порядка выполнения действий и умение изменять этот порядок в тех случаях, когда это позволяют законы сложения и умножения. К приемам рациональных вычислений можно также отнести приемы, облегчающие устное сложение и умножение: понимание закономерности изменения результатов действий в зависимости от изменения одного из компонентов, а также приемы умножения на 10, 100, 1 000, 5, 15, 25, 50 и т. п.

Цель применения приемов рациональных вычислений — упрощение числовых выражений, приведение их к наиболее простой для вычислений форме.

Первыми приемами рациональных вычислений можно считать все свойства сложения, умножения и деления, с которыми дети знакомятся в процессе освоения вычислительной деятельности

Например:

34 + 118 + 16 = (34 + 16) + 118 = 50 + 118 = 168 — применили переместительное и сочетательное свойство сложения: слагаемые переставили местами для удобства вычислений, а затем заменили сумму двух соседних слагаемых ее значением.

$156 + 44 + 97 = 156 + (4 + 40) + 97 = (156 + 4) + 40 + 97 = 160 + 40 + 97 = 200 + 97 = 297$ — применили разрядное разложение числа 44 и группировку слагаемых.

$497 + 228 = 497 + (3 + 225) = (497 + 3) + 225 = 500 + 225 = 725$ — применили замену слагаемого суммой удобных слагаемых и группировку слагаемых.

Знаменитый пример Гаусса: надо найти сумму первых 100 натуральных чисел.

$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100 = ?$

Применим парную группировку слагаемых: $1 + 99 = 100$

$2 + 98 = 100$

$3 + 97 = 100...$

....

$49 + 51 = 100$

Таких сумм будет 49. Остается число 50 и число 100. $4\,900 + 100 + 50 = 5\,050$.

К приемам рациональных вычислений можно отнести приемы, порожденные наблюдением за закономерностью изменения результатов действий в зависимости от изменения одного из компонентов.

Например:

Прибавление к уменьшаемому и вычитаемому одного и того же числа разность не изменяет, поэтому

$28 - 9 = (28 + 1) - (9 + 1) = 29 - 10 = 19$

$825 - 97 = (825 + 3) - (97 + 3) = 828 - 100 = 728$

Зная эту закономерность, легко вычислять в уме примеры вида: $64 - 8$; $132 - 29$; $102 - 8$ — которые при выполнении по общему принципу вычитания по частям являются очень трудоемкими.

Тот же прием можно использовать в виде «округление одного или нескольких слагаемых»:

Слагаемые заменяют ближайшими к ним «круглыми» числами, затем из суммы «круглых» чисел вычитают или прибавляют соответствующие дополнения.

$187 + 58 = (190 + 60) - (3 + 2) = 250 - 5 = 245$

$282 + 79 = (280 + 80) + 2 - 1 = 361$

Распределительное свойство умножения относительно сложения и вычитания позволяет рационализировать вычисления не только в средних классах школы, но и в начальных классах.

Например:

$7 \cdot 3 + 7 \cdot 4 = 7 \cdot (3 + 4) = 7 \cdot 7 = 49$

$54 \cdot 11 - 49 \cdot 11 = 11 \cdot (54 - 49) = 11 \cdot (55 - 50) = 11 \cdot 5 = 55$

$7 \cdot 55 + 7 \cdot 45 + 3 \cdot 55 + 3 \cdot 45 = 7 \cdot (55 + 45) + 3 \cdot (55 + 45) = 7 \cdot 100 + 3 \cdot 100 = 100 \cdot (7 + 3) = 100 \cdot 10 = 1\,000$

Распределительное свойство деления относительно сложения и вычитания дает возможность рационализировать вычисления в такой же мере:

$(320 - 64) : 8 + 16 = 320 : 8 - 64 : 8 + 16 = 40 - 8 + 16 = 32 + 16 = 48$

В данном случае, фактически был нарушен канонический порядок действий (действия в скобках выполняется первым), но это нарушение позволялось правилом деления суммы (разности) на число. На последнем шаге практически можно было действовать проще, поскольку прибавление 16 — это прибавление двух восьмерок, и с учетом вычитания одной восьмерки, реально остается только одна восьмерка, т. е. сразу $40 + 8 = 48$. Однако подобные перестановки ученику начальной школы не позволяет самое первое, выученное им правило: действия сложения и вычитания в выражениях без скобок выполняют по порядку слева направо.

В качестве рационализирующего приема можно рассматривать очевидную возможность не выполнять некоторые арифметические действия в исходном выражении.

Например: $(101\,010 - 37\,564) + 37\,564 = 101\,010$

К разности прибавляется вычитаемое, очевидно, что производить действия в скобках нет смысла. При этом *не предполагается* рассуждение вида «сумма чисел противоположных знаков, равных по модулю, равна нулю» — младшие школьники не знакомы с этим свойством и этими числами.

$137 \cdot (53\,812 - 34\,946) \cdot 0 = 0$

Анализ выражения показывает, что это произведение, в котором один из множителей равен нулю, следовательно все произведение равно нулю.

Более подробно рассмотрим приемы так называемого «быстрого умножения».

Приемы умножения на 10, 100, 1000 и другие разрядные единицы рассматривались в п. 11.

Прием умножения на 5:

Чтобы умножить число на 5, нужно умножить его на 10, а затем результат разделить пополам.

Например:

$38 \cdot 5 = ?$; $38 \cdot 10 = 380$; $380 : 2 = 190$, значит, $38 \cdot 5 = 190$.

Прием умножения четных чисел на 5:

Чтобы умножить число на 5, можно разделить его на 2 и результат умножить на 10.

Например:

$84 \cdot 5 = 84 : 2 \cdot 10 = 42 \cdot 10 = 420$

$62\,482 \cdot 5 = 62\,482 : 2 \cdot 10 = 31\,241 \cdot 10 = 312\,410$

Прием умножения на 15:

Чтобы умножить число на 15, нужно умножить его на 10, затем умножить его на 5, и результаты сложить.

Например:

$65 \cdot 15 = ?$ $65 \cdot 10 = 650$ $65 \cdot 5 = 65 \cdot 10 : 2 = 650 : 2 = 325$

$650 + 325 = 975$

Прием умножения на 25:

Чтобы умножить число на 25, нужно умножить его на 100, и полученный результат разделить на 4.

Например:

$12 \cdot 25 = ?$ $12 \cdot 100 = 1200$ $1200 : 4 = 300$

В данном примере можно было действовать и другим способом:

$12 \cdot 25 = 25 \cdot 12 = 25 \cdot 4 \cdot 3 = 100 \cdot 3 = 300$

Сначала применяется перестановка множителей, затем второй множитель заменяется произведением двух чисел и применяется сочетательное свойство умножения.

Прием умножения на 125:

Чтобы умножить число на 125, можно умножить его на 1000 и результат разделить на 8.

$296 \cdot 125 = 296 \cdot 1000 : 8 = 296\,000 : 8 = 37\,000$

Прием умножения на 75:

Чтобы умножить число на 75, можно разделить его на 4, умножить частное на 3, а результат умножить на 100.

$268 \cdot 75 = 268 : 4 \cdot 3 \cdot 100 = 67 \cdot 3 \cdot 100 = 20\,100$

Прием умножения четного числа на 55:

Чтобы умножить четное число на 55, можно разделить его на 2, частное умножить на 100 и на 10, а затем оба результата сложить.

$398 \cdot 55 = 398 : 2 \cdot (100 + 10) = 199 \cdot (100 + 10) = 19\,900 + 1\,990 = 21\,890$

Прием умножения двух одинаковых множителей, число единиц в которых равно 5:

Чтобы выполнить умножение, можно количество десятков умножить на последующее число и к полученному результату приписать 25.

$35 \cdot 35 = 1225$ $75 \cdot 75 = 5625$ $45 \cdot 45 = 2025$

$3 \cdot 4 = 12$ $7 \cdot 8 = 56$ $4 \cdot 5 = 20$

Прием умножения на 9 (99, 999):

Чтобы умножить число на 9 (99, 999), можно умножить его на 10 (100, 1000) и из полученного результата вычесть само число.

$24 \cdot 9 = 24 \cdot 10 - 9 = 240 - 9 = 231$

$52 \cdot 99 = 52 \cdot 100 - 52 = 5200 - 52 = 5148$

Прием умножения двузначного числа на 99:

Чтобы умножить двузначное число на 99, можно к предшествующему числу приписать его дополнение до 100.

$63 \cdot 99 = 6237$ $79 \cdot 99 = 7821$

Прием умножения двузначного числа на 11:

Чтобы умножить двузначное число на 11, можно раздвинуть его числа и вставить между ними их сумму. Если сумма является двузначным числом, то единицы суммы оставляются между цифрами, а десятки прибавляются к первой цифре.

$43 \cdot 11 = 473$ $73 \cdot 11 = 803$

Прием умножения двузначного числа на 101:

Чтобы умножить двузначное число на 101, можно справа к нему приписать само число.

$57 \cdot 101 = 5757$ $98 \cdot 101 = 9898$

Прием деления на 4 (8, 16)

Чтобы разделить число на 4 (8, 16), можно разделить его на 2 дважды (трижды, четырежды).

$84 : 4 = 84 : 2 : 2 = 42 : 2 = 21$

Прием деления на 5:

Чтобы разделить число на 5, можно умножить его на 2, а результат разделить на 10.

$175 : 5 = 175 \cdot 2 : 10 = 350 : 10 = 35$

Прием деления на 25:

Чтобы разделить число на 25, можно число умножить на 4, а результат разделить на 10.

$315 : 25 = 315 \cdot 4 : 10 = 1260 : 10 = 126$

Прием деления на 125:

Чтобы разделить число на 125, можно число умножить на 8, а результат разделить на 1000.

$405\,000 : 125 = 405\,000 \cdot 8 : 1000 = 3\,240\,000 : 1000 = 3240$

Использование этих приемов позволяет производить устно достаточно сложные вычисления, требующие обычно применения письменных способов вычислений. Естественно, практически очень трудно выучить наизусть все эти приемы, но наиболее часто используемые со временем запоминаются. Для остальных приемов дети могут изготовить карточки — на каждый прием по карточке, использование таких «подсказок» поможет ребенку эффективно справляться со многими трудными случаями устного счета.

Глава 4

Изучение величин в начальной школе

Лекция 15.

Основные величины, изучаемые в начальной школе

1. Понятие величины.
2. Длина.
3. Масса и емкость.
4. Площадь.
5. Время.
6. Скорость.
7. Действия с именованными числами.

1. Понятие величины

В математике под *величиной* понимают такие свойства предметов, которые поддаются *количественной оценке*. Количественная оценка величины называется *измерением*. Процесс измерения предполагает сравнение данной величины с некоторой *мерой*, принятой *за единицу* при измерении величин этого рода.

К величинам относят длину, массу, время, емкость (объем), площадь и др.

Все эти величины и единицы их измерения изучаются в начальной школе. Результатом процесса измерения величины является определенное *численное значение*, показывающее — сколько раз выбранная мера «уложилась» в измеряемую величину.

В начальной школе рассматриваются только такие величины, результат измерения которых выражается целым положительным числом (натуральным числом). В связи с этим, процесс знакомства ребенка с величинами и их мерами рассматривается в методике как способ расширения представлений ребенка о роли и возможностях натуральных чисел. В процессе измерения различных величин ребенок упражняется не только в действиях измерения, но и получает новое представление о неизвестной ему ранее роли натурального числа. *Число — это мера величины*, и сама идея числа была в большой мере порождена необходимостью количественной оценки процесса измерения величин.

При знакомстве с величинами можно выделить некоторые общие этапы, характеризующиеся общностью предметных действий ребенка, направленных на освоение понятия «величина».

На 1-ом этапе выделяются и распознаются свойства и качества предметов, поддающихся сравнению.

Сравнивать без измерения можно длины (на глаз, приложением и наложением), массы (прикидкой на руке), емкости (на глаз), площади (на глаз и наложением), время (ориентируясь на субъективное ощущение длительности или какие-то внешние признаки этого процесса: времена года различаются по сезонным признакам в природе, время суток — по движению солнца и т. п.).

На этом этапе важно подвести ребенка к пониманию того, что есть качества предметов субъективные (кислое — сладкое) или объективные, но не позволяющие провести точную оценку (оттенки цвета), а есть качества, которые позволяют провести точную оценку разницы (на сколько больше — меньше).

На 2-ом этапе для сравнения величин используется промежуточная мерка. Данный этап очень важен для формирования представления о самой *идее измерения посредством промежуточных мер*. Мера может быть произвольно выбрана ребенком из окружающей действительности для емкости — стакан, для длины — кусочек шнурка, для площади — тетрадь и т. п. (Удава можно измерять и в Мартышках, и в Попугаях.)

До изобретения общепринятой системы мер человечество активно пользовалось естественными мерами — шаг, ладонь, локоть и т. п. От естественных мер измерения произошли дюйм, фут, аршин, сажень, пуд и т. д. Полезно побуждать ребенка пройти этот этап истории развития измерений, используя естественные меры своего тела как промежуточные.

Только после этого можно переходить к знакомству с общепринятыми стандартными мерами и измерительными приборами (линейка, весы, палетка и т. д.). Это будет уже *3-й этап* работы над знакомством с величинами.

Знакомство со стандартными мерами величин в школе связывают с этапами изучения нумерации, поскольку большинство стандартных мер ориентировано на десятичную систему счисления: 1 м = 100 см, 1 кг = 1000 г и т. п. Таким образом, деятельность измерения в школе очень быстро сменяется деятельностью преобразования численных значений результатов измерения. Школьник практически не занимается непосредственно измерениями и работой с величинами, он выполняет арифметические действия с заданными ему условиями задания или задачи численными значениями величин (складывает, вычитает, умножает, делит), а также занимается так называемым переводом значений величины, выраженной в одних наименованиях, в другие (переводит метры в сантиметры, тонны в центнеры и т. п.). Такая деятельность фактически формализует процесс работы с величинами на уровне численных преобразований. Для успешности этой деятельности нужно хорошо знать наизусть все таблицы соотношений величин и хорошо владеть приемами вычислений. Для многих школьников эта тема является трудной только по причине необходимости знать наизусть большие объемы численных соотношений мер величин.

Наиболее сложна в этом плане работа с величиной «время». Данная величина сопровождается наибольшим количеством чисто условных стандартных мер, которые не только надо запомнить (час, минута, день, сутки, неделя, месяц и т. п.), но и выучить их соотношения, которые заданы не в привычной десятичной системе счисления (сутки — 24 часа, час — 60 минут, неделя — 7 дней и т. п.).

В результате изучения величин учащиеся должны овладеть следующими знаниями, умениями и навыками:

1) познакомиться с единицами каждой величины, получить наглядное представление о каждой единице, а также усвоить соотношения между всеми изученными единицами каждой из величин, т. е. знать таблицы единиц и уметь их применять при решении практических и учебных задач;

2) знать, с помощью каких инструментов и приборов измеряют каждую величину, иметь четкое представление о процессе измерения длины, массы, времени, научиться измерять и строить отрезки с помощью линейки.

2. Длина

Длина — это характеристика линейных размеров предмета (протяженности).

С длиной и с единицами ее измерения дети знакомятся на протяжении всех лет обучения в начальной школе.

Первые представления о длине дети получают в дошкольном возрасте, они выделяют линейную протяженность предмета: длину, ширину, расстояние между предметами. К началу обучения в школе дети должны правильно устанавливать отношения «шире — уже», «дальше — ближе», «длиннее — короче».

В 1 классе с первых уроков математики дети выполняют задания по уточнению пространственных представлений: что тоньше, книга или тетрадь; какой карандаш длиннее; кто выше, кто ниже. В 1 классе дети знакомятся с первой единицей длины — это сантиметр.

Сантиметр — метрическая мера длины. Сантиметр равен одной сотой доле метра, десятой доле дециметра. Записывается так: 1 см (без точки).

В 1 классе дети получают наглядное представление о сантиметре. Они выполняют следующие задания:

1) измеряют длину полосок с помощью модели сантиметра;

2) измеряют длину полосок с помощью линейки.

Чтобы измерить длину полоски, надо приложить к ней линейку так, чтобы начало полоски соответствовало цифре 0 на линейке. Число соответствующее концу полоски и есть ее длина.

Дети выполняют следующие виды заданий:

1) сравнение длин полосок с помощью мерок произвольной длины:

Сравни длины отрезков:

При выполнении задания ребенок ссылается на счет мерок: больше мерок уложилось по длине отрезка, значит отрезок длиннее.

2) нахождение равных и неравных отрезков; определение, на сколько один отрезок больше или меньше другого;

3) измерение отрезков и их сравнение с помощью линейки (измерить длину отрезка; сравнить длины отрезков, начертить отрезок заданной длины).

Во 2 классе дети знакомятся с такими единицами измерения длины как дециметр и метр.

Дециметр — метрическая мера длины. Дециметр равен одной десятой доле метра. Записывается так: 1 дм (без точки).

Дети получают наглядное представление о дециметре как об отрезке равном 10 см и выполняют задания следующего характера:

1) измерение предметов с помощью модели дециметра (альбом, книга, парта);

2) вычерчивание в тетради отрезка длиной 1 дм;

3) сравнение изученных величин:

Сравни[1]:

> < =

1 дм * 1 см
14 см * 4 дм

4) преобразование величин:

Заполни пропуски:
2 дм = ... см
50 см = ... дм

[1] Здесь и далее вместо значка (*) надо проставить знак сравнения (>, <, =).

В основе выполнения заданий на сравнение и преобразование величин лежит знание соотношения: 1 дм = 10 см

Метр — основная мера длины. Метр введен в употребление в конце XVIII в. во Франции.

Во 2 классе дети получают наглядное представление о метре и знакомятся с основными метрическими соотношениями:

10 дм = 1 м; 100 см = 1 м

Дети учатся обозначать новую единицу длины: м (без точки), измерять предметы с помощью новой единицы длины (шнур, доска, класс). В качестве инструмента используется метровая линейка или портновская лента.

Учащиеся выполняют следующие задания:

1) сравнение:

Поставь знак сравнения
1 м * 99 см
1 м * 9 дм

2) преобразование величин:

Вырази единицы величин одного наименования через другие:
5 м = ... дм
3 м 2 дм = ... дм

Выполняя преобразования, дети используют таблицы соотношений единиц длины: 1 м = 10 дм, 3 м — это в 3 раза больше, значит, 3 м = 30 дм, да еще 2 дм — всего получается 32 дм.

Заполни пропуски:
56 дм = ... м ... дм

Рассуждение: 56 дм — столько метров, сколько в числе 56 десятков.

В прежних учебниках системы 1—4 с километром дети знакомились в 3 классе, в новом издании этого учебника (2001) километр изучают в 4 классе.

Километр — это метрическая мера длины. Километр равен 1000 м. Записывается так 1 км (без точки). Детей можно познакомить с тем, что «кило» в переводе на русский обозначает «тысяча», «кило-метр» — тысяча метров. Довольно трудно дать наглядное представление о километре, поскольку это достаточно большая мера длины. Учителя часто предлагают такой образ: размотаем катушку ниток, а потом представим себе, что размотано 10 катушек ниток и вытянуто в длину — это и есть километр (стандартная катушка содержит 100 м). Полезно проделать такой опыт хотя бы с одной катушкой, поскольку ребенку трудно представить себе даже длину катушки ниток, не говоря уже о километре:

1 км = 1000 м

Сравни: Заполни пропуски:
1 км * 1000 м   1 000 см = ... м
2 м 50 см * 2 м 5 см   5 000 м = ... км

В 4 классе в задания для преобразования и сравнения величин вводится новая единица:

Миллиметр — метрическая мера длины. Миллиметр равен одной тысячной доле метра, т. е. десятой доле сантиметра. Записывается так: 1 мм (без точки).

1 см = 10 мм

Школьники выполняют задания вида:

1) измерение предметов (гвоздь, шуруп), выражение результатов в миллиметрах;

2) вычерчивание отрезков разной длины: (9 мм, 6 мм, 2 см 3 мм);

3) преобразование величин:

Заполни пропуски: 620 мм = ... см

Рассуждение: в 620 мм столько сантиметров, сколько в числе 620 десятков.

Заполни пропуски: 72 км 276 м = ... м

Рассуждение: вначале переводим километры в метры: 1 км = 1000 м, 72 км = 72 000 м да еще 276 м = 72 276 м

4) сравнение:

Сравни:
1 км * 100 м
7200 мм * 72 км

В 4 классе составляется сводная таблица:

1 км = 1000 м   1 м = 100 см   1 см = 10 мм
1 м = 10 дм   1 дм = 10 см

После составления данной таблицы детям предлагают задания на подбор подходящих единиц измерения:

Заполни пропуски:
1 ... = 10 ...
1 ... = 100 ...
1 ... = 1000 ...

3. Масса и емкость

Масса — это физическое свойство предмета, поддающееся измерению. Процесс измерения массы — взвешивание. Следует различать массу и вес предмета. С понятием вес предмета дети знакомятся в 7 классе в курсе физики, поскольку вес — это произведение

массы на ускорение свободного падения. Терминологическая некорректность, которую позволяют себе взрослые в обиходе, часто путает ребенка, поскольку мы иногда, не задумываясь, говорим: «Вес предмета 4 кг». Само слово «взвешивание» подталкивает к употреблению в речи слова «вес». Однако в физике эти величины различаются: масса предмета всегда постоянна — это свойство самого предмета, а вес его меняется в случае изменения силы притяжения (ускорения свободного падения).

Для того чтобы ребенок не усваивал неправильную терминологию, которая будет путать его в дальнейшем на уроках физики, в начальной школе следует всегда говорить: масса предмета.

Емкость — это объем мер жидкости. Мера емкости — литр (л).

Во 2 классе дети знакомятся с килограммом и метром.

Килограмм — метрическая мера массы, обозначается так: 1 кг (без точки).

Дети получают конкретное представление о массе в 1 кг через предметные действия: взвешивание и отвешивание. Решают простые задачи, в которых указан процесс взвешивания, задачи на нахождение массы предмета при выполнении арифметических действий.

Например:

Масса гуся 5 кг, масса курицы на 3 кг меньше. Чему равна масса курицы?

Литр — метрическая мера объема, обозначается так: 1 л (без точки).

Дети выполняют задания следующих видов:

1) определение емкости предметов:

Сколько стаканов воды в литровой банке?

2) определение емкости при выполнении арифметических действий:

В ведре помещается 10 л воды. Сколько литров воды можно долить в ведро, если в нем 6 л, 4 л, 7 л ?

В 3 классе дети знакомятся с граммом.

Грамм — метрическая мера массы, обозначается так: 1 г (без точки).

Дети получают наглядное представление о грамме (измеряют массу монет), знакомятся с набором гирь в 500 г, 200 г, 100 г, 50 г. Путем подсчета устанавливается основное метрическое соотношение:

1 кг = 1000 г

В дальнейшем понятие грамма используется при решении составных задач, а также в заданиях на преобразование величин.

В 4 классе дети знакомятся с тонной и центнером. *Центнер* — метрическая мера массы, обозначается так: 1 ц (без точки).

1 ц = 100 кг

Тонна — метрическая мера массы, обозначается так: 1 т (без точки).

1 т = 10 ц

1 т = 1000 кг

Дети получают представление о новых единицах массы при помощи рисунков, на которых изображен процесс взвешивания крупных тел. Реально дети плохо представляют себе конкретный смысл этих величин, поскольку не встречаются с ними в жизни. Для выполнения заданий таблицы соотношения мер массы выучиваются наизусть.

Выполняются задания следующих видов:

1) преобразование единиц одного наименования в единицы другого наименования:

Заполни пропуски:

30 т = ... ц

500 кг = ... ц

2) сравнение единиц величин:

Во сколько раз 1 т больше, чем 1 ц ?

Во сколько раз 1 т больше, чем 1 кг ?

Во сколько раз 1 ц больше, чем 1 кг ?

Какую часть тонны составляют 1 ц (1 кг, 1 г) ?

Рассуждение: Чтобы установить, какую часть тонны составляет 1 г, надо знать, сколько данных единиц содержится в тонне (1 т = = 1000 кг = 1 000 000 г), значит, грамм — одна миллионная часть тонны.

3) выполнение арифметических действий с именованными числами:

Вычисли:

8 т − 200 кг = ...

8 т 204 кг − 3 т 657 кг = ...

4) решение простых и составных задач:

Рыболовецкий колхоз по плану должен был наловить за год 30 000 т рыбы. Рыбаки наловили 30 290 т рыбы. На сколько тонн они перевыполнили план?

Из 1 ц муки получается 150 кг хлеба. Сколько хлеба получат из 1 т муки?

Рассуждение: 1 т больше 1 ц в 10 раз, значит, и хлеба будет в 10 раз больше (150 · 10 = 1500 кг).

Итогом изучения данной темы является составление таблицы

1 кг = 1000 г	**1 ц = 100 кг**
1 т = 1000 кг	**1 т = 10 ц**

Эти соотношения величин дети заучивают наизусть.

4. Площадь

Площадь геометрической фигуры — это свойство фигуры занимать измеряемое место на плоскости. Площадь фигуры измеряют с помощью единиц площади (м², дм², см², мм²).

В дошкольном возрасте дети сравнивают площади предметов, не называя этот термин, путем наложения предметов, путем сопоставления предметов по занимаемому месту на столе, земле.

В 1—3 классах уточняются представления о площади фигур как о свойстве плоских геометрических фигур (вырезать квадрат и разделить на 2 треугольника, вырезать 2 треугольника и составить один). При выполнении аналогичных заданий дети знакомятся с некоторыми свойствами площади:

1) площадь фигуры не изменяется при изменении ее положения на плоскости;

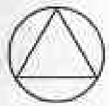
2) часть предмета всегда меньше целого;

3) из одних и тех же заданных фигур можно составить различные геометрические фигуры.

Само понятие «площадь фигуры» в новом издании учебника вводится в 3 классе. Дети выполняют задания следующих видов:

1) сравнение площадей фигур методом наложения:

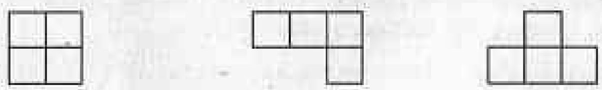
Сравни площади круга и треугольника:



(Площадь треугольника меньше площади круга, а площадь круга больше площади треугольника.)

2) сравнение площади фигур по количеству равных квадратов (или любых других мерок):

Сравни площади фигур:



(Площади всех фигур равны, т. к. фигуры состоят из 4 равных квадратов.)

3) вычерчивание фигур, состоящих из заданного количества квадратов.

Эти задания формируют у детей понятие о площади как о числе квадратных единиц, содержащихся в геометрической фигуре.

Квадратный сантиметр — метрическая мера площади. Один квадратный сантиметр — это площадь квадрата, сторона которого равна 1 см. Запись: 1 см^2.

Выполняются задания следующих видов:

1) определение площади геометрической фигуры путем подсчета квадратных сантиметров содержащихся в данной фигуре;

2) сопоставление длины отрезка и площади фигуры:

Начерти квадрат, сторона которого 4 см. Найди его площадь и периметр.

3) измерение и определение площади фигуры с использованием формулы

$$S = a \cdot b$$

Сама формула в 3 классе не рассматривается, дается лишь словесная формулировка:

Чтобы вычислить площадь прямоугольника, измеряют его длину и ширину (в одинаковых единицах) и находят произведение полученных чисел.

Используя правило, решают задачи вида:

Вычисли площадь прямоугольника, длины сторон которого 9 см и 2 см.

Квадратный дециметр — метрическая мера площади. Один квадратный дециметр — это площадь квадрата, сторона которого равна 1 дм. Запись: 1 дм^2.

Метрическое соотношение: 1 дм^2 = 100 см^2.

Выполняются задания следующих видов:

1) вычерчивание в тетради квадрата со стороной 1 дм, деление его на квадратные сантиметры (дети убеждаются в правильности соотношения: 1 дм^2 = 100 см^2);

2) определение площади фигур в дм^2:

Высота зеркала прямоугольной формы 12 дм, а ширина 5 дм. Чему равна площадь зеркала?

Квадратный метр — метрическая мера площади. Один квадратный метр — это площадь квадрата, сторона которого равна 1 м. Запись: 1 м^2.

Метрическое соотношение: 1 м^2 = 100 дм^2 1 м^2 = 10 000 см^2.

1) Школьники решают задачи на определение площади фигур в м^2.

Длина комнаты 5 м, а ширина 4 м. Узнай площадь комнаты в м^2.

В новом издании учебника дети сразу знакомятся со всеми остальными единицами площади: квадратный миллиметр, квадратный километр, ар и гектар.

Квадратный миллиметр — метрическая мера площади. Один квадратный миллиметр — это площадь квадрата, сторона которого равна 1 мм. Для наглядного знакомства с квадратным миллиметром удобно использовать миллиметровую бумагу.

Школьники решают задачи на определение площади фигур в мм^2.

Для окантовки рисунков вырезали из бумаги полоски прямоугольной формы. Ширина полоски 8 мм, длина 360 мм. Узнай площадь полоски в мм^2.

Квадратный километр — метрическая мера площади. Один квадратный километр — это квадрат, сторона которого равна 1 км. Запись: 1 км^2.

Для формирования представления об этой мере площади приводят численные примеры, поскольку дать ее наглядное изображение невозможно: Россия занимает площадь более 17 000 000 км^2, а площадь Франции — 551 000 км^2.

Ар — это квадрат со стороной 10 м.

Запись: 1 а.

Метрическое соотношение: 1 а = 100 м^2

В просторечии 1 ар часто называют соткой.

Гектар — это квадрат со стороной 100 м.

Запись: 1 га.

Метрическое соотношение: 1 га = 100 а 1 га = 10 000 м^2

Дети выполняют задания вида:

Площадь участка прямоугольной формы 6 соток. Сколько это квадратных метров?

Узнай длину этого участка, если его ширина 20 м. Какая площадь этого участка свободна, если на нем построен дом площадью 56 м^2?

Для дачных участков выделили участок земли площадью 56 га 40 а. Сколько получится участков, если площадь каждого будет 10 соток?

Итогом изучения данной темы является составление таблицы

1 см^2 = 100 мм^2	**1 дм^2 = 10 000 мм^2**
1 дм^2 = 100 см^2	**1 м^2 = 10 000 см^2**
1 м^2 = 100 дм^2	**1 км^2 = 1 000 000 м^2**
1 а = 100 м	**1 км^2 = 100 га**
1 га = 100 а	**1 км^2 = 10 000 а**

После составления данной таблицы детям предлагают выполнить задания следующих видов:

1) на преобразование единиц одного наименования в единицы других наименований:

> **Заполни пропуски:**
> **2 см² = ... мм²**
> **18 см² = ... мм²**

Рассуждение: 1 см² равен 100 мм², значит 18 см² в 18 раз больше, значит $18 \cdot 100 = 1800$ мм²

> **Заполни пропуски:**
> **800 дм² = ... м²**
> **5000 дм² = ... м²**

Рассуждение: 100 дм² это 1 м², а 800 больше 100 в 8 раз, значит 800 дм² = 8 м².

2) решение простых задач на определение площади (известны длина и ширина и надо найти площадь фигуры, либо известна площадь и одна из сторон и требуется найти вторую сторону).

3) решение составных задач.

> **Зал и коридор имеют одинаковую длину. Площадь зала 300 м², а площадь коридора 120 м². Ширина зала 10 м. Чему равна ширина коридора?**

Работа над задачей:

Полезно сделать рисунок к задаче:

?	Зал 300 м² 10 м	Коридор 120 м²? ?

Анализ рисунка показывает, что можно найти длину зала:

300 : 10 = 30 (м)

Длина коридора — такая же, значит его ширина: 120 : 30 = 4 (м).

5. Время

Время — это длительность протекания процессов. Время имеет как физический, так и философский смысл. Природа времени является темой дискуссии великих умов человечества на протяжении веков и тысячелетий. Но, все-таки *время* — это объективная реальность, данная нам в ощущениях. Проблема в том, что ощущение времени субъективно, поэтому полагаться на чувства в его оценках и сравнении, как это можно сделать в какой-то мере с другими величинами, невозможно. Каждый знает, что в одних обстоятельствах час или даже день

может «промелькнуть как миг», а минуты могут тянуться бесконечно. В связи с этим практически сразу дети начинают знакомиться с приборами, измеряющими время объективно, т. е. независимо от ощущений человека.

При знакомстве с понятием время, на первых порах намного полезнее использовать песочные часы, чем часы со стрелками или электронные, поскольку ребенок видит, как сыплется песок и может зафиксировать какой-то образ процесса (пусть и косвенный). Песочные часы удобно также использовать в качестве промежуточной меры при измерении времени (собственно, именно для этого они и придуманы).

Работа с величиной время осложнена для ребенка большим количеством понятий, которые он должен просто выучить наизусть и научиться применять, что достигается путем многократных повторений до полного запоминания. Кроме того, *время* — это процесс, который не воспринимается сенсорикой ребенка непосредственно: в отличие от массы или длины его нельзя потрогать или увидеть. Этот процесс воспринимается человеком опосредованно, по сравнению с длительностью других процессов, оцениваемых и воспринимаемых сенсорикой. При этом привычные стереотипы сравнений: ход солнца по небу, движение стрелок в часах и т. п. как правило чересчур длительны, чтобы ребенок этого возраста действительно мог их оценивать.

Поэтому «Время» — одна из самых трудных тем в начальной школе.

Первые временные представления формируются в дошкольном возрасте: смена времен года, смена дня и ночи.

В 1 классе у детей формируются временные представления в результате практической деятельности, связанной с учетом длительности процессов: выполнение режимных моментов дня, ведение календаря погоды, знакомство с днями недели, их последовательностью, дети знакомятся с часами и ориентированием по ним в связи с посещением школы.

Во 2 классе дети знакомятся с такими единицами времени как *час, минута*, учатся определять время по циферблату часов.

На этом уроке речь идет не столько о времени как таковом, сколько об устройстве часов, о функциях стрелок. Маленькая стрелка часов — часовая. Она проходит от одной большой черточки до другой за 1 час. Большая стрелка — минутная. Она проходит от одной маленькой черточки до другой за 1 минуту.

В 1 часе — 60 минут.

Дети выполняют задания следующих видов:

> **1. Сколько времени показывают часы?**
> **2. Как будут расположены стрелки, когда пройдет 1 час?**

3. От школы до булочной Оля шла 5 минут, а от булочной до дома на 2 минуты больше. Сколько минут шла Оля от школы до дома?

4. Экскурсия в городской парк продолжалась 50 минут, из них 15 минут пошло на дорогу до парка и обратно. Сколько времени дети провели в парке?

5. Домашнее задание по математике заняло у Коли 15 минут, по русскому языку — 10 минут, по чтению — 20 минут. Сколько времени потратил Коля на выполнение всех домашних заданий?

Тип данных задач и способ их решения детям уже известны, новыми являются только *наименования величин*, с которыми приходится работать. Более подробно и полно эта тема изучается в 3 классе.

Во 2 классе предлагается для решения задача, в которой идет речь о неизученной единице времени — неделе. Предполагается, что дети знакомы с этой единицей практически.

На каникулах Ваня был в лагере 7 недель, а остальное время — у бабушки в деревне. В деревне он был на 2 недели меньше, чем в лагере. Сколько недель длились каникулы?

Предлагаемая задача знакомого типа, новыми являются только наименования величин.

В 3 классе дети знакомятся с такими единицами времени как *год, месяц, неделя, сутки*, уточняют представление о *часе* и *минуте*.

При знакомстве с понятиями год, месяц, неделя дети ведут активную работу с календарем. Они определяют, сколько месяцев в году, с какого месяца начинается год, называют все месяцы по порядку, определяют количество дней в каждом месяце.

При знакомстве с понятием сутки дети сталкиваются с целой последовательностью «дополнительных» понятий: вчера, сегодня, завтра, послезавтра. Они продолжают работу с календарем: определяют, сколько суток в одной неделе, повторяют дни недели, их последовательность; знакомятся с соотношением: 1 сутки = 24 часа.

Выполняются задания следующих видов:

1. Сколько часов в двух сутках?

2. Сколько суток в двух неделях?

3. Одно рыбацкое судно было в море четверо суток, а другое — трое суток.

На сколько часов больше было в море первое судно, чем второе?

4. Сравни

> = <	1 нед. * 8 сут.	14 сут. * 2 нед.
	25 ч * 1 сут.	1 мес. * 35 сут.

Представление о часе и минуте формируются через восприятие привычных длительностей: один час — это перемена и урок, одна минута — что можно успеть сделать за одну минуту.

Дети знакомятся с соотношением: 1 ч = 60 мин (без точки); продолжают работу с циферблатом: учатся показывать определенное время (сначала целое — 5 часов утра, 6 часов вечера, затем — 6 ч 45 мин).

Предлагаются задачи на определение продолжительности времени события:

1. Первый урок продолжается 45 мин, а перемена — 10 мин. Сколько минут проходит от начала первого урока и до начала второго?

2. В году 3 месяца летние: июнь, в котором 30 дней, июль и август, в которых по 31 дню. Сколько летних дней в году? Используя календарь, составь и реши похожие задачи про осень, зиму и весну.

Изученные единицы времени включаются в условие задач, тип которых уже известен детям:

Спектакль продолжался 80 мин, а кинофильм 1 ч 10 мин. На сколько минут спектакль шел дольше, чем кинофильм?

Для решения данной задачи необходимо вначале преобразовать единицы (1 ч 10 мин = 70 мин), а затем выполнять арифметические действия.

На старом станке токарь изготовил за 6 ч 96 деталей, а на новом станке он ту же норму сделал за 4 ч. На сколько деталей больше стал изготавливать токарь за 1 час?

Для решения данной задачи необходимо выяснить производительность труда (количество деталей, сделанных за 1 ч) на старом станке, затем на новом, полученные числа сравнить.

Предлагаются задания на нахождение доли от числа, в которых роль числа играют единицы времени:

Который час наступил, если от начала суток прошла третья часть суток?

Чтобы ответить на этот вопрос нужно вспомнить, сколько часов в одних сутках, как найти одну третью часть от целого (от 24 ч), а затем прибавить полученное количество часов к началу суток.

Сколько минут составляет третья часть часа? Четвертая? Десятая?

В традиционных заданиях на сравнение используются единицы времени:

Сравни:

> = < 2 ч * 120 мин
3 ч * 200 мин

Для выполнения задания надо вспомнить, сколько минут в одном часе: 1 ч = 60 мин, 2 ч = 120 мин (в два раза больше).

Изученные единицы времени включаются и в задачи на смекалку:

Два мальчика играли в шахматы 1 ч 20 мин. Сколько времени играл в шахматы каждый?

Рассуждение: Поскольку действие происходило одновременно, то время не делится на двоих, значит, каждый из них играл 1 ч 20 мин.

В 4 классе дети знакомятся с новой единицей времени — *секундой.* Запись: 1 с (без точки).

Для того чтобы дать представление о длительности этого процесса, предлагается задание: что можно успеть сделать за 1 с?

Рассматривается соотношение: 1 мин = 60 с

Используя это соотношение, дети выполняют задания на преобразование и сравнение единиц времени:

Заполни пропуски:
2 мин = ... с
1 мин 30 с = ... с
3 ч 40 мин = ... мин
Сравни:
2 ч 30 мин * 50 мин
2 сут * 50 ч
5 сут 17 ч * 6 сут

Еще одна единица времени — *век.* 1 век = 100 лет.

Дети знакомятся с понятием *«лента времени»*, учатся показывать определенные события. «Лента времени» — это вертикальная полоса с нанесенными на нее отметками, которым соответствуют временные промежутки. В новом издании учебника лента времени соотносится с числовым лучом, на котором века изображены единичными отрезками.

Итогом изучения темы становится составление таблицы единиц времени, которую дети заучивают наизусть:

1 в. = 100 г.	**В году 365 или 366 суток.**
1 г. = 12 мес.	**В месяце 30 или 31 сутки.**
1 сут = 24 ч	**В феврале 28 или 29 суток.**
1 ч = 60 мин	
1 мин = 60 с	

Виды выполняемых заданий:

1) задачи на определение конца событий.

1. Школьники пошли на экскурсию в Музей космонавтики в 11 ч. Дорога до музея и обратно заняла 1 ч. Осмотр музея продолжался 1 ч 10 мин. Пользуясь циферблатом, определи, когда школьники возвратились с экскурсии.

2. Когда закончилось занятие кружка «Механическая игрушка», если оно началось в 17 ч и длилось 1 ч 45 мин?

2) задачи на определение начала событий.

1. 27 сентября этого года Оле исполнилось 6 месяцев. Назови дату Олиного рождения.

2. Дорога в школу занимает у Веры 12 мин. Когда она должна выходить из дома в школу, если в школе нужно быть в 8 ч 15 мин?

3) задачи на определение продолжительности событий.

1. Первая четверть учебного года начинается 1 сентября и заканчивается 4 ноября. Сколько дней длится первая четверть учебного года?

2. Сколько времени продолжалось занятие в кружке «Юный конструктор», если оно началось в 17 ч и закончилось в 18 ч 45 мин?

4) задания на сравнение единиц времени.

Сравни:
3600 с * 6 мин
49 ч * 2 сут

5) задания на преобразование единиц одного наименования в другие.

Заполни пропуски:
6 мин 5 с = ... с
3 ч 15 мин = ... мин
75 мин = ... ч ... мин

Рассуждения: Надо вспомнить, сколько минут составляют 1 час (60 мин = 1 ч), в 75 мин укладываются 60 мин один раз, значит в 75 мин — 1 ч и 15 мин.

6) выполнение арифметических действий с именованными числами.

Поскольку система исчисления единиц времени *не десятеричная*, то при выполнении арифметических действий с единицами времени не используется способ перевода всех единиц в наименьшие. Действия производят с каждым наименованием, с последующими переводами в нужные единицы времени.

Например:
2 мин 30 с – 1 мин = 1 мин 30 с (минуты отнимаются от минут)
42 мин 40 с – 17 мин 30 с = 25 мин 10 с.

Способ выполнения: от минут отнимаются минуты, а от секунд — секунды. Запись имеет следующий вид:

$$\begin{array}{r} -\,42\text{ мин }40\text{ с} \\ \underline{17\text{ мин }30\text{ с}} \\ 25\text{ мин }10\text{ с} \end{array}$$

6. Скорость

Скорость — это путь, пройденный телом за единицу времени.

Скорость величина физическая, ее наименования содержат две величины — единицы длины и единицы времени: 3 км/ч; 45 м/мин; 20 см/с; 8 м/с и т. п.

Учащимся начальной школы очень трудно объяснить саму запись наименований, поскольку с записью дробных чисел в новом варианте учебника они не знакомятся. Трудно дать наглядное представление о скорости, поскольку это лишь условное отношение пути ко времени, и ни изобразить его, ни увидеть невозможно.

При знакомстве со скоростью обычно обращаются к сравнению времени передвижения объектов или расстояний, пройденных ими за единицу времени.

Например:

Пешеход проходит 4 км в час, а велосипедист за это время проезжает в 3 раза больше. На сколько километров в час больше проезжает велосипедист, чем проходит пешеход?

Средняя скорость — это среднее арифметическое нескольких значений скорости.

Например:

Мотоциклист ехал 3 ч со средней скоростью 60 км/ч и 2 ч со средней скоростью 70 км/ч. Какое расстояние он проехал за это время? Узнай среднюю скорость его движения.

Работа над задачей:

Для решения задачи используется зависимость: *расстояние — это скорость, умноженная на время.*

Следовательно: 60 · 3 + 70 · 2 = 320 (км) — пройденное расстояние.

Чтобы найти среднюю скорость, найдем время движения: 3 ч + 2 ч = 5 ч.

Средняя скорость: 320 : 5 = 64 (км/ч).

При решении задач на движение используются понятия: *скорость сближения* и *скорость удаления.*

Скорость сближения — это сумма скоростей двух объектов при одновременном движении навстречу друг другу.

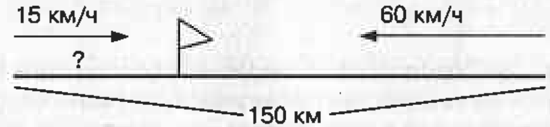
Скорость удаления — это сумма скоростей двух объектов при одновременном движении в противоположные стороны.

Например:

Расстояние между городом и зимовкой 150 км. Из города к зимовке выехали аэросани со средней скоростью 60 км/ч. В это же время навстречу им из зимовки по той же дороге вышел лыжник со средней скоростью 15 км/ч. На каком расстоянии от зимовки он встретил аэросани?

Работа над задачей:

К задаче полезно сделать рисунок:



Анализ задачи удобно провести «от данных» (см. глава 8):

— Что можно узнать, зная, что лыжник и аэросани двигались навстречу друг другу со скоростью 15 км/ч и 60 км/ч? *(Скорость сближения.)*

15 + 60 = 75 (км/ч) — расстояние, на которое они сближались за 1 час.

— Как найти время, через которое они встретятся? *(Расстояние разделить на скорость.)*

150 : 75 = 2 (ч) — через 2 часа они встретятся.

— Какое расстояние пройдет за это время лыжник?

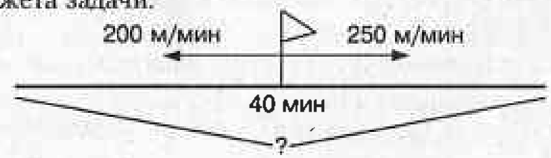
15 · 2 = 30 (км) — на таком расстоянии от зимовки они встретятся.

Приведем пример задачи, в которой фигурирует «скорость удаления»:

От одной пристани одновременно отошли две моторные лодки в противоположных направлениях. Одна шла со средней скоростью 250 м/мин, а другая — 200 м/мин. На каком расстоянии друг от друга будут лодки через 40 мин?

Работа над задачей:

К задаче можно сделать рисунок. Хотя роли в способе ее решения рисунок не играет, но создает в воображении ребенка «картинку» сюжета задачи.



Анализ задачи удобно провести «от данных»:

— Что можно узнать, зная, что лодки двигались в противоположных направлениях со скоростью 200 м/мин и 250 м/мин? *(Скорость их удаления друг от друга.)*

200 + 250 = 450 (м/мин) — на столько м лодки удалялись друг от друга за 1 мин.

— Как найти, на сколько они удалились друг от друга за 40 мин? *(Скорость удаления умножить на время.)*

450 · 40 = 18 000 (м) = 18 км — расстояние между лодками через 40 мин.

Используя зависимость между скоростью, временем и расстоянием, решаются все виды задач на движение.

Например:

> Из двух городов, расстояние между которыми 1200 км, вышли одновременно навстречу друг другу два поезда. Один из них проходит это расстояние за 20 ч, другой — за 30 ч. Через сколько часов поезда встретятся?

Работа над задачей:

В методике рекомендуется делать рисунки ко всем задачам на движение. В данной задаче рисунок может сыграть отрицательную роль, поскольку два времени, обозначенные справа и слева отрезка «путь», могут подтолкнуть ребенка к сложению этих данных (типичная ошибка — первым действием дети находят сумму: 20 + 30 = 50 ч, а затем пытаются делить все расстояние на эту сумму).

Целесообразнее провести разбор текста «от данных», сразу фиксируя каждый шаг записью действия:

— Что можно узнать, зная, что первый поезд проходит 1200 км за 20 ч? *(Его скорость: расстояние делим на время.)*

1200 : 20 = 60 (км/ч) — скорость 1 поезда

— Что можно узнать, зная что второй поезд проходит 1200 км за 30 ч? *(Его скорость: расстояние делим на время.)*

1200 : 30 = 40 (км/ч) — скорость 2 поезда.

— Что надо знать, чтобы ответить на вопрос задачи? *(Скорость сближения и расстояние.)*

— Что из этих величин мы знаем? *(Расстояние: 1200 км.)*

— Как найти скорость сближения? *(Сложить скорости поездов.)*

60 + 40 = 100 (км/ч) — скорость сближения.

— Как найти время встречи? *(Расстояние разделить на скорость сближения.)*

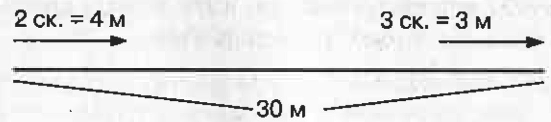
— 1200 : 100 = 12 (ч) — через 12 ч поезда встретятся.

Скорость сближения находим как разность скоростей в задачах «на движение вдогонку». Задач такого вида в рассматриваемом учебнике нет. Приведем пример такой задачи из учебника И.И. Аргинской:

> Собака погналась за лисицей, которая была от нее на расстоянии 30 м. Скачок собаки 2 м, скачок лисицы 1 м. В то время как лисица делает 3 скачка, собака делает только 2 скачка. Догонит ли собака лисицу? Сколько скачков она должна сделать для этого? Какое расстояние пробежит собака?

Работа над задачей:

Рисунок в этой задаче только создает «картинку» ситуации:



Рассуждения:

Скорость собаки — 2 скачка = 4 м, скорость лисицы — 3 скачка = = 3 м. Скорость собаки больше скорости лисицы, поэтому собака будет догонять лисицу.

Скорость сближения: 4 м – 3 м = 1 м на каждые два скачка собаки, т. е. на каждые 4 м пути собаки. Тогда 30 м собака сократит за 30 раз по 2 скачка, т. е. за 60 скачков. Расстояние, которое пробежит при этом собака: 2 · 60 = 120 (м).

7. Действия с именованными числами

Именованными числами в начальных классах называют числа с наименованиями единиц измерения величин. При решении задач с ними приходится выполнять арифметические действия.

Приведем примеры выполнения арифметических действий над именованными числами с постепенным нарастанием сложности:

4 км 700 м — 400 м = ...
8 дм — 4 см = ...
7 см — 5 мм = ...
6 см 2 мм + 9 мм = ...

Выполнить данные действия можно двумя способами.

Способ 1:

1) преобразовать составные именованные числа в простые: 6 см 2 мм = 62 мм;

2) выполнить арифметическое действие: 62 мм + 9 мм = 71 мм;

3) снова преобразовать простое именованное число в составное: 71 мм = 7 см 1 мм.

Способ 2:

1) сначала сложить более мелкие единицы: 2 мм + 9 мм = 11 мм;

2) преобразовать полученное простое именованное число в составное:

11 мм = 1 см 1 мм;

3) сантиметры сложить с сантиметрами и добавить миллиметры:

6 см + 1 см + 1 мм = 7 см 1 мм.

Эти способы используются при выполнении арифметических действий с числами любых наименований.

Глава 5

Геометрический материал в программе начальных классов

Лекция 16.

Элементы геометрии в начальной школе

1. Краткая характеристика геометрического содержания курса математики в начальной школе.
2. Геометрические понятия в начальной школе.
3. Задания на измерение и вычисление.
4. Задания на построение.

1. Краткая характеристика геометрического содержания курса математики начальной школы

Одной из основных задач изучения геометрического содержания в курсе математики начальной школы является развитие пространственного воображения у ребенка, умения наблюдать, сравнивать, обобщать, анализировать и абстрагировать. Второй важной задачей является формирование у ребенка практических умений измерения и построения геометрических фигур с помощью циркуля, угольника и линейки. Задания на вычисления различных параметров геометрических фигур (длин отрезков, периметра и площади прямоугольника и квадрата) позволяют показать ребенку взаимосвязь количественных и пространственных характеристик объектов материального мира, а также показать еще одно приложение понятия «натуральное число» — как результата измерения величин.

В соответствии с последней редакцией Обязательного минимума содержания образования по математике для начальных классов список изучаемых геометрических понятий значительно расширился по отношению к предыдущим вариантам стабильной программы. Общая тенденция геометризации курса школьной математики коснулась и начальных классов. В соответствии с этой тенденцией насыщение курса математики начальной школы геометрическим содержанием является перспективной линией развития математического образования начального звена.

Обязательный минимум содержания образования по математике содержит следующий перечень понятий геометрического характера:

Точка. Линии: прямые, кривые. Отрезок. Угол. Прямой угол. Многоугольники: треугольник, прямоугольник, квадрат. Вершины и стороны многоугольника. Окружность и круг. Куб. Шар.

Измерение длин.

Измерение площади. Вычисление площади прямоугольника.

По отношению к этому перечню, определяющему минимум содержания, сегодняшний традиционный учебник математики содержит намного больше геометрических понятий. Можно отметить, что сегодня стабильный учебник математики содержит даже больше геометрических понятий, чем многие альтернативные учебники развивающих систем.

2. Геометрические понятия в начальной школе

В 1 классе различные геометрические фигуры используются как материал для построения заданий на распознавание, сравнение, обобщение и классификацию. Цель этих заданий — формирование и развитие наблюдательности ребенка; формирование и развитие умения выделять существенные (важные) признаки предмета, умения сравнить два или несколько предметов, отмечая при этом сходные и различные признаки и свойства; умения сделать несложное обобщение на основе выделенных общих свойств предметов; умения распределять предметы на группы (классификация) в соответствии с выделенным признаком. Такие задания являются основными для формирования и развития мыслительных операций (анализ, синтез, сравнение,.классификация и др.), а также умения строить обоснованные (логические) рассуждения. Необходимость обучать детей всем этим умениям оговорена в Обязательном минимуме содержания образования для начальной школы в разделе «Требования к уровню подготовки выпускников начальных классов» (М., 2001).

Геометрические понятия, с которыми дети знакомятся в 1 классе: *Точка. Линия — кривая и прямая. Отрезок. Ломаная..Звенья ломаной. Вершина ломаной. Замкнутая и незамкнутая ломаная. Многоугольники. Треугольники и четырехугольники.*

Точка — неопределяемое понятие геометрии. С точкой обычно знакомят методом показа — рисуют или прокалывают стержнем ручки в листочке бумаги. Считается, что точка не имеет ни длины, ни ширины, ни площади.

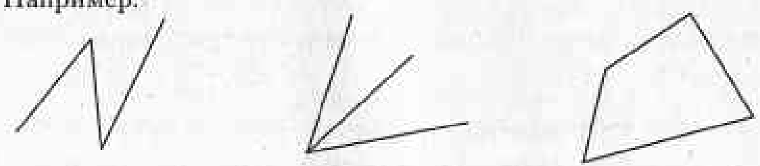
Линия — неопределяемое понятие геометрии. С линией знакомят методом показа — моделируют из шнура, или рисуют на доске или на листе бумаги.

Прямую линию удобно моделировать, сгибая любой лист бумаги — линия сгиба всегда прямая. Основное свойство прямой линии: *прямая линия бесконечна.*

Кривую линию удобно моделировать из шнура. Кривая линия также бесконечна (если она не замкнутая).

Ломаную линию удобно моделировать, используя счетные палочки или складной металлический метр. Ломаная линия содержит конечное число *звеньев. Звено ломаной* — отрезок. Точки соединения концов звеньев называют — *вершинами ломаной.* Звенья ломаной должны быть соединены последовательно.

Например:



Ломаная 1 Не ломаная 2 Ломаная 3

В программе 1 класса линии рассматривают только на плоскости.

Основные взаимоотношения точки и прямой или кривой линии, с которыми знакомятся дети в 1 классе:

1. Через одну точку можно провести множество прямых.

2. Через одну точку можно провести множество кривых.

3. Через две точки можно провести только одну прямую.

4. Через две точки можно провести множество кривых.

Отрезок — часть прямой, заключенная между двумя точками.

Отрезок имеет определенную *длину,* которую можно измерить.

Линейка — инструмент для измерения длин отрезков.

Ломаная и кривая линии могут быть *замкнутыми* и *незамкнутыми.* На рисунке ломаная 1 — незамкнутая, ломаная 3 — замкнутая.

Замкнутая ломаная на плоскости ограничивает *многоугольник.*

Многоугольник — плоская фигура, ограниченная замкнутой ломаной.

Треугольник — ограничен ломаной из трех звеньев. Соответственно имеет три стороны и три вершины.

Четырехугольник — ограничен ломаной из четырех звеньев. Соответственно имеет четыре стороны и четыре вершины.

Геометрические понятия, с которыми дети знакомятся во 2 классе: *Длина ломаной. Прямой угол. Непрямой угол. Прямоугольник. Квадрат.*

Длина ломаной — сумма длин звеньев ломаной. Для нахождения длины ломаной следует измерить длину каждого звена и результаты сложить.

Прямой угол — это угол, который по определению содержит 90°. Поскольку в начальной школе при обучении по стабильной программе дети не знакомятся с градусной мерой углов, понятие прямого угла дается методом показа:

Это — прямой угол   Это — не прямой угол

Для получения модели прямого угла дети используют лист бумаги, сгибая его соответствующим образом:

Прямой угол

Методом проб дети учатся находить прямой угол среди рисунков других углов и на различных геометрических фигурах: прикладывают к ним свою модель, выделяя углы, с ней совпадающие. Модель прямого угла служит средством проверки такого выбора. В дальнейшем бумажная модель прямого угла заменяется *угольником*, который является основным инструментом для распознавания и построения прямых углов.

Прямоугольник — четырехугольник, у которого все углы прямые. Основное свойство прямоугольника: *противолежащие стороны прямоугольника имеют равные длины.*

Это свойство дети определяют опытным путем: перегибают бумажные модели прямоугольников, совмещая противолежащие стороны.

При невозможности применить этот метод, его заменяют измерением длин противолежащих сторон.

Используя это свойство, дети должны уметь чертить прямоугольник по известным длинам двух его сторон, понимая, что две другие стороны имеют такие же длины, а углы его — прямые.

Квадрат — прямоугольник, у которого все стороны равны.

Используя это определение, дети должны уметь чертить квадрат по известной длине одной стороны, понимая, что все остальные стороны квадрата имеют такую же длину, а углы его — прямые.

Геометрические понятия, с которыми знакомятся в 3 классе: *Периметр многоугольника. Площадь прямоугольника. Круг. Окружность. Радиус. Диаметр. Треугольники равносторонние, равнобедренные и разносторонние.*

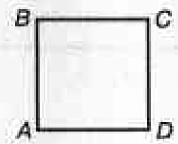
В 3 классе дети знакомятся с обозначением фигур заглавными латинскими буквами.

Чтобы *назвать отрезок*, обозначают точки, которые являются его концами.

Например: отрезок *MN*.   *M* ——————— *N*

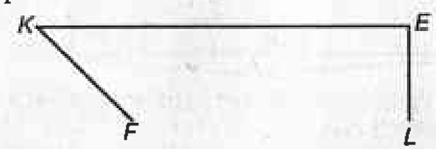
Чтобы *назвать многоугольник*, обозначают буквами его вершины.

Например: квадрат *ABCD*.



Чтобы *назвать ломаную*, также обозначают буквами ее вершины.

Например: ломаная *FKEL*.



Периметр многоугольника — сумма длин всех его сторон. Для нахождения периметра многоугольника измеряют длины его сторон и складывают полученные результаты.

Периметр квадрата находят умножением на 4 длины его стороны, поскольку стороны квадрата имеют равные длины.

Периметр прямоугольника находят, складывая суммы длин двух его непротиволежащих сторон, и умножая результат на 2.

Площадь плоской фигуры измеряется количеством стандартных мер площади, укладывающихся внутрь фигуры. Стандартные меры площади: мм²; см²; дм²; м²; км².

В 3 классе дети знакомятся с см².

Инструмент для определения площади всех фигур — *палетка.*

Палетка — лист кальки (или прозрачного пластика), на который нанесена сетка квадратов размером 1 см × 1 см. Для измерения площади фигуры с помощью палетки, ее накладывают на фигуру и подсчитывают примерное число полных квадратных сантиметров в измеряемой фигуре. Для получения приближенного значения площади фигуры, число неполных квадратных сантиметров обычно рекомендуется разделить на 2.

Способ нахождения площади прямоугольника: *Чтобы вычислить площадь прямоугольника, измеряют его длину и ширину (в одинаковых единицах) и находят произведение полученных чисел.*

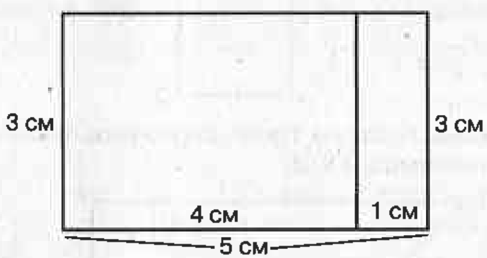
Например:

От прямоугольного листа со сторонами 5 см и 3 см отрезали полоску со сторонами 3 см и 1 см. Найди площадь оставшейся части.

Решение:

1. Найдем площадь данного листа : 5 см · 3 см = 15 см².
2. Найдем площадь полоски: 3 см · 1 см = 3 см².
3. Найдем разницу площадей: 15 см² – 3 см² = 12 см².

Используя чертеж, данную задачу можно решить другим способом:

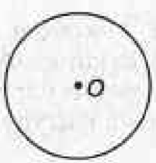


Анализ рисунка сразу показывает, что оставшаяся часть имеет площадь: 3 см · 4 см = 12 см².

Окружность и круг образованы замкнутой кривой линией.

Круг — часть плоскости, ограниченная окружностью. Граница круга — *окружность*.

Поскольку в начальных классах не знакомят детей с классическим определением окружности (*множество точек, равноудаленных от центра*), знакомство с окружностью проводят методом показа, связывая его с непосредственной практической деятельностью по вычерчиванию окружности при помощи циркуля. Замкнутая кривая линия, которую рисует грифель циркуля — это окружность.

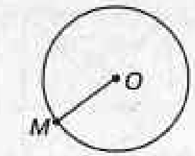


Окружность (круг) имеет *центр*: точка O — центр окружности (круга).

Радиус окружности — отрезок, соединяющий центр окружности с какой-нибудь ее точкой.

Например: OM — радиус окружности (круга).

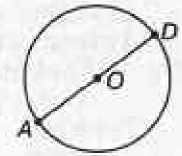
Основное свойство радиусов одной окружности: *Радиусы одной окружности (круга) равны.*



Диаметр окружности (круга) — отрезок, проходящий через центр окружности (круга) и соединяющий две любые ее точки.

Например: диаметр AD.

Основное свойство диаметров одной окружности (круга): *Диаметры одной окружности (круга) равны.*



Отношения между радиусом и диаметром одной окружности (круга): *Диаметр равен двум радиусам.*

Треугольники, имеющие стороны разной длины, называют *разносторонними.*

Треугольники, у которых равны две стороны, называют *равнобедренными.*

Среди равнобедренных треугольников есть такие, у которых равны все три стороны. Эти треугольники называют *равносторонними.*

Геометрические понятия, с которыми дети знакомятся в 4 классе:

Диагонали прямоугольника. Свойства диагоналей прямоугольника.

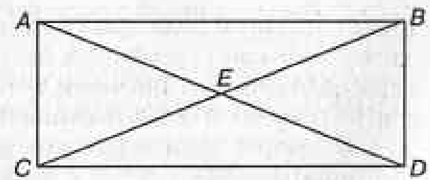
Луч. Числовой луч.

Угол. Элементы угла. Прямой, острый и тупой угол. Треугольники остроугольные, прямоугольные и тупоугольные.

Диагональ многоугольника — отрезок, соединяющий противолежащие вершины многоугольника.

С диагоналями прямоугольника детей знакомят методом показа:

Например:



Отрезки AB и CD — диагонали прямоугольника $ABDC$.

Точка E — точка пересечения диагоналей.

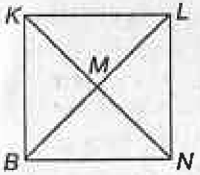
Основные свойства диагоналей прямоугольника:

Диагонали AD и BC имеют равные длины.

Отрезки, получаемые при пересечении диагоналей прямоугольника, равны.

Данные свойства определяются эмпирическим (опытным) путем — измерением длин соответствующих отрезков.

Поскольку квадрат является прямоугольником, то его диагонали обладают теми же свойствами. Кроме того, *диагонали квадрата пересекаются под прямым углом.*



Например:

Непосредственное измерение углов с помощью угольника показывает, что углы, получающиеся при пересечении диагоналей квадрата, прямые.

Луч — часть прямой, ограниченная с одной стороны.

Луч имеет начало, но не имеет конца.

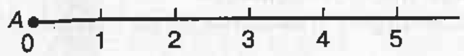
Изображение луча:

Точка A — начало луча.

В математике луч обычно обозначается двумя буквами, например: луч AC. Такая запись обозначает, что луч имеет началом точку A и «идет» в сторону , обозначенную буквой C:

Числовой луч — луч, на котором точками обозначены натуральные числа. Расстояние между точками равно 1 единице измерения (единичный отрезок), которая задается условно. Чаще всего это 1 или 2 клетки.

Каждой точке ставится в соответствие число, начиная с числа 1. Началу луча ставится в соответствие число 0.



Числовой луч играет большую роль при иллюстрации понятия натуральный ряд чисел, позволяет сравнивать натуральные числа, ориентируясь на их расположение на числовом луче, позволяет выполнять приемы присчитывания и отсчитывания по частям с опорой на числовой луч. В связи с этим некоторые альтернативные учебники (Н.Б. Истомина) знакомят детей с этим понятием еще в 1 классе.

Другая роль числового луча состоит в том, что используя это понятие, можно познакомить детей с прямоугольной системой координат (числовой или координатный угол) , отрицательными числами (числовая прямая).

Например:

Объясни с помощью числового луча, в какую сторону от точки, соответствующей точке 8, надо двигаться, чтобы найти все числа, которые меньше числа 8, и те числа, которые больше, чем 8.

Ответ: Чтобы найти все числа, которые меньше, чем 8, нужно двигаться влево от числа 8. Чтобы найти числа, которые больше, чем число 8, нужно двигаться от него вправо.

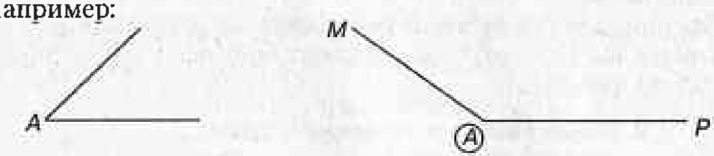
Угол — это фигура, образованная двумя лучами, имеющими общее начало.

Стороны угла — это лучи, образующие угол.

Вершина угла — это общее начало лучей, образующих угол.

Обозначение угла: угол может быть назван по его вершине — угол M; угол может быть назван тремя буквами — угол MAP, при этом буква, стоящая в вершине угла, должна быть средней.

Например:

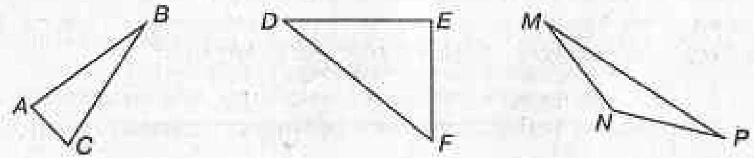


Остроугольный треугольник — треугольник, все углы которого острые.

Прямоугольный треугольник имеет один прямой угол.

Тупоугольный треугольник имеет один тупой угол.

Например:



остроугольный треугольник | прямоугольный треугольник | тупоугольный треугольник

В треугольнике не может быть более одного прямого угла.

В треугольнике не может быть более одного тупого угла.

Равносторонний треугольник может быть только остроугольным.

Прямоугольный и тупоугольный треугольники могут быть равнобедренными.

Разносторонними могут быть и остроугольный, и прямоугольный, и тупоугольный треугольники.

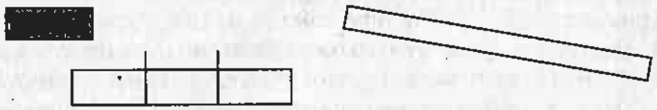
3. Задания на измерение и вычисление

Задания на измерение и вычисление являются основными видами заданий, построенных на геометрическом содержании. Цель этих заданий — формирование у ребенка измерительных умений и навыков, применение имеющихся вычислительных умений к заданиям практического характера.

Рассмотрим виды заданий на измерение и вычисление по годам обучения.

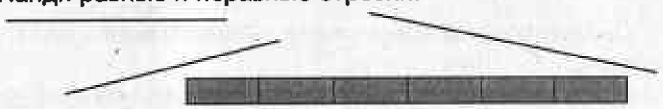
1 класс

1. Сравни длину полосок с помощью одинаковых мерок.



Выполнение:
Заданную мерку ребенок укладывает по длине каждого отрезка, считая их. Если отрезок содержит большее количество мерок, значит он длиннее.

2. Найди равные и неравные отрезки.



Выполнение:
Используя данную мерную полоску, ребенок прикладывает ее к каждому отрезку, отмечая количество уложившихся мерок. Равные отрезки содержат равное количество мерок.

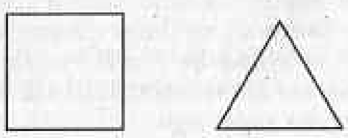
3. Саша начертил отрезок длиной 6 см. Аня продолжила этот отрезок на 1 см. Какой длины получился отрезок? Начерти его.

Выполнение: Ребенок чертит по линейке отрезок длиной 6 см. Затем продолжает его на 1 см и измеряет весь получившийся отрезок (7 см).

4. Узнай длину этих отрезков в сантиметрах. Начерти в тетради отрезки такой же длины.

Выполнение:
Каждый отрезок измеряется с помощью линейки. В тетради ребенок чертит отрезки такой же длины (столько же сантиметров).

5. Чему равна длина каждой стороны треугольника и каждой стороны квадрата?



Выполнение:
Зная свойство квадрата, ребенок измеряет длину только одной стороны. Остальные стороны имеют такую же длину.
Стороны треугольника можно сначала сравнить с помощью циркуля — они равны (треугольник равносторонний), значит, можно измерить только одну сторону — остальные стороны имеют такую же длину.

6. На сколько сантиметров длина одного отрезка больше длины другого?

Выполнение:
Возможны два способа выполнения:
1. Длина каждого отрезка измеряется и вычисляется разница длин в сантиметрах.
2. С помощью циркуля меньший отрезок откладывается на большем, а затем разница длин измеряется.

7. Измерь длину и ширину обложки учебника в сантиметрах. Сколько это дециметров и сантиметров?

Выполнение:
Линейные размеры учебника измеряются линейкой в сантиметрах, а затем сантиметры выражаются в дециметрах и сантиметрах, например:
21 см = 2 дм 1 см

8. Начерти в тетради такую ломаную. Узнай длину каждого звена ломаной и найди сумму длин всех ее звеньев.

Выполнение:
Рисунок ломаной дан в учебнике на клетчатой поверхности. Используя подсчет клеточек, ребенок копирует рисунок в тетрадь. Затем измеряет длину каждого звена и вычисляет их сумму.

2 класс

1. Начерти отрезок длиной 10 см. Поставь на нем точку так, чтобы получился отрезок длиной 4 см. Узнай длину второго отрезка. Сравни длины полученных отрезков.

Выполнение:

Ребенок чертит отрезок длиной 10 см. От любого края отмеряет 4 см и ставит точку — получился отрезок длиной 4 см. Измеряет длину второго отрезка — 6 см (или вычисляет ее: 10 см – 4 см = 6 см). Разницу длин находит вычислением: 6 см – 4 см = 2 см.

2. Начерти прямоугольник со сторонами 1 см и 6 см. Проведи в нем один отрезок, чтобы получился квадрат.

Выполнение:

Ребенок чертит прямоугольник со сторонами 1 см и 6 см.

Для получения квадрата необходимо использовать одну из сторон прямоугольника — это сторона длиной 1 см, поскольку у квадрата все стороны имеют равные длины, значит, выделить квадрат со стороной 6 см нельзя. Поэтому нужно выделять квадрат со стороной 1 см. Откладываем от любого края 1 см и проводим вертикальный отрезок, следя за тем, чтобы он пересек стороны прямоугольника под прямым углом.

3. Начерти несколько ломаных из двух звеньев так, чтобы длина каждой ломаной была равна 11 см.

Выполнение:

Число 11 представляется в виде суммы двух слагаемых, например: 4 + 7. Ребенок вычерчивает ломаные, имеющие соответствующие длины звеньев.

4. Начерти ломаную из четырех звеньев, длины которых 2 см, 3 см, 4 см, 2 см. Найди длину этой ломаной. Начерти отрезок, длина которого равна длине ломаной.

Выполнение:

Ломаная с соответствующими длинами звеньев вычерчивается произвольно. Найти длину ломаной можно двумя способами:

1. Вычислив сумму длин отрезков: 2 см + 3 см + 4 см + 2 см = 11 см. Затем начертить этот отрезок.

2. На прямой отложить последовательно все отрезки, получить суммарный отрезок и измерить его длину. Это и будет отрезок, длина которого равна длине ломаной.

3 класс

1. Измерь стороны треугольника *OMK* (в миллиметрах) и узнай, на сколько миллиметров сумма длин отрезков *OK* и *OM* больше длины отрезка *KM*.

Выполнение:

Треугольник *OMK* дан на рисунке в учебнике. Ребенок измеряет длины сторон в миллиметрах. Вычисляет сумму длин отрезков *OK* и *OM*. Затем вычисляет разницу этой суммы и длины отрезка *KM*.

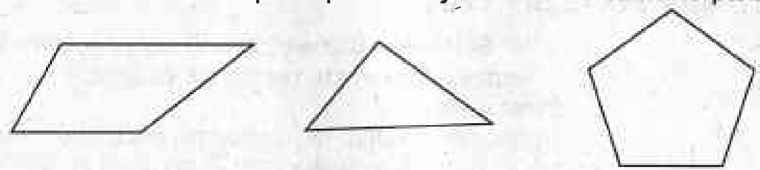
2. Начерти отрезок *AB* длиной 60 мм. Отметь на нем точку *C* так, чтобы длина отрезка *AC* была равна 15 мм. Узнай длину отрезка *CB*, не измеряя его.

Выполнение:

Ребенок чертит отрезок *AB* по линейке. Отмеряет от точки *A* 15 мм, получает отрезок *AC*. Длину отрезка *CB* находит вычислением:

60 мм – 15 мм = 45 мм

3. Вычисли периметры многоугольников в сантиметрах.



Выполнение:

Длины сторон фигур ребенок измеряет линейкой и вычисляет периметр (сумму длин сторон). У четырехугольника противолежащие стороны равны, поэтому можно, выяснив это с помощью циркуля, вычислять его периметр рациональным способом: найти сумму двух рядом лежащих сторон, а затем умножить это число на 2. У пятиугольника все стороны равной длины. Выяснив это с помощью циркуля, можно измерить одну сторону, а затем умножить ее длину на 5.

4. Чему равна сторона квадрата, если его периметр равен периметру прямоугольника со сторонами 5 см и 3 см?

Выполнение:

Вычисляется периметр прямоугольника: (5 см + 3 см) · 2 = 16 см.

Этот периметр равен периметру квадрата. Поскольку у квадрата все стороны равны, значит, сторона квадрата равна: 16 см : 4 см = 4 см.

5. Начерти два отрезка так, чтобы длина одного была 4 см, а длина другого — в 2 раза больше. Обозначь отрезки буквами и узнай, на сколько сантиметров один из них меньше другого.

Выполнение:

Вычерчивается отрезок длиной 4 см. Длина другого 4 см · 2 = 8 см. Разницу длин находят вычислением 8 см – 4 см = 4 см.

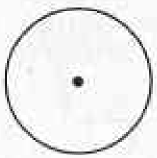
6. **Вычисли площадь прямоугольника, длины сторон которого 9 см и 2 см.**

Выполнение:
Площадь прямоугольника находится как произведение длин сторон. Значит 9 см · 2 см = 18 см^2.

7. **Найди длину стороны квадрата *ABCD*, периметр которого 8 см. Начерти его и вычисли площадь.**

Выполнение:
Периметр квадрата — это сумма длин всех его сторон, значит одна сторона квадрата 8 см : 4 = 2 см (поскольку стороны квадрата имеют равные длины). Площадь квадрата — это произведение длин его сторон: 2 см · 2 см = 4 см^2.

8. **Измерь радиус данной окружности и начерти окружность такого же радуса.**



Выполнение:
Проводим радиус окружности, соединяя центр с любой точкой окружности. Измеряем ее циркулем и вычерчиваем окружность такого же радиуса.

9. **Начерти три отрезка: длина первого отрезка 8 см, длина второго составляет одну четвертую длины первого, а длина третьего на 6 см больше длины второго.**

Выполнение:
Первый отрезок вычерчивается по заданной длине. Длина второго сначала вычисляется: 8 см : 4 = 2 см. Длина третьего отрезка также сначала вычисляется: 2 см + 6 см = 8 см.

10. **Начерти квадрат, площадь которого равна площади прямоугольника со сторонами 2 см и 8 см. Найди периметр этого квадрата.**

Выполнение:
1. Вычислим площадь прямоугольника: 2 см · 8 см = 16 см^2.
2. Эта площадь равна площади квадрата. Площадь квадрата равна произведению длин его сторон, значит, нужно подобрать число, произведение которого на само себя равно 16 — это число 4. Длина стороны квадрата 4 см. Периметр квадрата 4 см · 4 = 16 см.

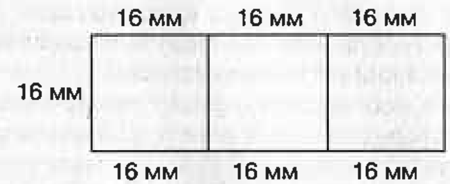
11. **Периметр равностороннего треугольника 24 см. Чему равна длина каждой его стороны?**

Выполнение:
Равносторонний треугольник имеет стороны равной длины, значит 24 см : 3 = 8 см — длина стороны треугольника.

12. **Из трех одинаковых квадратов составили прямоугольник. Узнай периметр этого прямоугольника, если сторона каждого квадрата равна 16 мм.**

Узнай сторону квадрата, периметр которого равен периметру этого прямоугольника.

Выполнение:
Для решения этой задачи удобно выполнить рабочий рисунок (примерный):

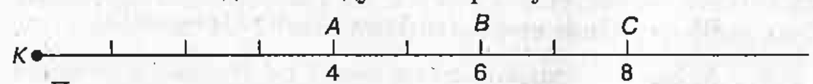


Анализ рисунка показывает, что для нахождения периметра прямоугольника нужно 16 мм · 8 = 128 мм.
Если считать это число периметром квадрата, можно определить длину его стороны: 128 мм : 4 = 32 мм.

4 класс

1. **Начерти луч с началом в точке *K*. Отложи на нем от его начала один за другим несколько отрезков длиной по 15 мм. Отметь на луче точки *A*, *B*, *C*, соответствующие числам 4, 6, 8. Найди длины отрезков *KA*, *KB*, *AC*, *BC*.**

Выполнение:
Выполнять задание следует по чертежу:

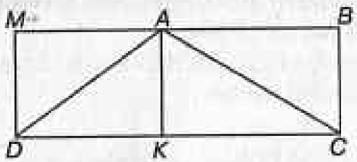


По рисунку определяем длины отрезков:
KA — 4 единицы по 15 мм,
KA = 15 мм · 4 = 60 мм.
KB — 6 единиц по 15 мм, *KB* = 15 мм · 6 = 90 мм.
AC — 4 единицы по 15 мм, *AC* = 15 мм · 4 = 60 мм.
BC — 2 единицы по 15 мм, *BC* = 15 мм · 2 = 30 мм.

2. **Начерти отрезок длиной 60 мм. Раздели его на 6 равных частей. Сколько миллиметров в пяти шестых долях этого отрезка?**

Выполнение:
Находим длину одной шестой доли отрезка: 60 мм : 6 = 10 мм
Находим длину пяти шестых долей отрезка: 10 мм · 5 = 50 мм

3. **Рассмотри чертеж и объясни, как найти площадь треугольника *ACD*.**



Выполнение:

Треугольник *ACD* состоит из двух треугольников: *ADK* и *ACK*.

Треугольник *ADK* составляет половину квадрата *DMAK*, значит, его площадь равна половине этого квадрата.

Треугольник *ACK* составляет половину прямоугольника *ABCK*, значит, его площадь равна половине площади этого прямоугольника.

Можно заметить, что квадрат *DMAK* и прямоугольник *ABCK* составляют вместе прямоугольник *DMBC*, значит, площадь искомого треугольника *ACD* составляет половину площади прямоугольника *DMBC*.

Измеряем длины сторон прямоугольника *DMBC*, находим его площадь как произведение длин сторон, и делим полученное число пополам.

4. **Начерти два отрезка. Длина первого 8 см. Это в 2 раза больше длины второго отрезка. На сколько сантиметров длина первого отрезка больше длины второго?**

Выполнение:

Вычерчиваем первый отрезок длиной 8 см. Затем задание требует переформулировки: если это (8 см) в два раза больше, чем второй отрезок, значит, второй отрезок в два раза *меньше*, чем первый. Следовательно, длина второго отрезка 8 см : 2 = 4 см.

5. **Вырежи квадрат со стороной 8 см. Раздели его перегибанием на 4 равных треугольника и найди площадь каждого из них.**

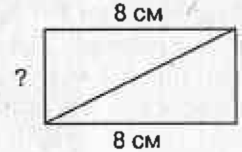
Выполнение:

Для нахождения площади искомого треугольника нужно сначала найти площадь квадрата 8 см · 8 см = 64 см^2, а затем разделить ее на 4, поскольку все треугольники равные 64 см^2 : 4 = 16 см^2.

6. **Длина прямоугольника 8 см, его периметр 24 см. Начерти такой прямоугольник, раздели его на два равных треугольника. Какие получились треугольники: остроугольные, тупоугольные или прямоугольные? Найди площадь каждого треугольника.**

Выполнение:

Для того чтобы начертить такой прямоугольник, нужно знать длину его второй стороны.

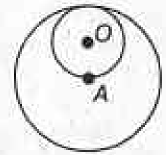


Сумма длин двух сторон 8 см + 8 см = 16 см, значит сумма двух других сторон 24 см – 16 см = 8 см. Стороны равной длины, значит, 8 см : 2 = 4 см — длина другой стороны (ширина). Теперь прямоугольник можно построить.

Разделив его на два равных треугольника диагональю, получаем *прямоугольные* треугольники. Чтобы найти площадь одного из них, разделим площадь прямоугольника пополам:

8 · 4 = 32 см^2; 32 см^2 : 2 = 16 см^2

7. **Найди диаметр большего круга, если радиус меньшего равен 1 см.**



Выполнение:

Если радиус меньшего круга равен 1 см, то его диаметр будет равен 2 см, поскольку диаметр круга равен двум радиусам.

Анализ рисунка показывает, что диаметр меньшего круга равен радиусу большего круга. Значит, радиус большего круга равен 2 см, тогда его диаметр равен 4 см.

8. **Начерти любую окружность. Проведи в ней два любых диаметра, соедини их концы отрезками и найди площадь полученного прямоугольника.**

Выполнение:

Полученный таким образом четырехугольник будет прямоугольником. Это необходимо проверить, измерив его углы угольником. Затем измеряются длины двух рядом лежащих сторон и находится площадь по формуле: площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон.

4. Задания на построение

Задания на построение составляют важную часть системы формирования геометрических знаний и умений ребенка в начальной школе. Эти задания создают базу для развития пространственного воображения у ребенка, умения наблюдать, сравнивать, обобщать, анализировать и абстрагировать. Необходимость формирования у ребенка практических умений построения геометрических фигур с помощью циркуля, угольника и линейки и подготовки к обучению рассуждениям и доказательству является важнейшей задачей курса начальной математики с точки зрения дальнейшего математического образования ребенка. Как доказано психологами, возраст ученика начальной школы является наиболее благоприятным в жизни человека возрастом для развития образного (а значит, и пространственного) мышления, формирования приемов умственных действий (сравнения, обобщения, абстрагирования и др.). Анализ особенностей этапов развития математического мышления ребенка показывает также необходимость организации подготовки к обучению доказательствам в период обучения в начальной школе.

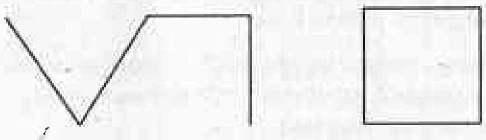
Рассмотрим виды заданий на построение по годам обучения и покажем возможности их использования для развития указанных компонентов мышления.

1 класс

1. Начерти в тетради ломаную, состоящую из четырех звеньев. Сколько вершин у этой ломаной?

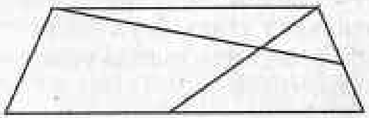
Выполнение:

По определению, концы каждого звена — это вершины ломаной. Таким образом, ломаная из 4 звеньев будет иметь 5 вершин, если она незамкнутая, и 4 вершины, если она замкнутая:



2. Вырежи из приложения нужные фигуры и составь из них домик, кораблик, рыбку (по рисунку, данному в учебнике).

Выполнение:



Задания такого вида представляют собой конструктивные задачи на развитие операции синтеза (конструирование целого из частей). В учебнике эти задания встречаются вплоть до 4 класса, но особенно важны они в 1 классе. Если у ребенка возникают затруднения, следует сделать для него увеличенный вариант рисунка, чтобы можно было складывать заданную фигуру, накладывая ее части прямо на рисунок.

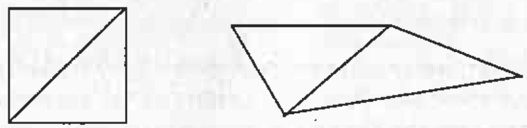
Эти задания являются подготовительными для заданий вида: сколько на чертеже треугольников, четырехугольников и т. п.

В их основе лежит операция анализа (умение мысленно «разобрать» объект на составные части и выделить каждую из них). Практика показывает, что при хорошей подготовке посредством выполнения заданий на конструирование (синтез), задания данного вида даются ребенку намного легче.

3. Начерти один четырехугольник. Проведи 1 отрезок, чтобы получилось 2 треугольника.

Выполнение:

При выполнении данного задания полезно рассмотреть разные варианты его выполнения — это развивает гибкость мышления и пространственное воображение. Полезно сравнить полученные результаты, сделав обобщение: для того чтобы получилось 2 треугольника, нужно проводить в четырехугольнике диагональ.



4. Как можно провести в треугольнике 1 отрезок так, чтобы получилось 3 треугольника?

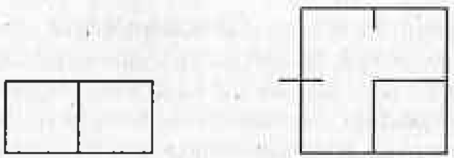
Выполнение:

Достаточно провести 1 отрезок так, чтобы разделить данный треугольник на 2 треугольника. В качестве третьего рассматриваем исходный треугольник (содержащий два меньших).

5. Составь из 7 палочек 2 одинаковых квадрата, а из 10 палочек 1 большой квадрат и 1 маленький.

Выполнение:

Задание на конструирование из палочек (см. характеристику задания 2).



6. Начерти одну ломаную, у которой 4 звена и 5 вершин, а другую — у которой 4 звена и 4 вершины.

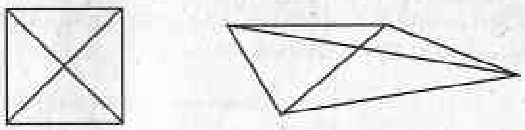
Выполнение:

См. характеристику задания 1.

7. Начерти любой четырехугольник и проведи в нем 2 отрезка так, чтобы получилось 8 треугольников.

Выполнение:

При выполнении данного задания полезно рассмотреть разные варианты его выполнения — это развивает гибкость мышления и пространственное воображение. Полезно сравнить полученные результаты, сделав обобщение: для того, чтобы получилось 8 треугольников, нужно проводить в четырехугольнике две диагонали.



Каждый четырехугольник содержит 4 маленьких треугольника, а также 4 треугольника, составленных из двух расположенных рядом маленьких треугольников.

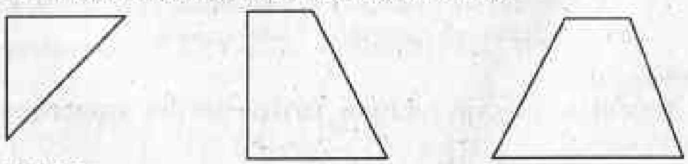
2 класс

1. Проведи прямую, отметь на ней 3 точки. Сколько всего отрезков получилось?

Выполнение: 

Задание аналитического характера: всего отрезков три: два меньших, обозначенных точками, и в качестве третьего рассматриваем отрезок, содержащий оба меньших отрезка (фактически: два отрезка являются частями третьего).

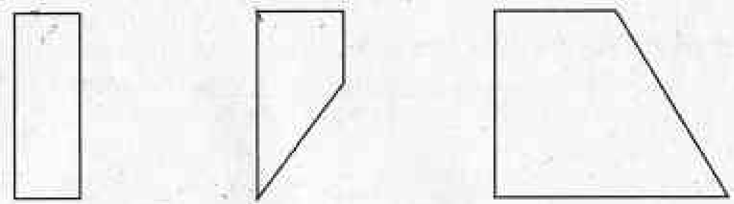
2. Начерти и дополни до прямоугольника:



Выполнение:

Задание развивает воссоздающее воображение, требует воссоздания целого по его частям. Поскольку в учебнике эти задания даны на клетчатой основе, их выполнение не требует применения инструментов при достроении, достаточно производить ориентировку на количество клеточек, восстанавливая форму заданной фигуры.

3. Как провести в каждом из этих четырехугольников 1 отрезок, чтобы получился квадрат?



Выполнение:

Задание обратное по типу заданию 2. Требует анализа и выделения части из целого. Оно также дано в учебнике на клетчатой основе, поэтому не требует применения инструментов. Для его выполнения достаточно ориентировки по клеточкам и соблюдения равенства сторон квадрата.

4. Сложи из треугольников нарисованные фигуры (по рисунку в учебнике).

Выполнение:

См. выше характеристику задания 2 из 1 класса.

3 класс

1. Начерти два отрезка так, чтобы длина одного была в два раза больше длины данного отрезка, а длина другого — в 2 раза меньше длины данного.

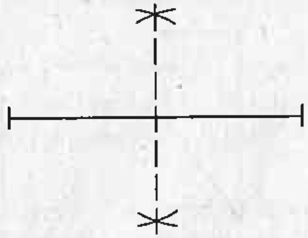
Выполнение:

Чтобы начертить отрезок в 2 раза больше данного, можно измерить его циркулем, и отложить на прямой последовательно два таких отрезка:

Полученный таким образом отрезок будет в два раза больше данного.

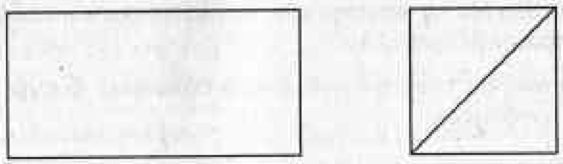
Чтобы начертить отрезок в два раза меньше данного, нужно разделить данный отрезок пополам, и построить отрезок, равный половине данного. Поскольку техника деления отрезка пополам с помощью циркуля предлагается детям для знакомства только на последней странице учебника 4 класса, очевидно, предполагается, что для выполнения этого задания следует использовать измерение и вычисление длины искомого отрезка, а потом его построение по известной длине.

Можно познакомить ребенка с техникой деления отрезка пополам с помощью циркуля:



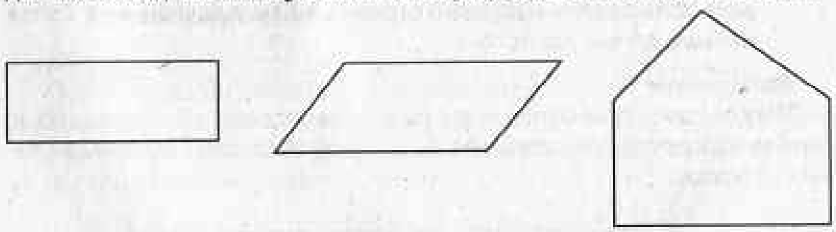
2. Начерти на клетчатой бумаге и вырежи прямоугольник и два треугольника, как на чертеже.

Составь из этих фигур: четырехугольник, пятиугольник. Сравни площади составленных фигур.



Выполнение:

Задание конструктивного характера. Цель задания — показать ребенку, что равносоставленные фигуры имеют равные площади. Полезно составить различные по форме четырехугольники и убедиться в том, что пятиугольник получается только одной формы:



3. Начерти три таких четырехугольника. В каждом из них проведи один отрезок так, чтобы он разделил четырехугольник:

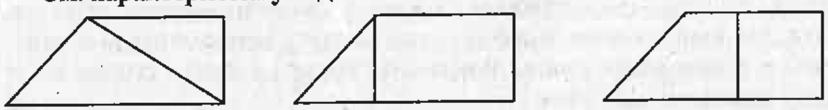
1) на два треугольника;

2) на треугольник и прямоугольник;

3) на квадрат и четырехугольник.

Выполнение:

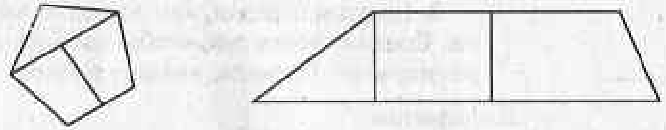
См. характеристику задания 3 из 2 класса.



4. Начерти в тетради пятиугольник и покажи на чертеже, как можно двумя взмахами ножниц разрезать этот пятиугольник так, чтобы получилось 2 четырехугольника и 1 треугольник.

Выполнение:

Полезно рассмотреть разные варианты выполнения задания:



5. Начерти в тетради любую фигуру, кроме прямоугольника, так, чтобы ее площадь была 12 см².

Выполнение:

По условию фигура не может быть прямоугольником (а значит, и квадратом). Площади фигур другой формы ученики 3 класса умеют находить только способом подсчета квадратных сантиметров. Значит, следует рисовать фигуру произвольной формы, составленную из квадратиков по 1 см².

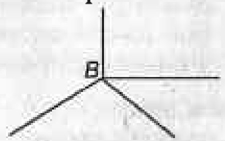
Другой, более сложный вариант: начертить прямоугольник площадью 24 см². Разделить его пополам — получится треугольник площадью 12 см².

4 класс

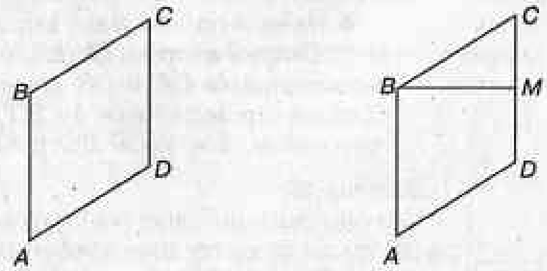
1. Начерти в тетради прямой, острый и тупой углы с общей вершиной в точке *B* разными цветными карандашами.

Выполнение:

Полезно обратить внимание ребенка на то, что получается 2 тупых угла:

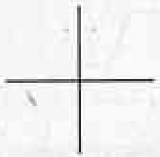


2. Начерти в тетради четырехугольник *ABCD*, как на рисунке. Проведи в нем отрезок *BM* так, чтобы угол *BMC* был прямым.



Выполнение:

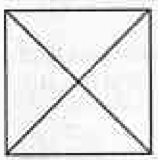
Для выполнения задания фактически требуется умение опускать перпендикуляр из точки на прямую, однако здесь предполагается, что ребенок, используя угольник, ищет позицию совмещения его сторон с отрезком *CD* и точкой *B*.



3. Начерти отрезки, как показано на чертеже. Соедини точки так, чтобы получился четырехугольник. Проверь, квадрат ли это.

Выполнение:

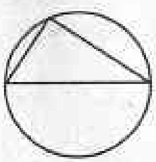
Рисунок в учебнике дан на клетчатой основе, поэтому его копирование требует только подсчета клеток. Получившаяся фигура будет квадратом. Задание иллюстрирует свойство диагоналей квадрата: диагонали квадрата при пересечении образуют прямой угол и делятся в точке пересечения пополам.



4. Рассмотри чертеж и начерти в тетради квадрат, диагональ которого равна 4 см. Проведи окружность так, чтобы она прошла через все вершины квадрата.

Выполнение:

Задание, аналогичное заданию 3 с добавлением заданной длины диагонали. Выполняется на основе подсчета клеток и свойств диагоналей квадрата. Точка пересечения диагоналей квадрата является центром описанной (и вписанной) окружности.

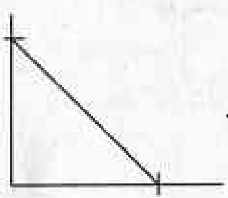


5. Начерти окружность, проведи в ней диаметр и соедини концы диаметра с любой точкой окружности. Какого вида треугольник получился?

Выполнение:

Получится прямоугольный треугольник. Задание иллюстрирует свойство вписанного угла, опирающегося на диаметр.

6. Начерти прямой угол с вершиной в точке *O*. Отложи от точки *O* на сторонах угла равные отрезки *OA* и *OB* длиной по 3 см. Соедини отрезком точки *A* и *B*. Какого вида треугольник получился? Дай два ответа.



Выполнение:

Получится равнобедренный треугольник, который также является прямоугольным.

7. Начерти разносторонний прямоугольный треугольник; равнобедренный тупоугольный треугольник.

Выполнение:

Задание проверяет умение ребенка соблюдать два заданных признака при выполнении чертежа:

Следует обратить внимание на то, что построение равнобедренного тупоугольного треугольника требует также знания способа построения равнобедренных треугольников.

8. Начерти любой прямоугольник, проведи в нем диагонали. Построй окружность с центром в точке их пересечения, которая проходит через все его вершины. (На полях дан полный чертеж.)

Выполнение:

Поскольку в учебнике дан на полях полный чертеж задания, оно требует лишь копирования образца.

Задание иллюстрирует следующее свойство прямоугольника: точка пересечения диагоналей прямоугольника является центром описанной окружности.

9. Начерти в тетради прямоугольник *ABCD* со сторонами 3 см и 4 см. Проведи в нем 2 отрезка так, чтобы получилось 8 треугольников.

Выполнение: См. характеристику задания 7 из 1 класса.

10. Построить равносторонний треугольник.

Выполнение:

В учебнике приведен полный чертеж, требуется лишь копирование образца.

11. Построить равнобедренный треугольник.

Выполнение:

См. характеристику задания 10.

12. Построить треугольник по трем заданным сторонам.

Выполнение:

См. характеристику задания 10.

13. Раздели отрезок пополам с помощью циркуля.

Выполнение:
См. характеристику задания 10.

Сравнение количества и качества заданий на построение и заданий на измерение и вычисление показывает, что заданиям на измерение и вычисление уделено в учебниках намного больше внимания. С качественной (а также перспективной) точки зрения, в дальнейшем ребенку будут необходимы в большей мере умения по построению и доказательству правильности построения, поскольку они лежат в основе умения решать задачи и доказывать теоремы в курсе геометрии и выполнять чертежи в курсе черчения.

Глава 6

Алгебраический материал в программе начальных классов

Лекция 17.

Элементы алгебры в начальной школе

1. Роль алгебраического материала в курсе математики начальных классов.
2. Математическое выражение и его значение.
3. Решение задач на основе составления уравнения.

1. Роль алгебраического материала в курсе математики начальных классов

Алгебра заменяет численные значения количественных характеристик множеств или величин буквенной символикой. В общем виде алгебра также заменяет знаки конкретных действий (сложения, умножения и т. п.) обобщенными символами *алгебраических операций* и рассматривает не конкретные результаты этих операции (ответы), а их свойства.

Методически считается, что основная роль элементов алгебры в курсе математики начальных классов состоит в том, чтобы способствовать формированию обобщенных представлений детей о понятии «количество» и смысле арифметических действий.

На сегодня наблюдаются две кардинально противоположные тенденции в определении объема содержания алгебраического материала в курсе математики начальной школы. Одна тенденция связана с ранней алгебраизацией курса математики начальных классов, с насыщением его алгебраическим материалом уже с первого класса; другая тенденция связана с введением алгебраического материала в курс математики для начальной школы на его завершающем этапе, в конце 4 класса. Представителями первой тенденции можно считать авторов альтернативных учебников системы Л.В. Занкова (И.И. Аргинская), системы В.В. Давыдова (Э.Н. Александрова, Г.Г. Микулина и др.), системы «Школа 2100» (Л.Г. Петерсон), системы «Школа XXI века» (В.Н. Рудницкая). Представителем второй тенденции можно считать автора альтернативного учебника системы «Гармония» Н.Б. Истомину.

Учебник традиционной школы можно считать представителем «серединных» взглядов — он содержит достаточно много алгебраического материала, поскольку ориентирован на использование учебника математики Н.Я. Виленкина в 5—6 классах средней школы, но знакомит детей с алгебраическими понятиями начиная со 2 класса, распределяя материал на три года, и за последние 20 лет практически не расширяет список алгебраических понятий.

Обязательный минимум содержания образования по математике для начальных классов (последняя редакция 2001 г.) *не содержит алгебраического материала.* Не упоминают умений выпускников начальной школы работать с алгебраическими понятиями и требования к уровню их подготовки по завершении обучения в начальных классах.

Рассмотрим традиционный список изучаемых в начальной школе алгебраических понятий.

2. Математическое выражение и его значение

Последовательность букв и чисел, соединенных знаками действий, называют *математическим выражением.*

Следует отличать математическое выражение от равенства и неравенства, которые используют в записи знаки равенства и неравенства.

Например:

$3 + 2$ — математическое выражение;

$7 - 5$; $5 \cdot 6 - 20$; $64 : 8 + 2$ — математические выражения;

$a + b$; $7 - c$; $23 - a \cdot 4$ — математические выражения.

Запись вида $3 + 4 = 7$ не является математическим выражением, это *равенство.*

Запись вида $5 < 6$ или $3 + a > 7$ — не являются математическими выражениями, это *неравенства.*

Числовые выражения

Математические выражения, содержащие только числа и знаки действий называют *числовыми выражениями.*

В 1 классе рассматриваемый учебник не использует данные понятия. С числовым выражением в явном виде (с названием) дети знакомятся во 2 классе.

Простейшие числовые выражения содержат только знаки сложения и вычитания, например: $30 - 5 + 7$; $45 + 3$; $8 - 2 - 1$ и т. п.

Выполнив указанные действия, получим *значение выражения.*

Например: $30 - 5 + 7 = 32$, где 32 — значение выражения.

Некоторые выражения, с которыми дети знакомятся в курсе математики начальных классов, имеют собственные названия:

$4 + 5$ — сумма;

$6 - 5$ — разность;

$7 \cdot 6$ — произведение;

$63 : 7$ — частное.

Эти выражения имеют названия для каждого компонента: компоненты суммы — слагаемые; компоненты разности — уменьшаемое и вычитаемое; компоненты произведения — множители; компоненты деления — делимое и делитель. Названия значений этих выражений совпадают с названием выражения, например: значение суммы называют «сумма»; значение частного называют «частное» и т. п.

Следующий вид числовых выражений — выражения, содержащие действия первой ступени (сложение и вычитание) и скобки. С ними дети знакомятся в 1 классе. С этим видом выражений связано правило порядка выполнения действий в выражениях со скобками: *действия в скобках выполняются первыми.*

Далее следуют числовые выражения, содержащие действия двух ступеней без скобок (сложение, вычитание, умножение и деление). С этим видом выражений связано правило порядка выполнения действий в выражениях, содержащих все арифметические действия без скобок: *действия умножения и деления выполняются раньше, чем сложение и вычитание.*

Последний вид числовых выражений — выражения, содержащие действия двух ступеней со скобками. С этим видом выражений связано правило порядка выполнения действий в выражениях, содержащих все арифметические действия и скобки: *действия в скобках выполняются первыми, затем выполняются действия умножения и деления, затем действия сложения и вычитания.*

Тождественные преобразования числовых выражений

Тождественные преобразования выражений — это замена данного выражения другим, значение которого равно значению данного выражения. Иными словами, тождественные преобразования не меняют значение выражения. В начальной школе все преобразования, выполняемые над выражениями, тождественные. Преобразования, которые могут нарушать тождественность, дети встречают только в математике старших классов — это возведение правой и левой части выражения в квадрат, потенцирование, логарифмирование и т. п.

В начальных классах тождественные преобразования опираются на свойства арифметических действий (прибавление суммы к числу, вычитания суммы из числа и т. п.). С учетом этих свойств можно изменять порядок действий в выражениях по отношению к общему правилу и при этом значение выражения не изменяется.

Например:

$(54 + 30) - 14 = (54 - 14) + 30 = 40 + 30 = 70$.

Тождественные преобразования могут выполняться на основе конкретного смысла действий.

Например:

Сравни выражения:
$35 \cdot 6 + 35 * 35 \cdot 7$.
$35 \cdot 6 + 35 = 35 \cdot 7$, значит, эти выражения имеют равные значения.

Буквенные выражения

Буквенные выражения наряду с числами содержат переменные, обозначенные буквами.

Выражения могут содержать одну букву.

Например:

Найди значение выражения $a + 3$ при $a = 7$, $a = 12$, $a = 65$.

Каждое значение переменной a дает другое значение суммы. Анализ получаемых значений суммы подводит ребенка к выводу: чем больше значение одного из слагаемых при постоянном значении другого, тем больше значение суммы.

Например:

Найди значения выражений: $24 : c$ и $c \cdot 7$, если $c = 1$, $c = 3$, $c = 6$, $c = 8$.

Анализ получаемых частных (24, 8, 4, 3) подводит ребенка к выводу: увеличение значения делителя при постоянном делимом уменьшает значение частного.

Анализ получаемых произведений (7, 21, 42, 56) подводит ребенка к выводу: увеличение одного множителя при неизменном другом множителе, увеличивает значение произведения.

Выражения могут содержать две (и более) буквы.

Например:

Вычисли значения выражений $a + b$ и $b - a$, если $a = 23$, $b = 100$; $a = 100$, $b = 450$.

Для вычисления значений выражений заданные значения переменных поочередно подставляются в выражения. Задание имеет целью подвести ребенка к пониманию возможности переменных значений компонентов действий.

Буквы могут принимать любые значения, но следует обращать внимание на область допустимых значений неизвестных, заданную

неявно тем, что все вычисления дети в начальных классах выполняют на области натуральных чисел. Так, в выражении $b - a$, переменная b может принимать любые значения, а переменная a может принимать значения только меньшие или равные b.

Для выражений, содержащих действия умножения и сложения, ограничений для значений неизвестных нет. А для выражений, содержащих действие деления, обычно предлагаются значения делимого и делителя, дающие значение частного без остатка.

Анализ приведенных примеров показывает, что буквенная символика используется в качестве средства обобщения знаний и представлений детей о количественных характеристиках объектов окружающего мира и о свойствах арифметических действий.

Использование буквенной символики представляет собой абстрагирование от конкретных количественных характеристик, которые ребенок достаточно легко может представить себе мысленно.

Например:

В клетке 2 зайчика белых и 3 зайчика серых. Сколько зайчиков всего?

Конкретное количество зайчиков можно представить на модели (палочки, кружки) и получить конкретный ответ в результате выполнения действия: 5 зайчиков всего.

Та же ситуация в буквенном виде:

В клетке a зайчиков белых и b зайчиков серых. Сколько зайчиков всего?

В этом случае ответ записывается буквенным выражением $a + b$, смысл которого не должен соотноситься с конкретным числом. Выражение является описанием смысла ситуации (объединение двух множеств в одно посредством действия сложения), и в этом его главная роль.

Такая обобщающая роль буквенной символики делает ее очень сильным аппаратом формирования обобщенных представлений и способов действий с математическим содержанием. Именно в связи с этим раннее и активное приобщение к алгебраическим понятиям является важной составляющей курсов математики для начальных классов в системах Л.В. Занкова и В.В. Давыдова, поскольку одной из ведущих идей этих курсов является идея формирования и развития теоретического стиля мышления у ребенка.

Равенство и неравенство

Два числовых математических выражения, соединенные знаком «=» называют *равенством.*

Например: $3 + 7 = 10$ — равенство.

Равенство может быть *верным* и *неверным*.

Смысл решения любого примера состоит в том, чтобы найти такое значение выражения, которое превращает его в верное равенство.

Для формирования представлений о верных и неверных равенствах в учебнике 1 класса используются примеры с окошком.

Например:

Вставь в окошки подходящие числа:

$5 - 1 = \square$ $\quad \square + \square = 4$ $\quad \square - \square = \square$ $\quad 5 - \square = 4$.

Методом подбора ребенок находит подходящие числа и проверяет верность равенства вычислением.

Процесс сравнения чисел и обозначение отношений между ними с помощью знаков сравнения приводит к получению *неравенств*.

Например: $5 < 7$; $6 > 4$ — числовые неравенства

Неравенства также могут быть *верными* и *неверными*.

Например:

Подбери числа так, чтобы записи были верными:

$\square > \square$; $\square < \square$.

Методом подбора ребенок находит подходящие числа и проверяет верность неравенства.

Числовые неравенства получаются при сравнении числовых выражений и числа.

Например:

Поставь знаки $< > =$:

$5 + 1 * 7$; $6 - 3 * 3$; $7 + 3 * 9$; $10 - 2 * 7$.

При выборе знака сравнения ребенок вычисляет значение выражения и сравнивает его с заданным числом, что отражается в выборе соответствующего знака:

$10 - 2 > 7 \qquad 5 + 1 < 7 \qquad 7 + 3 > 9 \qquad 6 - 3 = 3$

Возможен другой способ выбора знака сравнения — без ссылки на вычисления значения выражения.

Например:

Поставь знаки $< > =$:

$7 + 2 * 7$; $10 - 3 * 10$.

Для постановки знаков сравнения можно провести такие рассуждения:

Сумма чисел 7 и 2 будет заведомо больше, чем число 7, значит, $7 + 2 > 7$.

Разность чисел 10 и 3 будет заведомо меньше, чем число 10, значит, $10 - 3 < 10$.

Числовые неравенства получаются при сравнении двух числовых выражений.

Сравнить два выражения — значит сравнить их значения.

Например:

Поставь знаки $> < =$:

$35 \cdot 1 * 35 \cdot 0 + 35 \qquad 48 : 4 * 52 : 4$

При выборе знака сравнения ребенок вычисляет значения выражений и сравнивает их, что отражается в выборе соответствующего знака:

$35 \cdot 1 = 35 \cdot 0 + 35 \qquad 48 : 4 < 52 : 4$

35 0 12 13

35

Возможен другой способ выбора знака сравнения — без ссылки на вычисления значения выражения.

Например:

Поставь знаки $< > =$:

$6 + 4 * 6 + 3 \qquad 7 - 5 * 7 - 3 \qquad 90 : 5 * 90 : 10$

Для постановки знаков сравнения можно провести такие рассуждения:

Сумма чисел 6 и 4 больше суммы чисел 6 и 3, поскольку $4 > 3$, значит, $6 + 4 > 6 + 3$.

Разность чисел 7 и 5 меньше, чем разность чисел 7 и 3, поскольку $5 > 3$, значит, $7 - 5 < 7 - 3$.

Частное чисел 90 и 5 больше, чем частное чисел 90 и 10, поскольку при делении одного и того же числа на число большее, частное получается меньшее, значит, $90 : 5 > 90 : 10$.

Для формирования представлений о верных и неверных равенствах и неравенствах в новой редакции учебника (2001) используются задания вида:

Проверь, верны ли неравенства:

$45 - 18 < 42$; $50 - 8 < 58 - 10$; $27 + 15 > 32$; $64 - 7 > 64 - 9$

Выпиши верные равенства и неравенства:

9 дес. 9 ед. > 100; 5 см 6 мм = 65 мм; $69 + 8 = 77$; $90 - 7 < 89$

Для проверки используется метод вычисления значения выражений и сравнения полученных чисел.

Неравенства с переменной практически не используются в последних редакциях стабильного учебника математики, хотя в более ранних изданиях они присутствовали. Неравенства с переменными активно используются в альтернативных учебниках математики. Это неравенства вида:

$\square + 7 < 10$; $5 - \square > 2$; $\square > 0$; $\square > \square$.

После введения буквы для обозначения неизвестного числа такие неравенства приобретают привычный вид неравенства с переменной:

$a + 7 > 10$; $12 - d < 7$.

Значения неизвестных чисел в таких неравенствах находятся методом подбора, а затем подстановкой проверяется каждое подобранное число. Особенность данных неравенств состоит в том, что могут быть подобраны несколько чисел, подходящих к ним (дающих верное неравенство).

Например: $a + 7 > 10$; $a = 4$, $a = 5$, $a = 6$ и т. д. — количество значений для буквы a бесконечно, для данного неравенства подходит любое число $a > 3$; $12 - d < 7$; $d = 6$, $d = 7$, $d = 8$, $d = 9$, $d = 10$, $d = 11$, $d = 12$ — количество значений для буквы d конечно, все значения могут быть перечислены. Ребенок подставляет каждое найденное значение переменной в выражение, вычисляет значение выражения и сравнивает его с заданным числом. Выбираются те значения переменной, при которых неравенство является верным.

В случае бесконечного множества решений или большого количества решений неравенства ребенок ограничивается подбором нескольких значений переменной, при которых неравенство является верным.

Уравнение

Равенство с неизвестным числом называют *уравнением*.

Например: $x + 23 = 45$; $65 - x = 13$; $12 \cdot x = 48$; $45 : x = 3$.

Решить уравнение — значит найти такое значение неизвестного числа, при котором равенство будет верным.

Это число называют *корнем* уравнения.

Например:

$x + 23 = 45$; $x = 22$, так как $22 + 23 = 45$.

Таким образом, данное определение задает также *способ проверки уравнения*: подстановка найденного значения неизвестного числа в выражение, вычисление его значения и сравнение полученного результата с заданным числом (ответом).

Если значение неизвестного числа найдено верно, то получается *верное равенство*.

В начальной школе рассматриваются два способа решения уравнения.

Способ подбора

Подбирается подходящее значение неизвестного числа либо из заданных значений, либо из произвольного множества чисел.

Выбранное число должно при подстановке в выражение превращать его в верное равенство.

Например:

Из чисел 7, 10, 5, 4, 1, 3 подбери для каждого уравнения такое значение x, при котором получится верное равенство:

$9 + x = 14$ $\quad$ $7 - x = 2$ $\quad$ $x - 1 = 9$ $\quad$ $x + 5 = 6$

Каждое из предложенных чисел проверяется подстановкой в выражение и сравнением полученного значения с ответом.

$9 + 7 = \cancel{14}$	$7 - 7 = \cancel{2}$	$7 - 1 = \cancel{9}$	$7 + 5 = \cancel{6}$
$9 + 10 = \cancel{14}$	$\boxed{7 - 5 = 2}$	$\boxed{10 - 1 = 9}$	$10 + 5 = \cancel{6}$
$\boxed{9 + 5 = 14}$	$7 - 4 = \cancel{2}$	$5 - 1 = \cancel{9}$	$5 + 5 = \cancel{6}$
$9 + 4 = \cancel{14}$	$7 - 1 = \cancel{2}$	$4 - 1 = \cancel{9}$	$4 + 5 = \cancel{6}$
$9 + 1 = \cancel{14}$	$7 - 3 = \cancel{2}$	$1 - 1 = \cancel{9}$	$\boxed{1 + 5 = 6}$
$9 + 3 = \cancel{14}$		$3 - 1 = \cancel{9}$	$3 + 5 = \cancel{6}$

При большом количестве предложенных значений этот способ отнимает много времени и сил. При самостоятельном подборе значений выражений ребенок может не найти самостоятельно возможное значение неизвестного.

Способ использования взаимосвязи компонентов действий

Используются правила взаимосвязи компонентов действий.

Например:

Реши уравнение:

$9 + x = 14$

Неизвестно слагаемое. Чтобы найти неизвестное слагаемое, нужно из суммы вычесть известное слагаемое. Значит, $x = 14 - 9$; $x = 5$.

Реши уравнение:

$7 - x = 2$

Неизвестно вычитаемое. Чтобы найти неизвестное вычитаемое нужно из уменьшаемого вычесть разность. Значит, $x = 7 - 2$; $x = 5$.

Реши уравнение:

$x - 1 = 9$

Неизвестно уменьшаемое. Чтобы найти неизвестное уменьшаемое, нужно к разности прибавить вычитаемое. Значит, $x = 9 + 1$; $x = 10$.

Для решения уравнений с действиями умножения и деления используются правила зависимости компонентов умножения и деления.

Например:

Реши уравнение:
$96 : x = 24$

Неизвестен делитель. Чтобы найти неизвестный делитель, нужно делимое разделить на частное. Значит, $x = 96 : 24$; $x = 4$.

Проверим решение: $24 \cdot 4 = 96$.

Реши уравнение:
$x : 23 = 4$

Неизвестно делимое. Чтобы найти неизвестное делимое, нужно делитель умножить на частное. Значит, $x = 23 \cdot 4$; $x = 92$.

Проверим решение: $92 : 23 = 4$.

Реши уравнение:
$x \cdot 14 = 84$

Неизвестен множитель. Чтобы найти неизвестный множитель, нужно произведение разделить на известный множитель.

Значит, $x = 84 : 14$; $x = 6$.

Проверим решение: $6 \cdot 14 = 84$.

Использование данных правил дает более быстрый способ решения уравнений. Трудность заключается в том, что многие дети путают правила взаимосвязи компонентов действий и названия компонентов (необходимо хорошо знать 6 правил и названия 10 компонентов).

Для более трудных уравнений используется метод подбора, например:

$35 + x + x + x = 35$ — очевидно, что неизвестное может принимать только нулевое значение;

$78 - x - x = 76$ — очевидно, что $x = 1$, поскольку $78 - 1 - 1 = 76$.

Для уравнений со скобками вида $(6 + x) - 5 = 38$ используется правило взаимосвязи компонентов действий. Левую часть уравнения рассматривают сначала как разность, считая выражение в скобках *единым неизвестным компонентом.* Этот единый неизвестный компонент — уменьшаемое. Чтобы найти неизвестное уменьшаемое, нужно к разности прибавить вычитаемое:

$(6 + x) = 38 + 5$; $6 + x = 43$.

Таким образом уравнение приобретает привычный вид.

В этом уравнении требуется найти неизвестное слагаемое:

$x = 43 - 6$; $x = 37$.

Проверим решение (подставим найденное значение неизвестного в первоначальное выражение): $(6 + 37) - 5 = (6 - 5) + 37 = 1 + 37 = 38$.

Ряд альтернативных учебников математики для начальных классов практикует знакомство детей с более сложными уравнениями (И.И. Аргинская, Л.Г. Петерсон), для решения которых правила взаимосвязи компонентов действий рекомендуется применять многократно.

Например:

Реши уравнение:
$(y - 3) \cdot 5 - 875 = 210$

Решение:

Рассмотрим левую часть уравнения и определим порядок действий.

$$(y \overset{1}{-} 3) \overset{2}{\cdot} 5 \overset{3}{-} 875 = 210$$

Вид выражения в левой части определяем по последнему действию: последнее действие — вычитание, значит, начинаем рассматривать выражение как разность.

Уменьшаемое $(y - 3) \cdot 5$, вычитаемое 875, значение разности 210.

Неизвестное содержится в уменьшаемом. Найдем уменьшаемое (рассматриваем все это выражение как единое уменьшаемое): чтобы найти неизвестное уменьшаемое, нужно к разности прибавить вычитаемое.

$(y - 3) \cdot 5 = 210 + 875$;

$(y - 3) \cdot 5 = 1085$.

Снова определим порядок действий: $(y \overset{1}{-} 3) \overset{2}{\cdot} 5 = 1085$.

По последнему действию считаем выражение в левой части произведением. Первый множитель $(y - 3)$, второй множитель 5, значение произведения 1085. Неизвестное содержится в первом множителе. Найдем его (считаем все выражение $y - 3$ неизвестным). Чтобы найти неизвестный множитель, нужно произведение разделить на известный множитель.

$y - 3 = 1085 : 5$;

$y - 3 = 215$.

Получили уравнение, в котором неизвестно уменьшаемое. Найдем его:

$y = 215 + 3$;

$y = 218$.

Проверим решение, подставив найденное значение неизвестного в первоначальное уравнение:

$(218 - 3) \cdot 5 - 875 = 210$.

Вычислив значение левой части, убеждаемся в том, что получено верное равенство. Значит, уравнение решено верно.

Анализ приведенного способа решения показывает, что это длительный трудоемкий процесс, требующий от ребенка четкого знания всех правил, высокого уровня анализа и умения воспринимать комплексную структуру переменного, получаемую при пошаговом решении, как единое целое (высокий уровень синтеза и абстрагирования).

Взрослый, знакомый с универсальным методом решения подобных уравнений, применяемым в старших классах (раскрытие скобок, перенос компонентов уравнения слева направо) хорошо видит несовершенство и излишнюю трудоемкость этого метода. В связи с этим рядом методистов справедливо высказываются сомнения в целесообразности активного внедрения уравнений такой сложной структуры в курс математики начальной школы. Этот способ решения является нерациональным с математической точки зрения и будет забыт и отброшен, как только учитель математики в 5—7 классах познакомит ребенка с общими приемами решения уравнений подобного вида.

3. Решение задач на основе составления уравнения

Обучение младших школьников решению задач с помощью уравнений является дискуссионным вопросом, многократно обсуждаемым за последние 40 лет. В 1960-е годы курс математики для начальных классов включал знакомство детей с этим способом решения задач, в последующих изданиях этого учебника данный раздел был исключен, а в последней редакции этого учебника (М., 2001) знакомство с этим способом решения задач вновь включено в содержание 4 класса. Следует отметить, что решение задач с помощью составления уравнений практикуется в большинстве альтернативных учебников математики (И.И. Аргинская, Н.Б. Истомина, Л.Г. Петерсон).

Охарактеризуем суть этого метода:

«Для решения задачи с помощью составления уравнения искомое число (неизвестное) обозначают буквой, выделяют в условии задачи связи, которые позволяют составить равенство, содержащее неизвестное (уравнение), записывают соответствующие выражения и составляют равенство. Полученное уравнение решают. При этом решение полученного уравнения не связывается с содержанием задачи. Решение любой задачи можно выполнить путем составления уравнения, руководствуясь указанным планом. В этом заключается универсальность способа решения задач с помощью уравнений, что определяет его преимущества. Кроме того, решение

задач способом составления уравнений способствует овладению понятием уравнения»[1].

Методика рекомендует обучать детей решению задач с помощью уравнений в несколько этапов.

На подготовительном этапе ребенка обучают составлению выражений, содержащих неизвестное, в соответствии с текстом задания.

Упражнения такого вида содержатся в учебнике 4 класса (М., 2001).

Например:

1. Запиши уравнения и реши их:

а) Если неизвестное число умножить на 35, то получится 1505;

б) Если вычесть из 3010 неизвестное число, то получится 973.

Выполнение:

а) Обозначим неизвестное число буквой x. Составим равенство: $x \cdot 35 = 1505$.

Неизвестен множитель. Для нахождения неизвестного множителя разделим произведение на известный множитель:

$x = 1505 : 35$; $x = 43$.

Проверим решение: $35 \cdot 43 = 1505$.

б) Обозначим неизвестное число буквой x. Составим равенство: $3010 - x = 973$.

Неизвестно вычитаемое. Для нахождения неизвестного вычитаемого отнимем от уменьшаемого разность:

$x = 3010 - 973$; $x = 2037$.

Проверим решение: $3010 - 2037 = 973$.

2. К какому числу надо прибавить частное чисел 240 и 3, чтобы получить 500?

Выполнение:

Обозначим неизвестное число буквой a. Составим равенство: $a + 240 : 3 = 500$.

Определим порядок действий:

$$a \overset{2}{+} 240 \overset{1}{:} 3 = 500$$

Выполним деление:

$240 : 3 = 80$.

Составим новое уравнение: $a + 80 = 500$.

[1] *Бантова М.А., Бельтюкова Г.В.* Методика преподавания математики в начальных классах. М., 2001.

Неизвестно слагаемое. Для нахождения неизвестного слагаемого вычтем из суммы известное слагаемое:

$500 - 80 = 420$, значит, $a = 420$.

3. Объясни, что обозначают выражения: $b \cdot 3 - a \cdot 4$; $(b \cdot 3) : (a \cdot 4)$.

Выполнение:

Выражение $b \cdot 3 - a \cdot 4$ читают так: разность двух произведений, из которых первое — произведение чисел b и 3, а второе — произведение чисел a и 4.

Выражение $(b \cdot 3) : (a \cdot 4)$ читают так: частное двух произведений, из которых первое — произведение чисел b и 3, а второе — произведение чисел a и 4.

4. В универмаге за день продали 52 одинаковых детских пальто и 38 костюмов по той же цене, что и пальто. За пальто получили на k рублей больше, чем за костюмы. Запиши выражения, которые обозначают, сколько денег получили за пальто и костюмы в отдельности.

Выполнение:

Найдем разницу в количестве проданных пальто и костюмов:

$52 - 38 = 14$ (шт.) — на столько штук пальто продали больше, чем костюмов.

Все пальто одинаковые, значит и цена у них одинаковая. Разница в стоимости по условию равна k рублей, значит можно выразить цену одного пальто:

$k : 14$ — цена одного пальто, такая же цена одного костюма.

Составим выражение, которое обозначает, сколько денег получили за все пальто:

$(k : 14) \cdot 52$ рублей получили за все пальто;

$(k : 14) \cdot 38$ рублей получили за все костюмы.

5. Мальчик купил 6 тетрадей в клетку и 5 — в линейку по одинаковой цене. Всего он уплатил d рублей. Объясни, что обозначают выражения:

$6 + 5$ $\quad$ $d : (6 + 5)$ $\quad$ $d : (6 + 5) \cdot 6$

Выполнение:

Выражение $6 + 5$ — обозначает количество купленных тетрадей;

выражение $d : (6 + 5)$ — обозначает цену одной тетради, поскольку все затраченные деньги (d) делятся на все купленные тетради;

выражение $d : (6 + 5) \cdot 6$ — обозначает стоимость 6 тетрадей в клетку, поскольку цену одной тетради умножают на количество купленных тетрадей.

На втором этапе с помощью уравнений решаются простые задачи.

Традиционный учебник не содержит прямых указаний на необходимость использовать именно этот метод при решении задачи. Данный выбор оставляется на усмотрение учителя.

Например:

В классе 17 мальчиков и еще девочки. Всего в классе 28 человек. Сколько девочек в классе?

Выполнение:

Обозначим количество девочек в классе буквой x. Мы знаем, что всего детей в классе 28 человек. Составим равенство: $x + 17 = 28$.

В данном уравнении неизвестно слагаемое. Чтобы найти неизвестное слагаемое, нужно из суммы вычесть известное слагаемое.

Значит, $x = 28 - 17$; $x = 11$.

Проверим решение: $11 + 17 = 28$.

Буквой x мы обозначили девочек, значит, в классе 11 девочек.

На третьем этапе уравнения используются при решении составных задач.

Традиционный учебник не содержит прямых указаний на необходимость использовать именно этот метод при решении задачи. Данный выбор оставляется на усмотрение учителя.

Например:

В книге 48 страниц. Даша читала книгу в течение трех дней, по 9 страниц ежедневно. Сколько страниц ей осталось прочитать?

Выполнение:

Обозначим количество оставшихся страниц буквой x.

За три дня Даша прочитала $9 \cdot 3$ страниц. Всего в книге 48 страниц. Составим уравнение: $x + 9 \cdot 3 = 48$.

Упростим уравнение: $9 \cdot 3 = 27$, значит, $x + 27 = 48$.

Неизвестно слагаемое. Найдем его: $x = 48 - 27$; $x = 21$.

Буквой x мы обозначили количество оставшихся страниц, значит, осталось прочитать 21 страницу.

Решение задач с помощью уравнений является перспективным с точки зрения преемственности курсом математики средней школы.

Глава 7

Доли и дроби в курсе математики начальных классов

Лекция 18.

Система изучения дробей в начальной школе

1. Понятие дроби.
2. Дроби (доли) в 3 классе.
3. Дроби в 4 классе.
4. Дроби величин.

1. Понятие дроби

Темы «Доли» и «Дроби» традиционно присутствовали во всех учебниках по математике для начальных классов. В прежних вариантах учебников тема «Доли» рассматривалась во 2 классе системы 1—3 и в 3 классе системы 1—4. Дети знакомились с понятием доли (дроби вида $^1/_k$) и дроби (правильной дроби, в которой числитель меньше знаменателя), учились сравнивать дроби с опорой на предметную модель и решать два вида задач с дробями: нахождение дроби от числа и нахождение числа по его дроби.

На сегодня в соответствии с Обязательным минимумом требований к уровню подготовки выпускников начальной школы объем изучения данной темы значительно сократился в учебниках традиционной содержательной ориентации (учебники М.И. Моро и др., учебники Н.Б. Истоминой). В то же время эта тема значительно расширена в альтернативных учебниках системы Л.В. Занкова, системы В.В. Давыдова и «Школы 2100». В этих методических школах расширение объема знакомства с дробями обусловлено стремлением авторов сформировать у ребенка более общее представление о числе. Поскольку сформировать хоть в какой-то мере обобщенное представление об объекте возможно только в процессе произведения умственных операций над данным объектом (сравнение его с объектами другого рода, выделение сходства и различия, проведение аналогий и др.), необходимо иметь для организации данной умственной деятельности хотя бы два вида объектов. Знакомство младших школьников

только с натуральными числами не позволяет проводить такую работу. Дроби не являются натуральными числами (поскольку не являются целыми) — это числа рациональные. Не вводя в словарь ребенка эти термины, можно тем не менее организовать работу по сопоставлению этих двух видов чисел и знакомству с некоторыми сходными операциями с этими числами (соотнесение с предметной моделью, запись, сравнение, сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями и т. п.).

В последней редакции традиционного учебника математики понятие «Доля целого» рассматривается в 4 классе (часть 1) и некоторые сведения о дробях даются на последних страницах учебника для 4 класса (часть 2). Задания на нахождение дроби величин и величины по ее дроби встречаются в тексте учебных пособий несколько раз. Мы полагаем, что данная редакция учебника не является последней, поэтому в настоящем учебном пособии даем материал по данной теме в соответствии с традиционным объемом ее изучения в начальных классах и даже чуть шире — для того, чтобы подготовить студентов для работы по альтернативным программам.

Понятие дроби связано с расширением множества целых чисел до множества рациональных чисел. Теоретически считается, что знакомство младших школьников с долями и дробями имеет целью расширение их представлений о числе, однако, практически этого не происходит, поскольку понятие дроби в том виде, в каком оно всегда рассматривалось в начальной школе, с множеством чисел фактически не связывается.

Дробь в классической методической трактовке курса математики для начальных классов — это скорее способ получения части объекта, при этом искомая часть необходимо удовлетворяет ряду специальных требований.

В математике рассматривается два подхода к определению понятия дроби — аксиоматический (через словесное определение и описание свойств) и практический — на основе измерения длин отрезков.

По определению *дробь* — это число вида $\frac{m}{n}$, где m и n — целые числа, причем n не равно 0.

Далее определяется ряд операций для чисел этого вида (что понимать под сложением и вычитанием дробей, что понимать под умножением и делением дробей, какую дробь считать большей, а какую — меньшей) и ряд свойств, которыми обладают дроби (например, основное свойство дроби: числитель и знаменатель можно умножить или разделить на одно и то же число, при этом значение дроби не изменится).

Такой подход отражен в учебниках для 5—6 классов, что позволяет говорить о возможности формирования понятия дроби как числа.

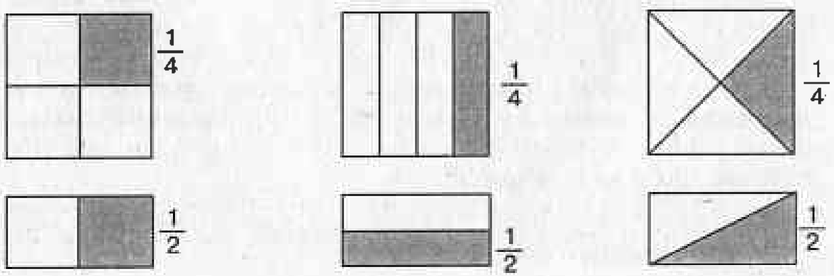
В учебниках математики для начальных классов отражен другой подход к определению понятия рационального числа (дроби) — через измерение длины отрезка. Для описания результата этого процесса используют дробь.

Суть процесса состоит в следующем: если удается разделить некоторый объект A (например, отрезок) на b равных частей (т. е. взятую мерку b уложить по длине отрезка без остатка) и взять c таких частей, то результат этой операции можно выразить так: получена $\frac{c}{b}$ часть объекта А. При этом $\frac{c}{b}$ не рассматривается как самостоятельное число, а только как «$\frac{c}{b}$-ая часть объекта А».

Например, для ученика начальных классов фактически не имеет смысла символ $^1/_4$ сам по себе, так как непонятно, что именно разделено на 4 равные части. В то же время словосочетание «$^1/_4$ часть яблока» имеет смысл: из него ребенку ясно, что яблоко было разделено на 4 равные части и взята 1 часть.

Таким образом, программой начальных классов не предусмотрено формирование понятия дроби как числа. Сведения о дробях ребенок получает только через практические действия над реальными объектами, величинами, множествами и описание этих действий на языке специальных символов (дробей). Все эти действия считаются подготовкой к знакомству с дробями в 5—6 классе. Данный подход к формированию представлений о долях и дробях реализован во всех альтернативных учебниках математики для начальных классов.

Методическая проблема знакомства ребенка с дробями состоит в выборе учителем целесообразного множества исходных объектов и практических операций, которые ученик будет выполнять над ними. Понятие дроби будет отождествляться с результатом этой операции. Термин «целесообразное множество» подразумевает, что множество выбранных объектов должно делиться нацело, иначе нельзя воплотить требование «равные части», при этом в случае геометрической фигуры можно иметь в виду и равновеликие части, например:



Сформированность представлений о дробях отражается в умении выполнять следующие операции:

1) записывать дробь, ориентируясь на объект или рисунок;
2) сравнивать дроби с опорой на объект или рисунок;
3) находить «дробь от числа» (делением объекта или множества на равные части);
4) восстанавливать число по известной его дроби (обратная операция).

Все эти умения формируются на основе принципа наглядности и неотрывности от предметного содержания.

2. Дроби (доли) в 3 классе

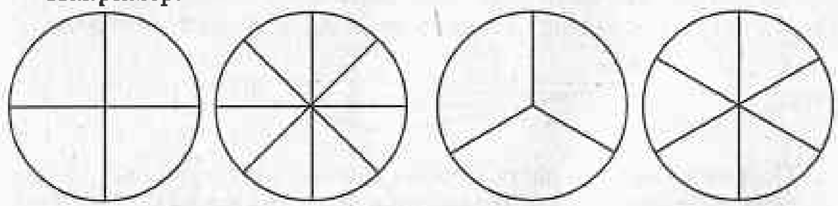
Словом «доля» в 3 классе называют дробь вида $\frac{1}{k}$. Долю получают делением объекта на несколько *равных* частей.

Запись вида $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ подразумевает, что объект разделили на две или четыре равных части и взяли одну из них. Запись такого вида в последней редакции учебника математики для 3 класса (2001) не рассматривается.

Детям сообщается словесное название полученной части: *одна двенадцатая доля, одна шестая доля...*

Используя рисунок круга, разделенного на несколько равных частей дети сравнивают доли, обозначая результат сравнения словом (а не знаком).

Например:



Назови, какие доли круга получились на каждом чертеже.
Сравни, какая доля больше:
одна восьмая или одна четвертая;
одна третья или одна шестая.

Далее в учебнике сразу предлагаются задания на нахождение доли величины и величины по ее доле, сформулированные в виде задач.

Приведем пример задания *на нахождение доли величины:*

Длина ленты 9 дм. Отрезали одну треть этой ленты. Сколько дециметров ленты отрезали?

Выполнение:

Данное задание является типовой задачей на нахождение доли величины. Смысл задания соответствует процессу нахождения доли объекта. Для иллюстрации этого смысла дети чертят в тетради отрезок длиной 9 дм (модель заданного в задаче объекта). Повторяют способ действия для получения одной третьей части (доли) объекта: разделим отрезок на три равные части. Запись 9 дм : 3 = 3 дм. Затем выполняют операцию разделения на отрезке и измеряют полученную третью часть (проверка).

Приведем пример задания (задачи) *на нахождение числа по его доле*:

Длина одной третьей части отрезка равна 4 см. Узнай длину всего отрезка.

Выполнение:

Данная задача является обратной по отношению к приведенной выше.

Для построения модели ситуации данной задачи следует рассуждать так. Нарисуем произвольный отрезок. Его длину мы не знаем. Обозначим ее знаком вопроса:

В задаче дана длина одной третьей части отрезка — разделим его на три равные части (приблизительно, поскольку это лишь рабочий рисунок к задаче) и подпишем над одной частью ее длину:

Поскольку все три части отрезка равные, значит, каждая из них должна иметь длину 4 см. Тогда длина всего отрезка 4 см · 3 = 12 см.

Далее в учебнике 3 класса (часть 2) встречаются задания этого же вида, в которых нужно найти доли (части) различных величин.

Например:

Квадратный лист бумаги со стороной 2 дм разрезали на пять равных частей прямоугольной формы. Найди площадь одной части.

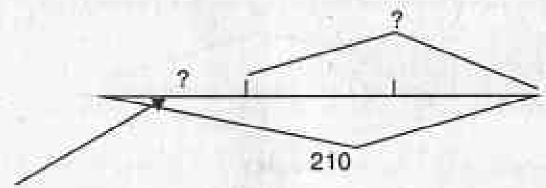
Решение:

Задачу решают практическим способом, поскольку способы вычисления площади по формуле дети узнают в 4 классе.

В начальных классах школы учится 210 человек. Одну третью часть всех учеников составляют третьеклассники. Сколько детей учится в первых и вторых классах этой школы?

Решение:

Задачу решают, сопровождая ее наглядным изображением ситуации. Рассуждают так. Чтобы найти одну третью часть от всего количества детей, разделим его на 3:



210 : 3 = 70 (чел.) — это третьеклассники

На всех остальных детей приходится две части, значит 70 · 2 = = 140 (чел.).

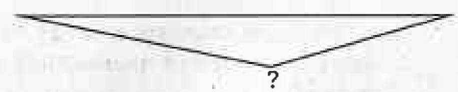
Или по другому: все остальные дети учатся в 1 и 2 классе, значит, 210 – 70 = 140 (чел).

За полгода в районную библиотеку поступило 200 книг для детей. Это составляет четвертую часть всех поступивших книг. Сколько всего книг поступило в библиотеку за эти полгода?

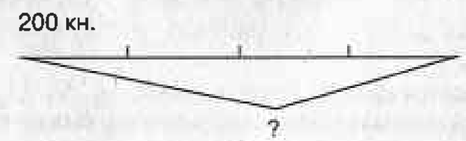
Решение:

Задачу решают, сопровождая ее наглядным изображением ситуации. Рассуждают так:

Обозначим произвольным отрезком все поступившие книги — мы не знаем сколько их:



Известна четвертая часть всех книг — разделим отрезок на 4 равные части (приблизительно) и обозначим известную часть.



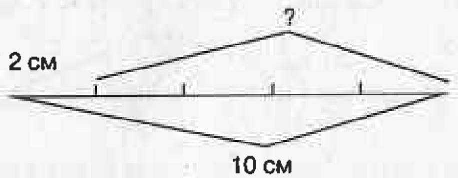
Поскольку все четыре части равны, значит, на каждую из них должно приходиться по 200 книг, значит, 200 · 4 = 800 (кн.) — поступило в библиотеку.

3. Дроби в 4 классе

В 4 классе ставится задача *нахождения нескольких долей целого.* Например:

Длина отрезка 10 см. Он разделен на 5 равных частей. Сколько сантиметров в четырех пятых долях этого отрезка?

Рассмотри чертеж и решение:



1) Найдем, сколько сантиметров в одной пятой доле отрезка: 10 см : 5 = 2 см.

2) Найдем, сколько сантиметров в четырех пятых долях отрезка:

2 см · 4 = 8 см.

Ответ: 8 см.

Работа над данным понятием идет исключительно в словесных обозначениях: детям сообщается термин и дается его практическая иллюстрация. Символьное обозначение дроби на данном этапе не рассматривается.

Далее предлагаются различные задания (в виде задач на нахождение нескольких долей числа) аналогичного характера.

Например:

Начерти отрезок длиной 60 мм. Раздели его на 6 равных частей. Сколько миллиметров в пяти шестых долях этого отрезка?

В данном случае речь идет только о пяти долях из шести имеющихся, но не о дроби $^5/_6$.

Знакомство с символикой и операция сравнения дробей рассматривается на последних страницах учебника математики для 4 класса (часть 2).

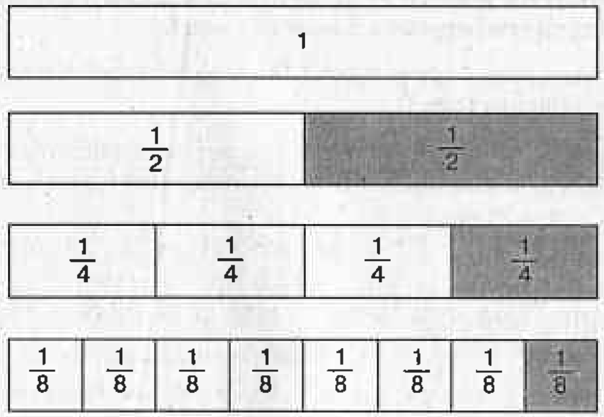
Рассматривается способ записи дроби: $^1/_8$; $^5/_6$; $^3/_5$.

Правильный способ чтения этой записи и смысл каждого ее элемента: число, записанное под чертой, показывает, на сколько равных частей разделено целое число; число, записанное над чертой, показывает, сколько взято таких частей.

Слова «числитель» и «знаменатель» детям не сообщаются.

Сравнение дробей проводится с опорой на рисунок. Следует обращать внимание на то, что необходимо сравнивать **соизмеримые** части одного объекта, поскольку для ученика начальной школы дроби — это только части объекта или множества.

Например:



Что больше: $\frac{1}{8}$ или $\frac{1}{4}$? $\frac{1}{2}$ или $\frac{3}{4}$? $\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{8}$? $\frac{3}{8}$ или $\frac{5}{8}$?

Отвечая на вопросы, ученики сравнивают соответствующие части равных полосок (для наглядности их можно закрасить разными цветами).

Рассуждения:

Сравниваю одну восьмую долю полоски и одну четвертую долю такой же полоски. Одна четвертая доля больше, чем одна восьмая доля *одной и той же полоски.*

4. Дроби величин

Задания, требующие нахождения дробей (долей) величин и величин по заданным долям используются для выработки умения находить доли от числа и число по доле не только с опорой на наглядную модель, но и с использованием смысла понятия доля.

Доля — это одна из нескольких равных частей величины.

Например:

6 листов составляют половину тетради. Сколько всего листов в тетради?

Задача может быть решена с опорой на *рассуждение*: половин в тетради может быть только две. Если в каждой по 6 листов, то вся тетрадь содержит 6 · 2 = 12 (листов).

Маленькая перемена длится 5 минут, что составляет четвертую часть большой перемены. Сколько минут длится большая перемена?

Рассуждение:

Четвертых частей может быть только 4. Если в каждой из них по 5 минут, то вся перемена $5 \cdot 4 = 20$ (мин).

Чему равна треть суток? Половина суток? Четверть часа? Три четверти года?

Для ответов на все вопросы используют смысл понятия доля (несколько долей) величины и знание соотношения единиц времени.

Сутки — это 24 часа.

Треть суток $24 : 3 = 8$ (ч). Половина суток $24 : 2 = 12$ (ч).

Час — это 60 мин. Четверть часа $60 : 4 = 15$ (мин).

Год — это 12 месяцев. Четверть года $12 : 4 = 3$ (мес.).

Три четверти года $3 \cdot 3 = 9$ (мес.).

Начерти отрезок, длина которого 48 мм. Чему равна длина третьей части отрезка?

Рассуждение:

Третьих частей в отрезке может быть только три.

48 мм : 3 = 16 мм — длина одной третьей части.

Начерти отрезок, пятая часть которого равна 17 мм.

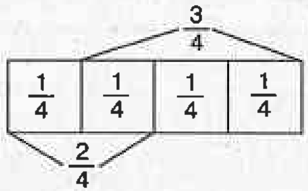
Рассуждение:

Пятых частей в отрезке может быть только 5. Если каждая из них равна 17 мм, то весь отрезок 17 мм · 5 = 85 мм.

В данном контексте следует рассматривать и действия с дробями, изучаемые в начальных классах по некоторым альтернативным программам (учебник И.И. Аргинской, учебник Л.Г. Петерсон). Задания «на действия с дробями» построены на том же принципе понимания ребенком дроби как доли (или нескольких долей) предмета или множества, они не предполагают произведения действий с дробями как таковыми по принципам, определенным аксиоматикой рациональных чисел (т. е. не имеются в виду специфические преобразования знаменателей и числителей и т. п., по специальным правилам, как это делается в 5—6 классах средней школы).

Результаты действий с дробями ребенок формирует как результаты операций над объектами, данными в предметной модели или рисунке.

Например:



$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

Рассуждения:

Одна четвертая доля полоски и еще одна такая же доля полоски — вместе две четвертых доли полоски.

Одна четвертая доля полоски и еще две таких же доли, вместе получается три четвертых доли полоски.

Следует отметить, что с точки зрения введенного определения дроби, как части объекта, числа, множества, является некорректной работа с неправильными дробями.

Неправильная дробь — это дробь, у которой числитель больше, чем знаменатель, например: $\frac{5}{4}$; $\frac{7}{3}$; $\frac{11}{9}$ и т. п.

В ряде альтернативных учебников (И.И. Аргинская, Л.Г. Петерсон) практикуются задания, в которых дети должны действовать с неправильными дробями: сравнивать их, расставлять по возрастанию или убыванию и т. п.

Для того чтобы подобные задания были корректными, следует использовать другое определение дроби (как рационального числа, заданного соответственным определением; см. выше), как это сделано в учебниках средней школы.

С точки зрения используемого в начальной школе определения выражение вида $\frac{7}{4}$ не имеет смысла, поскольку оно должно пониматься так: некий предмет (яблоко, полоску) разделили на 4 равные части, а затем взяли 7 таких частей. Речь идет об одном предмете, поэтому взять 7 частей неоткуда!

Даже если речь идет о множестве: «в классе 36 детей», то одна четвертая доля этого количества равна 9 детям, а $\frac{7}{4}$ долей должны соответствовать количеству 64 человека — при том, что изначально их было 32!

Таким образом, при желании знакомить учеников начальной школы с неправильными дробями следует по-другому построить методику их знакомства с понятием «Дроби» (сделать это на основе аксиоматического определения) и не использовать понятие «Доли» вообще.

Глава 8

Решение задач в начальной школе

Лекция 19.

Обучение младших школьников решению задач

1. Сюжетная задача как цель и средство обучения.
2. Подготовительная работа к обучению детей решению задач.
3. Знакомство с простой задачей.
4. Семантический анализ текста задачи.

1. Сюжетная задача как цель и средство обучения

Обучение решению задач в начальных классах является традицией русской методической школы. Первый русский учебник по математике для детей младшего возраста Л.Ф. Магницкого «Арифметика» (1703) содержал практически все виды задач, включаемые сегодня в учебники математики начальных классов. В то же время решение задач является наиболее проблемной частью изучения математики для большинства детей.

Под *задачей* в начальном курсе математики подразумевается специальный текст, в котором обрисована некая житейская ситуация, охарактеризованная численными компонентами. Ситуация обязательно содержит определенную зависимость между этими численными компонентами. Таким образом, текст задачи можно рассматривать как словесную модель реальной действительности.

Непосредственно ситуация обычно задается в той части задачи, которая называется *условием*.

Завершается ситуация *требованием* найти неизвестный компонент. Требование может быть выражено в форме *вопроса*. Одни численные компоненты в задаче заданы — они называются *данные*, другие необходимо найти — их называют *искомые*.

В условии задачи указываются связи между данными числами, а также между данными и искомым — эти связи определяют выбор арифметических действий, необходимых для решения задачи.

«*Решить задачу* — значит раскрыть связи между данными и искомым, заданные условием задачи, на основе чего выбрать, а затем выполнить арифметические действия и дать ответ на вопрос задачи»[1].

Согласно этому определению, для полноценной работы над задачей ребенок должен:

1) уметь хорошо читать и понимать смысл прочитанного;

2) уметь анализировать текст задачи, выявляя его структуру и взаимоотношения между данными и искомым;

3) уметь правильно выбирать и выполнять арифметические действия (и следовательно, быть хорошо знакомым с ними);

4) уметь записывать решение задачи с помощью соответствующей математической символики.

Технологически при решении задачи ребенок как минимум дважды выполняет «перекодировку» словесно заданной ситуации задачи — сначала переводя ее в краткую запись, рисунок или схему, для выявления связей между данными и искомым, а затем еще раз переводя выявленную зависимость на язык математических знаков и символов (запись решения).

Фактически под решением задачи можно понимать процесс «перекодировки» учеником словесно заданного сюжета, имеющего численные компоненты и характерную структуру, на язык арифметической записи (запись решения).

Для эффективного выполнения такой «перекодировки» ребенок должен свободно владеть анализом предложенной словесной структуры. Как уже было отмечено, под характерной структурой подразумевается опознаваемое в тексте условие и требование.

Условие — та часть текста, в которой задана сюжетная ситуация, численные компоненты этой ситуации и связи между ними. В стандартной формулировке условие выражается одним или несколькими повествовательными предложениями, содержащими численные компоненты.

Требование — та часть текста, в которой указана (названа, обозначена) искомая величина (число, множество). В стандартной формулировке учебников начальных классов требование обычно выражено *вопросом*, начинающимся словом «Сколько...?» и заканчивающимся знаком вопроса. Именно на эти внешние частные признаки условия и требования привыкают ориентироваться дети, если стандартные формулировки используются учителем (учебным пособием) постоянно и в большинстве случаев. При таком подходе у ребенка формируется негибкий (конвергентный) стереотип восприятия этих признаков задачи, и любое незначительное видоизменение структуры текста может представлять для ребенка значительные трудности.

[1] *Бантова М.А., Бельтюкова Г.В.* Указ. изд. С. 174.

Например, следующие тексты будут создавать проблему при работе над задачей, если ребенок привык к стандартным формулировкам:

Сколько литров молока надо отлить из 20-ти литрового бидона, чтобы в нем осталось 8 литров?

Задача начинается с вопроса, который соединен с условием в сложное предложение через запятую.

Найти скорость катера, который за 3 часа удалился от пристани по течению на 120 км. Скорость течения реки 5 км/ч.

В формулировке требования отсутствует слово «сколько» и знак вопроса. Вопрос «замаскирован» в условии, которое разбито на два повествовательных предложения.

Такие тексты в методике обучения математике младших школьников принято называть *трансформированными*. Можно придумать и другие варианты таких трансформированных текстов, но при этом следует отметить, что тексты последнего варианта являются характерными для формулировки задач в среднем и старшем звене. Иными словами, именно эти структуры — перспективная линия, к которой следует готовить детей, имея в виду преемственность обучения математике, а вовсе не какие-то «изыски» для особо способных детей. К сожалению, большинство учителей начальных классов воспринимает подобные структуры как «задачи повышенной сложности», возможность включения которых в работу определяется наличием свободного времени, или адресуются только способным детям.

Данные — это, как правило, численные (числовые) компоненты текста задачи. Они характеризуют *количественные отношения* предлагаемой в задаче ситуации: значения величин, численные характеристики множеств, численные характеристики отношений между ними.

Например, задача о катере (выше) содержит численные характеристики величин (скорость и время). Задача: «В магазине продали два куска ситца. За первый кусок выручили 180 рублей, а за второй в 2 раза больше. Сколько денег выручили за второй кусок?» — содержит численную характеристику величины (длина) и численную характеристику отношения величин (в 2 раза больше). Задача: «Школьники посадили 15 саженцев яблони и 10 саженцев сливы. Сколько всего саженцев посадили школьники?» — содержит численные характеристики множеств.

Работа с данными заключается в обучении их распознаванию. Если задача сформулирована стандартным образом, то данные в ней обозначены числами и их легко выделить из текста. Численные значения величин и численные характеристики множеств

обычно обозначены числами. Численные характеристики отношений между ними могут быть обозначены не числом, а словом, например: «в два раза больше», «столько же, сколько в первом» и т. п. В этом случае дети могут «терять» данные и вообще не воспринимать эти численные характеристики как данные. Провоцируется такая ситуация тем, что все тексты в начальной школе содержат данные, выраженные численно, а тексты задач первого года обучения содержат только численные данные. В этом случае ребенок (особенно плохо читающий) «выхватывает» числа из контекста, и выполняет с ними действия, практически независимо от ситуации, заданной в условии (чаще всего, ориентируясь на «ключевое» слово: улетели, дали, вместе, принесли и т. п.). Для 1 класса такой «способ» решения задачи, к сожалению, является типичным, чему способствует и методика, ориентированная на выбор «главного» слова. Между тем, слово не всегда определяет выбор действия, а вырванное из контекста, оно теряет свою однозначность и становится многозначным. Например, слово «улетели» вне контекста подталкивает ребенка к выполнению вычитания, но в тексте: «Сначала улетели 7 птиц, затем еще 2 птицы. Сколько птиц улетело?» — оно не определяет выбор действия. Выбор действия определяет ситуация условия. В задаче этого вида типичной ошибкой является действие 7 – 2 = 5 (пт.).

Порождается эта ошибка ориентиром на слово «улетели», а также тем, что первое заданное в условии число больше второго.

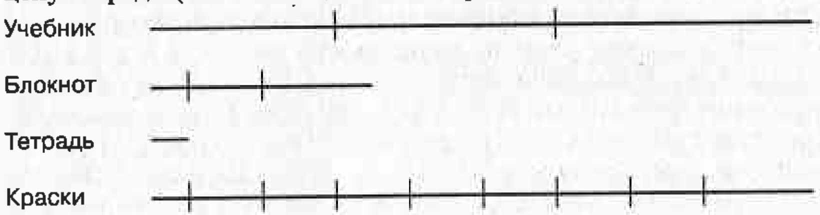
Распознаванию словесно заданных характеристик отношений в тексте задачи нужно учить сначала на специально подобранных текстах, где все данные выражены словами.

Искомое — нахождение искомого в численном выражении обычно является конечной целью процесса решения арифметической задачи.

В дальнейшем дети будут сталкиваться с другими видами задач, в частности, с задачами геометрического характера: на доказательство, на построение, где искомым является либо сам процесс решения (задачи на доказательство), либо результат этого процесса, выраженный не в численных характеристиках (фигура в задаче на построение; буквенное выражение в алгебраической задаче). В начальных классах такие задачи крайне редки, хотя в последней редакции традиционного учебника появились в небольшом количестве и задачи на построение, и задачи, требующие составления буквенного выражения, без нахождения его числового значения. Задачи последнего вида часто встречаются в учебнике Л.Г. Петерсон. Приведем пример задачи, где процесс ее решения приводит к численному результату, который не является целью решения задачи, а лишь косвенно используется для характеристики неизвестного (учебник Н.Б. Истоминой).

Если цену учебника уменьшить в 3 раза, то получим цену блокнота. Блокнот в 3 раза дороже тетради. Краски в 9 раз дороже тетради. Хватит ли денег, которые мама дала для покупки учебника, на покупку красок?

Ответ к данной задаче предполагается в виде: «Денег на покупку красок хватит». Для ответа на вопрос данной задачи следует установить соотношение между ценами и фактически выразить цену красок в количестве «единичных цен», за которые нужно принять цену тетради (как самого дешевого предмета):



Вывод: цена красок — это 9 цен тетради, цена учебника — тоже 9 цен тетради. Значит денег хватит (искомое).

Вопрос о роли задач в начальном курсе математики теоретически является дискуссионным, поскольку с одной стороны обучение решению задач рассматривается как *цель* обучения (ребенок должен уметь решать задачи!), а с другой стороны — процесс обучения решению задач рассматривается как способ математического в частности, и интеллектуального в целом, развития ребенка.

Сторонники первого подхода придерживаются четкой иерархии в построении системы обучения решению задач: в нарастании сложности задач (сначала простые задачи, затем составные в 2 действия, далее — составные большего количества действий), а также в четком разграничении типов задач с целью прочного усвоения детьми способов решения этих типов.

Другой подход требует при подборе задач ориентироваться на определенные интеллектуальные (мыслительные) действия, которые могут формироваться при работе над той или иной задачей. Этот подход требует учить детей выполнять семантический и структурный анализ текста задачи вне зависимости от ее типа и количества действий, выявлять взаимосвязи между условием и требованием, данными и искомым и описывать их каким-то образом — либо через промежуточную модель (рисунок, краткую запись, схему), либо сразу в математических символах (символическая модель) в виде записи решения. В этом случае обучение решению задач будет являться средством интеллектуального развития ребенка. При этом предполагается, что результатом этого интеллектуального развития будет являться умение решать задачи

любого типа и уровня сложности. В связи с этим, все альтернативные учебники математики, построенные на основе этого подхода, содержат на последних годах обучения в начальной школе большое количество задач высокого уровня сложности.

Таким образом, суть современного развивающего методического подхода к обучению ребенка решению задач состоит в том, что методика желает сформировать у учащегося самостоятельную учебную деятельность в том числе и в плане решения задач. Иными словами, речь идет не о том, чтобы научить ребенка узнавать и решать ограниченный круг типовых задач, а научить ребенка решать любые задачи и притом самостоятельно. Исходя из жизненных реалий, понятно, что невозможно научить этому всех детей с одинаковым уровнем успешности в одинаковые сроки, но попытаться сформировать у ребенка умения самостоятельной работы над задачей как учебной проблемой — вот одна из основных методических линий современной методики обучения математике в начальных классах.

2. Подготовительная работа к обучению детей решению задач

В связи с тем, что необходимое для самостоятельной работы над текстом задачи умение хорошо читать формируется у многих детей не в полной мере даже к концу первого класса, педагогам, при обучении таких детей приходится целиком и полностью работать с ними «на слух».

В этой ситуации важнейшее значение приобретает умение ребенка не только внимательно слушать предлагаемый текст, но и правильно представлять себе ситуацию, заданную условием. Именно ориентируясь на свое представление о заданной ситуации, ребенок будет выбирать арифметическое действие, требующееся для решения задачи.

В этой связи прежде, чем приступать к знакомству с задачей и обучению решению задач, необходимо сформировать у ребенка целый комплекс умений: умение слушать и понимать тексты различных структур, умение правильно представлять себе и моделировать ситуации, предлагаемые педагогом, умение правильно выбирать действие в соответствии с ситуацией, а также умение составлять математическое выражение в соответствии с выбранным действием, и умение выполнять простые вычисления (как минимум, отсчитыванием и присчитыванием). Эти умения являются базовыми для подготовки ребенка к обучению решению задач.

Важнейшим умением, необходимым ребенку для правильного решения простых задач, является умение правильно выбирать арифметическое действие в предложенной ситуации.

Знакомство учащихся с арифметическими действиями сложения и вычитания целесообразно распределить на два этапа:

1) подготовка к правильному пониманию различных сюжетных ситуаций, соответствующих смыслу действий — организовывается через систему заданий, требующих от ребенка адекватных предметных действий с различными совокупностями;

2) знакомство со знаком действия и обучение составлению соответствующего математического выражения.

Анализ различных учебных пособий по математике для начальных классов, называемых учебниками нового поколения (учебники различных развивающих систем), показывает, что второй из обозначенных этапов реализуется их авторами не ранее 3—4 месяца пребывания ребенка в школе. Это обусловлено необходимостью сформировать у ребенка целый ряд предметных знаний и учебных умений, составляющих базу для подготовки к правильному пониманию смысла и способов выполнения арифметических действий.

Эту методическую работу можно считать подготовительной к обучению решению простых задач, поскольку для правильного решения простой задачи ребенок должен научиться выбирать действие в соответствии с ситуацией, заданной текстом задачи.

Поскольку в первом классе начальной школы большинство детей не владеет свободным чтением, а потому не может самостоятельно в полной мере работать с текстом задачи, очень большое значение имеет умение понимать ситуацию задачи на слух, правильно моделировать ее, выбирать и объяснять выбор действия.

В текстах стандартной формы условие выражено повествовательным предложением и предшествует вопросу, который выражен вопросительным предложением. В школе это иногда порождает такой «методический» прием, как чтение текста «до точки» (это условие), а далее в вопросительном предложении содержится вопрос. Такую методику порождает стремление авторов учебников ограничиться только стандартными текстовыми структурами и типовыми задачами. Подобный подход ведет к тому, что дети научаются работать с типовыми задачами и довольно успешно справляются с ними, узнавая типы и вспоминая заученные способы решения, но при столкновении с нетиповыми текстами эти дети теряются и не могут с ними работать.

К нетиповым текстам относятся тексты, в которых *требование* выражено повествовательным предложением или текст задачи трансформирован таким образом, что она сформулирована одним предложением или условие разделено на две части и т. п.

Например:

> В гараже стояло 2 легковых и 5 грузовых машин. Найти количество машин в гараже.

> Сколько карандашей было у Маши, если 3 карандаша она отдала брату, а 4 оставила себе?

> На полке стояло 6 книг. Сколько книг осталось на полке после того как 2 книги Петя отнес в библиотеку? и т. п.

Нетиповые тексты могут быть построены и на других принципах — это могут быть тексты с нехваткой или излишком данных, например:

> На дереве сидели птицы. 5 из них — это воробьи, остальные — голуби. Сколько было голубей?

> В вазе лежало 8 апельсинов. Ваня съел 2 апельсина и Катя съела 3 апельсина. Сколько апельсинов они съели?

Работа с такими текстами является наиболее полезной с точки зрения обучения решению задач, поскольку именно такие тексты учат ребенка внимательно читать и анализировать задачу, целенаправленно устанавливать связи между данными и искомым для осознанного выбора действия. Безусловно, при отсутствии умения читать, такую работу ребенок осуществить не может. Если же предлагать такую работу ребенку, плохо читающему, то на практике мы обычно наблюдаем в этом случае подмену работы над текстом задачи манипулированием числовыми данными. Это происходит потому, что числовые данные, обозначенные цифрами, в первую очередь бросаются в глаза при небольшом тексте. Поскольку в тексте стандартной задачи в 1 классе обычно бывает два числовых данных, с которыми нужно выполнить арифметическое действие (сложение или вычитание), ребенок, плохо читающий, просто наугад выполняет с выделенными числовыми данными знакомое арифметическое действие. Если же учитель не подтверждает правильность выбора действия, то достаточно выполнить другое из двух известных действий. В результате подобной практики формируется достаточно распространенный стереотип действий ребенка с задачей, когда он выполняет действия с числами, заданными текстом задачи, даже не задумываясь над смыслом этих действий и результатом (и тогда полтора землекопа в ответе его совершенно не удивляют).

Противоположный способ работы над задачей можно наблюдать в практике работы с шестилетками при раннем знакомстве с задачей, когда педагог, зная что дети не могут работать с текстом самостоятельно, старается облегчить им восприятие этого текста, моделируя все его числовые компоненты на наглядности. (Хотя именно числовые компоненты воспринимаются ребенком быстрее и легче всего.) При этом на столе или фланелеграфе выставляется все нужное количество предметов и перед глазами детей выполняются все обозначенные условием действия.

Например:

Педагог предлагает детям текст:

> На ветке сидели 6 мартышек. Одна — свалилась. Сколько мартышек осталось на ветке?

Иллюстрируя этот текст, педагог выставляет на фланелеграф изображения шести мартышек (и все это заранее приготовлено, причем вручную!), затем снимает одну мартышку. Остальные пять остаются перед глазами детей.

При такой организации наглядности не только процесс (решение задачи) теряет смысл, но и способ получения результата (ответ) совершенно противоположен тому, который предполагается при действительном решении задачи. Ответ при решении задачи должен быть получен как результат выполнения арифметического действия.

При описанном выше способе работы с наглядностью ребенок не только не озабочен выбором действия, но и не должен его выполнять, поскольку ответ он может получить пересчетом. При этом, как правило, помня о том, что следует обсудить выбор действия при решении задачи, педагог обычно настаивает на том, чтобы дети назвали действие, которое они выполняли. И дети называют нужное действие. Можно ли быть уверенным, что этот ответ обусловлен действительно произведенным выбором действия? Скорее всего, дети просто помнят, что в аналогичной ситуации следует говорить «отняли». Таким образом, происходит формирование ориентира на действие педагога (снял мартышку и убрал, значит, надо отнять) или на слово («главное слово»). При такой ориентации ребенка приучают ассоциировать слова «отдали», «унесли», «съели», «осталось» и т. п. с действием вычитания, а слова «дали», «купили», «стало», «вместе» и т. п. — с действием сложения.

При работе со стандартными формулировками и простыми текстами такой прием некоторое время выручает и ребенка, и педагога. Однако первый же нестандартный текст покажет порочность такого метода работы при обучении решению задач.

Например:

> Из бочки вылили сначала 5 ведер воды, а потом еще 2 ведра. Сколько ведер воды вылили?

(Типичной ошибкой является действие 5 – 2.)

> У Вани и Пети вместе было 7 шариков. Сколько шариков было у Вани, если у Пети было 3 шарика?

(Типичная ошибка 7 + 3 или 3 + 4.)

Подведем итог всего сказанного выше в виде формулировки основных условий корректной методической подготовки ребенка к обучению решению задач:

Первым необходимым условием является обучение ребенка *моделированию различных ситуаций* (объединение совокупностей, удаление части, увеличение на несколько штук, сравнение и т. п.) на различной предметной наглядности символического характера (используются простейшие заменители — фигурки, палочки и т. д.) так, как это описано выше.

Вторым необходимым условием является обучение ребенка *выбору соответствующих арифметических действий* и составлению математических выражений в соответствии с ситуацией, заданной текстом.

Третье необходимое условие — следует убедиться, что ребенок достаточно уверенно пользуется приемом присчитывания и отсчитывания, поскольку для получения результата арифметического действия следует это действие *выполнять*, а не получать ответ пересчетом. Пересчет — это лишь способ проверки правильности полученного результата.

Для того чтобы подвести ребенка к пониманию того, что для решения задачи необходимо научиться получать ответ не пересчетом, а другими, чисто математическими приемами (на первом этапе — присчитыванием и отсчитыванием, а затем — путем выполнения приемов арифметических действий), следует соответствующим образом организовывать наглядность. Для исключения пересчета рекомендуется использовать прием работы со «скрытой» наглядностью, т. е. сначала наглядность предъявляется, сосчитывается, обозначается цифрами, а затем прячется (в коробку, конверт, корзину, за ширму и т. п.). После этого в соответствии с сюжетом задания приступают к выбору действия, поясняя его.

Например разбор задачи про мартышек может выглядеть так:

У ч и т е л ь: На ветке сидели 6 мартышек.

Педагог выставляет мартышек и предлагает обозначить их количество цифрой. Затем изображение задергивается занавеской и сообщается продолжение сюжета:

— Одна свалилась.

Эту одну мартышку можно достать из-за занавески и поставить на незакрытую часть фланелеграфа.

— Обозначьте эту мартышку цифрой.

(Дети выбирают карточки с нужными цифрами, объясняя смысл каждой.)

Теперь рядом с занавеской две карточки с цифрами: 6 и 1.

— Каким действием можно обозначить то, что мартышка свалилась с ветки? *(Вычитанием.)*

— Почему вы выбираете вычитание? Почему не сложение? *(Мартышка свалилась с ветки, и теперь на ветке их будет меньше, значит, надо отнять.)*

Запись завершается выбором карточки со знаком вычитания. Теперь на фланелеграфе выражение: 6 – 1.

— Как найти значение этого выражения?

(Дети используют любой знакомый способ, объясняя его.)

— Закончите запись. Какой знак нужно поставить, чтобы обозначить, что получилось 5 мартышек? *(Знак равенства.)*

— Фиксируем на фланелеграфе равенство: 6 – 1 = 5.

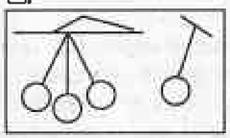
После этого занавеска отдергивается и детям предлагается проверить правильность ответа пересчетом.

Данная методика работы с наглядностью может быть использована в ситуации любой простой задачи, поскольку позволяет организовать и стимулировать как процесс выбора действия для решения задачи, так и провести проверку полученного результата пересчетом, что уже с первых же шагов будет формировать у ребенка правильное представление о том, что в решении задачи главное — это поиск действия, и о том, что решение задачи и ее проверка — это разные учебные действия.

Правильный выбор арифметического действия для решения задачи во многом зависит от умения учащихся переводить различные реальные явления и связи между ними на язык математических символов. В связи с этим полезно использовать на уроках задания, связанные с составлением рассказа по картинке, и записи его с помощью математических символов. Такие картинки есть в учебнике.

Например:

Составь рассказ по картинке, который соответствовал бы записи □ + □ = □.



Можно составить такой рассказ: «На одной ветке 3 вишни, а на другой 1. На двух ветках вместе 4 вишни». В соответствии с этой ситуацией в первое окошко нужно поставить число 3, во второе — число 1, а третье — число 4. Можно составить и другой рассказ: «На одной ветке 1 вишня, а на другой на 2 вишни больше. На второй ветке 3 вишни». Тогда получим запись: 1 + 2 = 3. Второй рассказ, конечно, можно услышать не так часто, но педагог должен быть готов к любому варианту.

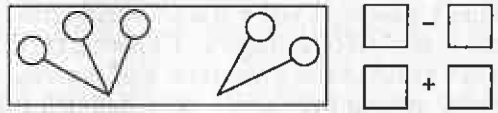
Рассказ не должен на первых порах содержать вопроса, поскольку цель такого задания — учить ребенка составлять математическое

выражение или равенство в соответствии с заданной ситуацией. Ситуация задана рисунком, что облегчает ученику ее восприятие, поскольку ведущий вид мышления в этом возрасте наглядно-образный.

Приведем более сложный вариант такого задания:

Составить рассказы по картинке в соответствии с разными видами записей (сложение и вычитание).

Можно использовать картинку из учебника или нарисовать на доске:



Сложность задания состоит в том, что картинка лишена динамики и ее мысленную «кодировку на ситуацию» ребенок должен выполнить, не двигая элементы картинки. Когда педагог добавляет или убирает элементы картинки, дети легко ориентируются в выборе действия (убираем элементы — вычитание, добавляем элементы — сложение). Составить рассказ с действием вычитания по данному рисунку не всегда может даже неподготовленный взрослый. В качестве помощи к данному заданию можно использовать соответствующие записи: «составь рассказ в соответствии с записью 5 – 2». *(Было 5 вишен. Из них 2 на одной ветке, значит, на другой 5 – 2 = 3.)*

В дальнейшем можно предлагать детям более абстрактный вариант рисунка.

Например:

Составить сюжетные рассказы по модели, вложив в нее свое содержание:

Этап работы над такими заданиями можно считать завершенным, когда дети научатся легко составлять по аналогичным рисункам тексты вида:

1) 7 белых и 2 серых квадрата, вместе 7 + 2 = 9;
2) 9 квадратов, из них 7 белых, а 2 серых (9 – 7 = 2);
3) 9 квадратов, из них 2 серых, а 7 белых (9 – 2 = 7);
4) 7 белых квадратов, 2 — серых, значит, белых на 5 больше (7 – 2 = 5) и т. п.

Такие задания будут одновременно готовить ребенка к пониманию схематических моделей ситуаций задач в дальнейшем.

Все эти задания следует рассматривать как подготовку к знакомству с задачей.

3. Знакомство с простой задачей

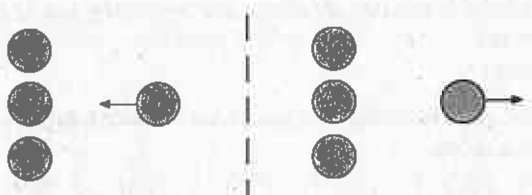
Различные учебники знакомят детей с простой задачей в разное время: традиционный учебник системы 1—4 в прежнем издании вводил задачу в декабре 1 класса, отводя на подготовительный период 3 месяца. В другом издании (2001) задачи с рисованными данными появляются впервые на с. 45, т. е. примерно в ноябре, хотя непосредственно заголовок «Задача» появляется на с. 80, почти через месяц. В учебнике Л.Г. Петерсон задача также появляется в декабре 1 класса, а вот в новых вариантах учебников И.И. Аргинской и Н.Б. Истоминой в 1 классе дети с задачей не знакомятся, это знакомство отложено до 2 класса, тем самым подготовительной работе отводится весь первый год обучения ребенка в школе.

В зависимости от характера и качества подготовительной работы, знакомство с задачей может происходить различными способами. Например, педагог может выбрать объяснительно-иллюстративный метод с опорой на учебник.

Используя рисунок в учебнике («Математика 1». 2001. С. 45) педагог предлагает текст:

На столе стояли 3 банки варенья. Карлсон поставил на стол еще 1 банку. Сколько банок стало на столе?

Схематически события на рисунках выглядят так:



$3 + 1 = 4$ $\qquad$ $4 - 1 = 3$

Учитель: То, что я вам сейчас рассказала — это задача. Задачу можно разделить на две части: условие и вопрос. Послушайте условие *(читает)*. Что нужно сделать, чтобы ответить на вопрос задачи? *(Учащиеся: 3 + 1 = 4.)*

— Это запись решения. Какое число мы получили? *(Учащиеся: «4».)* 4 банки варенья стоят на столе. Это ответ задачи.

Педагог показывает, как записать решение и ответ задачи.

Аналогичная работа проводится со второй картинкой в учебнике ($4 - 1 = 3$).

Рисованные данные в этой задаче позволяют получить ответ пересчетом, поэтому выделять как особую проблему выбор действия

не имеет смысла. В приведенном фрагменте учитель знакомит детей с новым понятием и способом его оформления. В дальнейшем в учебнике регулярно встречаются задания такого вида (задачи с рисованными данными), позволяющие тренировать детей в употреблении соответствующей лексики (задача, условие, вопрос, данные, искомое) и способа оформления (запись решения и ответа). При этом опора на рисованные данные не требует размышления над выбором действия.

Приведем другой вариант знакомства детей с задачей (Н.Б. Истомина, 1986):

Учитель: Послушайте внимательно мое задание: У Коли было 7 марок. *(Учащиеся выкладывают на наборном полотне 7 марок.)* 2 марки Коля подарил товарищу. Покажите марки, которые остались у Коли. *(Ученик подходит к доске, снимает 2 марки и говорит, что это те марки, которые остались у Коли.)* Сколько же марок осталось у Коли? *(Учащиеся пересчитывают оставшиеся марки и отвечают на вопрос.)*

— А теперь выполним другое задание. *(На доске, на фланелеграфе дерево, на котором растут сливы: 12—15 шт.)* Коля сорвал 6 слив. Нина сорвала 2 сливы. *(К доске вызывается мальчик, он срывает сливы и кладет в корзинку.)* Все сорванные сливы мы положили в корзинку, но пересчитать мы их не можем, поэтому нужно подумать, что нужно сделать: прибавить или вычесть, чтобы найти те сливы, которые сорвали Коля и Нина вместе. *(Учащиеся: Нужно прибавить.)*

— Любая задача содержит вопрос и условие. Чтобы ответить на вопрос задачи, нужно выполнить действие сложение или вычитание, а для этого нужно хорошо представить ту ситуацию, которая рассматривается в задаче.

— Послушайте еще одну задачу: У Коли было 7 марок. *(Показывается конверт, на котором написана цифра 7.)* 2 марки он подарил другу. *(Из конверта вынимается 2 марки.)* Покажите марки, которые остались у Коли. *(Учащиеся: Эти марки находятся в конверте, и мы не знаем, сколько их.)*

— А что в задаче известно? Какое действие нужно выполнить, чтобы получить марки, которые остались у Коли? *(Учащиеся: Отнять от семи два.)* Записывается решение и ответ.

В этом фрагменте работа с учебником заменена на работу с фланелеграфом, позволяющую использовать прием «скрытая наглядность». При таком подходе внимание детей фиксируется на том, что для ответа на вопрос задачи следует выбрать соответствующее действие и выполнить его. После получения ответа, наглядность может быть сосчитана, что позволяет проверить правильность полученного ответа.

4. Семантический анализ текста задачи

Под *семантическим анализом* текста задачи понимается процесс прочтения задачи с последующим выделением основных понятий, связанных со специфическим названием частей этого текста: условие, вопрос, известные данные, неизвестные искомые элементы задачи. Предполагается, что в результате осуществления семантического анализа ребенок осознает и представит себе ситуацию, данную в тексте задачи, и сумеет установить связи между данными и искомым. Особое значение такому семантическому анализу текста задачи придается в технологиях обучения математике младшего школьника, базирующихся на системе Л.В. Занкова.

Осуществление семантического анализа текста простой задачи (даже с трансформированным текстом) — действие не слишком сложное даже для слабого ученика (при условии, что он научен читать к этому времени — не случайно, долгие годы в классы, обучавшиеся по системе Л.В. Занкова, учителя старались набрать читающих детей). Учителя отмечают, что при хорошо организованной работе по освоению ребенком семантического анализа этому учебному действию можно обучить за сравнительно небольшой срок.

Для подготовки не читающего ребенка, к проведению семантического анализа задачи полезно на подготовительном этапе учить его «на слух» улавливать различные «необычности» в текстах задач, для чего используются тексты, похожие на задачи, тексты с различными «ловушками» и т. п.

Например:

Учитель: Послушайте меня и скажите, задача ли это: Под крышей четыре ножки, а на крыше — суп да ложки. Что это? *(Это не задача, а загадка.)*

— Чем отличается задача от загадки? *(В загадке надо догадаться, а в задаче — выполнить действие.)*

— Послушайте еще один текст:

Пять воробьев на заборе сидели.
Один улетел, а четыре запели.
И пели, пока не сморила усталость.
Один улетел — и их трое осталось.
Это — задача? *(Нет, это стихотворение.)*

Послушайте дальше:

Сидели втроем и немного скучали.
Один улетел.
Сколько осталось? *(Это уже задача.)*

— Чем же задача отличается от загадки или просто стишка?

Педагог подводит детей к тому, что в задаче должно что-то происходить, и результат этого действия в задаче не сообщается. Чтобы решить задачу, мы выбираем действие и затем отвечаем на вопрос.

Педагог может предложить детям такие задания:

Девочка нарисовала красные и зеленые шарики. Сколько шариков она нарисовала?

(На этот вопрос ответить нельзя. Надо знать, сколько было красных и зеленых шариков.)

Мальчик положил в коробку 4 красных и 2 зеленых карандаша. Сколько синих карандашей осталось на столе? *(На этот вопрос ответить нельзя. Данных не хватает.)*

В вазе лежит 3 апельсина и 4 яблока. Сколько апельсинов лежит в вазе? *(В этом тексте спрашивается о том, что уже известно. Не нужно выполнять действие.)*

Данные тексты акцентируют внимание ребенка на основных признаках задачи, учат его внимательно вслушиваться в текст, анализируя его на предмет наличия основных параметров: условие, вопрос, данные, искомое, а также анализировать корректность этих параметров.

Рассмотрим другие методические приемы, которые учитель может использовать при возможности опираться на умение ребенка работать с небольшим текстом.

Один из наиболее используемых авторами учебников приемов — это *постановка вопроса к данному условию*. Приведем его варианты:

Текст: У Коли 8 синих шариков и 2 зеленых.

Задание А: Поставьте вопрос к данному условию и решите задачу.

При использовании этого приема важно подвести детей к пониманию того, что к одному и тому же условию иногда можно поставить несколько вопросов и в зависимости от этого задача будет иметь различные решения.

Чтобы помочь детям осознать это, можно использовать другие варианты этого приема:

Задание Б: Выбери из данных вопросов те, которые можно поставить к этому условию (вопросы написаны на доске):

1. Сколько синих шариков у Коли?
2. Сколько у Коли шариков всего?
3. Сколько у Коли зеленых шариков?
4. На сколько синих шариков больше, чем зеленых?

Лишние вопросы (1 и 3) использованы для активизации внимания детей.

Задание В: Поставь к данному условию вопросы так, чтобы задача решалась с помощью выражений: 8 – 2; 2 + 8; 2 – 1.

Последнее выражение стимулирует воображение и гибкость мышления ребенка, позволяя составить сложный вопрос, содержащий еще одно данное: «Сколько зеленых шариков осталось у Коли, после того, как он подарил 1 шарик Маше?» При этом первое данное (8 синих шариков) становится лишним, но сама задача смысла не теряет.

Рассмотрим прием, рекомендованный в методическом пособии Н.Б. Истоминой *выбор условия к данному вопросу*.

Задание: Подбери условия к данному вопросу и реши задачу.
Текст: «Сколько всего детей занимается в студии?»

1. В студии 30 детей, из них 16 мальчиков.
2. В студии мальчики и девочки. Мальчиков на 7 меньше, чем девочек.
3. В студии 8 мальчиков и 20 девочек.
4. В студии 8 мальчиков, а девочек на 2 больше.
5. В студии занимаются 8 мальчиков, а девочек на 2 меньше.

Данный прием является обратным к приведенному выше и разумен с логической точки зрения, но в практической деятельности он достаточно сложен. Обычно дети готовы к нему лишь ко 2–3 классу, когда им действительно легко работать с достаточно большими текстовыми массивами. Но к этому времени задачи таких структур давно освоены и особого интереса не представляют.

Если дети хорошо читают уже в 1 классе, этот прием весьма полезен для развития объема оперативной памяти (так как ребенку нужно держать «в уме» всю словесную конструкцию).

Часто используемым в учебниках приемом является прием *объяснения выражений, составленных по данному условию*.

Условие: «На горке катались 8 мальчиков и 5 девочек. Потом 4 девочки ушли домой».
Задание: Объясни, что узнаешь, выполнив действия:
8 + 5; 8 – 5; 5 – 4.

Данный прием формирует у ребенка гибкость мышления, учит анализировать взаимоотношения данных в соответствии с условием.

Для формирования четкого понимания и выделения в тексте задачи данных и искомого, полезны *задачи с избытком и недостатком данных*:

У Мартышки было 7 бананов. Она поделилась со Слоненком. Сколько бананов у нее осталось?

Разбор этого текста позволяет не только дополнить задачу данными, но и рассмотреть различные ее варианты, обращая внимание на возможные соотношения добавляемого данного и искомого: чем больше Мартышка отдает, тем меньше у нее остается.

В корзине 8 морковок. Утром кролик съел 2 морковки и в обед — 4 морковки. Сколько морковок съел кролик?

Разбор этого текста позволяет после решения задачи (после ответа на поставленный вопрос) предложить детям поставить дополнительный вопрос к тексту так, чтобы использовать число 8. Этот прием будет являться пропедевтикой (подготовкой) знакомства с составной задачей.

Можно использовать *тексты с парадоксальными данными*:

На двух скамейках сидели 6 девочек. На одной из них 9. Сколько девочек сидело на второй скамейке?

Анализ этого текста позволяет на втором этапе (после того, как дети объяснили, почему задачу с такими данными решить нельзя) предложить учащимся изменить либо данные, либо условие задачи так, чтобы ее можно было решить. Этот прием будет являться пропедевтикой подготовки к составлению обратных задач.

Такие задания и приемы работы с ними рекомендуются на первых уроках знакомства с простыми задачами. Они позволяют сформировать у ребенка адекватное представление о новом для него математическом объекте — задаче, и приучают внимательно читать и анализировать текст, выделять его составные элементы. С методической точки зрения эти приемы разнообразят урок, но не стоит переоценивать их с технологической обучающей точки зрения. Для собственно формирования умения решать задачи эти приемы являются лишь подготовительными. Сложность эффективного использования этих приемов состоит в том, что для них необходимо либо, чтобы ребенок хорошо читал, либо, чтобы у него было ведущее аудиальное восприятие, т. е. чтобы он хорошо воспринимал информацию «на слух» и мог работать с ней также «на слух». Реально, лишь немногие дети хорошо читают в 1 классе, а ведущее восприятие у большинства из них — визуальное, поскольку ведущий вид мышления в этом возрасте — наглядно-образный. Ведущие «аудиалы» чаще всего подбираются (в результате специального отбора) в языковых гимназиях, в обычных же школах доля таких детей весьма невелика, поэтому для эффективной работы с большинством детей имеет смысл использовать технологии, опирающиеся на ведущее визуальное восприятие, т. е. моделирование различных видов.

Наиболее сложными для восприятия детей являются задачи с *трансформированными текстами*. При этом работа с такими текстами может считаться наиболее полезной для развития умственной деятельности и формирования умения решать задачи.

Л.В. Занков отмечал, что каждая задача должна давать ребенку пищу для интенсивной умственной деятельности, иначе работа над ней не приносит пользы. Ситуация задачи не должна быть самоочевидной, а должна представлять собой небольшую проблему, требующую усилий для ее преодоления. В этом смысле, ситуации простых прямых задач (т. е. задач, где выбор действия прямо определяется либо ситуацией задачи, либо указующими словами «вместе», «убрали», «осталось» и т. п.), которыми изобилуют учебники математики для 1 класса, дают, по словам Л.В. Занкова, «ничтожно малый результат в овладении умением анализировать предложенную ситуацию». В случае работы с такой простой прямой задачей процесс анализа протекает у детей так быстро, что они его не осознают, а это приносит вред в дальнейшем, когда дети сталкиваются с более сложными задачами, в которых анализ выступает на первый план. В 1 классе нередки ситуации, когда едва учитель закончит чтение задачи, многие дети уже готовы дать ответ, но затрудняются объяснить выбор действия и причины этого выбора.

В пособии «Обучаем по системе Л.В. Занкова» (1993) определены случаи, когда простые прямые задачи могут быть использованы на уроке:

1. Для уяснения детьми смысла арифметического действия, при котором такие задачи играют роль основного фактора, приводящего к *осознанию операции*, требующей выбора данного действия.
2. Прямые задачи используются в том случае, когда основное внимание учащегося должно быть направлено не на анализ ситуации, предложенной в задаче, а на другие ее стороны (например, при знакомстве с «условием» и «вопросом»). В этом случае основное внимание учеников должно быть направлено на выявление *структуры текста* задачи. Здесь сложная ситуация может создать дополнительные трудности, отвлекающие от основного направления работы.
3. Простые прямые задачи могут быть необходимы для некоторых более слабых детей, для которых они субъективно сложны. Они позволяют слабым детям сохранять уверенность в своих силах.

Там же отмечается, что по мере понимания детьми структуры и специфики задачи, следует систематически использовать задания, которые побуждают детей активно использовать те представления, которыми они овладели, а также требовали бы опоры на смысловые признаки в анализе текстов заданий. Этой цели служат тексты задач, имеющие разную конструкцию (их можно назвать *трансформированными* по отношению к типичным структурам текстов), в которых условие выражено в повествовательной форме, за ним

следует вопрос, выраженный вопросительным предложением. Это наиболее простая конструкция, позволяющая опираться на внешние признаки при выделении условия и вопроса.

Более сложные конструкции:

1. Часть условия выражена в повествовательной форме в начале текста, затем идет вопросительное предложение, включающее вопрос и часть условия: «У Оли было 6 яблок. Сколько яблок стало у Оли, если 2 она отдала брату?»
2. Часть условия выражена в повествовательной форме в начале текста, затем следует также повествовательное предложение, включающее вопрос и часть условия: «У Оли было 6 яблок. Найдите количество яблок у Оли после того, как 2 она отдала брату».
3. Текст задачи представляет одно сложное вопросительное предложение, в котором сначала стоит вопрос, а затем условие: «Сколько яблок осталось у Оли после того, как она из своих 6 яблок 2 отдала брату?»
4. Текст задачи представляет одно сложное повествовательное предложение, в котором сначала стоит вопрос задачи, а затем ее условие: «Найдите количество яблок у Оли после того, как она из своих 6 яблок 2 отдала брату».

Последние 4 конструкции не позволяют учащимся при анализе текста использовать внешние признаки задачи. Верно выделить в них условие и вопрос можно только опираясь на смысловые признаки.

Анализ содержания учебников по математике для 1 класса показывает, что большинства из этих конструкций в учебниках нет. Появление подобных текстов в 3 и 4 классе уже не имеет смысла, поскольку общее понятие о задаче формируется на первом году знакомства с ней, а далее идет совершенствование способов работы, связанных с ее решением.

Естественно, что сложность полноценного семантического анализа таких текстов связана с тем, что многие дети плохо читают в 1 классе. В то же время, полное отсутствие таких текстов в работе над задачей формирует у ребенка устойчивый негибкий шаблон восприятия семантической структуры задачи. В дальнейшем этот шаблон создает ребенку практически непреодолимые трудности при работе над текстами нестандартных составных задач.

Лекция 20.

Методика обучения решению задач

1. Общие вопросы методики обучения решению задач.
2. Методика работы с простыми задачами.
3. Приемы знакомства с составной задачей.
4. Задача в контексте урока.

1. Общие вопросы методики обучения решению задач

Традиционно все методические школы разделяют процесс обучения решению задач на две ступени: решение простых задач и решение составных задач. Различные учебники отводят каждой из этих ступеней различный временной промежуток. В настоящее время имеют место две тенденции: в одних учебниках реализовано раннее знакомство с простой задачей (ноябрь—декабрь 1 класса) и раннее знакомство с составной задачей (февраль—март 1 класса) — это новые учебники традиционной школы (2001) и учебники Л.Г. Петерсон (Школа 2100). В других учебниках знакомство с простой задачей отодвинуто на 2 класс (октябрь—ноябрь), но при этом почти сразу за знакомством с простой задачей следует знакомство с составной задачей — это новые учебники И.И. Аргинской (учебник — тетрадь) и учебник Н.Б. Истоминой.

С технологической (методической) точки зрения простая задача является «одношаговым» описанием соответствующей ей предметной ситуации.

Цель работы над простой задачей можно определить как обучение ребенка самостоятельной работе над *текстовой формой* простой задачи с применением на практике всех приобретенных ранее умений:

1) моделирование (в том или ином виде) заданной в задаче ситуации;
2) составление математического выражения соответственно смыслу ситуации (выбор действия);
3) оформление записи в равенство с наименованием;
4) запись ответа в краткой форме.

Иными словами, суть и смысл работы над простой задачей заключается в том, что в процессе этой деятельности ребенок упражняется в применении и совершенствует два своих учебных умения: *умение* перевести текстовое описание ситуации (словесную модель) любого вида в упрощенную схему (предметный или схематический рисунок, краткую запись), показывающую взаимоотношения между данными и искомым и *умение* оформить это отношение в виде равенства с наименованием, т. е. непосредственно записать решение, а затем ответ (можно сказать, что при этом выполняется второй перевод ситуации с языка графики — рисунка или схемы на язык математических символов — чисел и знаков).

Таким образом, этап работы над простыми задачами имеет смысл рассматривать как подготовительный этап к решению составных задач. С этой точки зрения термин «умение решать простые задачи» рассматривается именно как умение работать

с текстовым описанием ситуации и оформлять его в соответствующих записях. Не случайно на практике часто наблюдается картина, когда в классе дети легко справляются с задачами (и не только с простыми), а дома или на контрольной не могут решить даже аналогичные задачи. Дело в том, что «первый перевод» (с текста на упрощенную модель, структурно выявляющую связи между данными и искомым) в классе им активно помогает выполнять учитель, используя заранее заготовленную наглядность, рисунки, таблицы и т. п., а уже второй перевод (описание этой модели в числах и знаках) сделать проще. Не научившись на первом этапе работать с текстом самостоятельно, дети в дальнейшем с большим трудом учатся работать с ним на более сложных задачах.

Часто используемый учителем в 1 классе прием первичного чтения текста задачи вслух не требует от детей самостоятельного обращения к тексту, и не способствует формированию умения работать с текстом. Резонным возражением на этот довод является то, что многие дети плохо читают (или вообще не читают) в 1 классе, но именно с учетом этого явления и предлагаются на современном этапе системы обучения математике в начальной школе без задачи в первом классе (И.И. Аргинская, Н.Б. Истомина).

Рассмотрим так называемые «частные умения» решать задачу, которые приводятся в методических руководствах (Истомина Н.Б. и др. Методика преподавания математики в начальных классах. М., 1986) как необходимые ребенку для самостоятельной работы над задачей:

1) прочитать задачу и осознать ее текст, т. е. понять значение каждого слова и представить ту ситуацию, которая в ней дана;
2) выделить условие и вопрос задачи, известные и неизвестные;
3) установить связь между условием и вопросом задачи, между данными и искомым, т. е. провести анализ текста задачи, результатом которого является выбор арифметических действий для ее решения;
4) записать решение и ответ задачи.

Анализ данного перечня показывает, что уже умения выполнить указанные в первом пункте действия достаточно для фактического решения простой задачи. Умения, указанные в пункте 2 и 3 являются избыточными, поскольку, если ученик правильно представил (изобразил) ситуацию, которая дана в задаче, то это и означает, что он разделил условие и вопрос и установил соотношение между данными и искомым, это, в свою очередь, приводит к правильному выбору действия. Если речь идет о стандартной формулировке задачи (а их в учебниках абсолютное большинство), то упорная работа учителя над формированием этих умений в указанном порядке превращает работу над задачей для ребенка в полную бессмыслицу. Ведь если ребенку «дается» первый пункт самостоятельно (природный дар), то он немедленно по завершении чтения текста готов дать правильный ответ (что учитель часто видит на практике) и остальные два этапа ему просто не нужны. И наоборот, если ребенок не может (не умеет) правильно представить себе ситуацию, он не может, как правило, выполнить и третий пункт (установить взаимосвязь между данными и искомым), а «научение» его выполнению второго пункта (разделение задачи на условие и вопрос) ему практически ничем не помогает.

Например:

> С аэродрома утром улетело 7 самолетов, а вечером улетело еще 3 самолета. Сколько самолетов улетело с аэродрома?

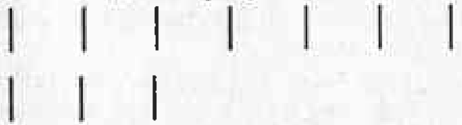
Разделить текст на условие и вопрос нетрудно, поскольку формулировка стандартная: выделить условие и вопрос можно сразу, не углубляясь в процесс ее «представления», так как условие дано в первом повествовательном предложении. Вопрос оформлен в вопросительном предложении. Однако правильно представить себе ситуацию задачи можно только установив связь между данными и искомым, поскольку задача носит косвенный характер, который обусловлен словом «улетели», обычно соотносимым с уменьшением исходного количества, т. е. с действием вычитания.

Имеет смысл соотнести работу над данной задачей с двумя умениями, обозначенными в начале параграфа как *последовательный перевод словесной модели в графическую, а затем в символическую.*

Работа над задачей:

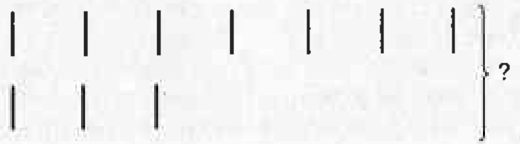
Учитель или ребенок читает текст задачи. Затем учитель просит прочитать только условие (так как формулировка стандартная, то выделение условия — это чтение «до точки»).

— Давайте обозначим палочками данные задачи (на фланелеграфе палочки можно обозначить любыми символическими фигурками или сделать рисунок):



— Где на рисунке самолеты, которые улетели утром? Где улетевшие вечером? Все улетевшие за день самолеты? (Вот где в данном случае происходит осознание текста и представление ситуации.)

— Прочитайте вопрос задачи. Покажите на рисунке, что надо узнать?



— Запишите решение задачи (этап оформления записи — это перевод схематической модели в символическую): 7 + 3 = 10 (с.).

– Почему выбрали знак сложения? *(Потому что надо узнать, сколько* ***всего*** *самолетов улетело.)*

В данном случае объяснение выбора действия происходит *после* записи решения. Именно такая последовательность является наиболее разумной при работе над простой задачей, поскольку решение «одношаговое» и рисунок (модель) является «прямым подведением» ребенка к выбору нужного действия.

Как видно из приведенного примера, последовательность действий ребенка при решении задачи может значительно отличаться от классической иерархии умений, традиционно перечисляемых как необходимые при обучении решению задач.

В приводимом здесь анализе будем исходить из классического положения: «Научить детей решать задачи — значит научить их устанавливать связи между данными и искомыми и в соответствии с этим выбирать, а затем и выполнять арифметические действия»[1].

В качестве средства формирования у детей указанного умения различные методические школы рекомендуют различные технологии. Традиционная технология рекомендует для формирования этого умения систематическую работу «над группами задач, решение которых основывается на одних и тех же связях между данными и искомыми, а отличаются они конкретным содержанием и числовыми данными. Группы таких задач будем называть задачами одного вида»[2].

Методические действия учителя задаются при этом следующей последовательностью:

1. Подготовительная работа к решению задачи.
2. Ознакомление с решением задачи.
3. Закрепление умения решать задачи.

В приведенном описании технологии обучения решению задач легко узнать схему, воплощенную в содержании традиционного учебника 1–4 (и 1–3): большое количество однотипных задач, идущих группами (несколько уроков подряд). При этом описание методических действий учителя предполагает фактически объяснительно-иллюстративный способ обучения, поскольку ознакомление с решением задачи (пункт 2) – это показ способа решения («запишите решение так...»); а «закрепление умения решать задачи» – это многократное повторение аналогичного способа действий на задачах того же типа (до запоминания наизусть как типа, так и способа решения).

---

[1] *Бантова М.А., Бельтюкова Г.В.* Указ. изд. С. 174.
[2] Там же.

Логическим следствием такой технологии является «прогноз», делаемый на этой базе, в отношении формирования у ребенка умения решать составные задачи: «...При решении составных задач ученики должны уметь устанавливать не одну связь, а систему связей, т. е. устанавливать несколько связей, выстраивая их в определенном порядке... Следовательно, подготовкой к решению составных задач будет не только усвоение учащимися соответствующих связей, но и умение вычленить систему связей, иначе говоря, разбивать составную задачу на ряд простых, последовательное решение которых и будет решением составной задачи»[1]. Это, безусловно, верное с теоретической точки зрения положение крайне редко воплощается на практике. Если бы эта система «срабатывала», то достаточно было бы «отработать» все виды простых задач (а их не так уж и много), и на этой базе составные задачи «пошли» бы сами по себе. На практике это не происходит. Более того, наиболее трудным моментом при решении составных задач для детей по-прежнему остается *этап осмысления текста*, на котором необходимо «правильно представить себе ситуацию».

При обучении решению составных задач учитель часто идет по тому же пути, что и при обучении решению простых задач: заучивает с детьми способы решения того или иного типа (на это нацеливают учителя и учебники, которые содержат в основном только типовые составные задачи). Задачи, которые обычно называют «нестандартными», отнесены, как правило, к задачам повышенной сложности, и любой учитель-практик знает, что охарактеризованная выше методика практически ничего не дает для обучения ребенка работе с такими задачами, поскольку главная их сложность и состоит в том, чтобы вычленить из них составляющие их простые задачи.

Рассмотрим для примера задачу:

> Бронза содержит 41 часть меди, 8 частей олова и 1 часть цинка. Сколько весит кусок бронзы, если в нем цинка на 2 кг 135 г меньше, чем олова?

Задача имеет трансформированную структуру текста: данное содержится в вопросе и отделено от других, связанных с ним данных, большим словесным периодом, что затрудняет установление взаимосвязи между ними. Типовую принадлежность задачи можно определить как «задача на нахождение неизвестного по двум разностям», усложненная дополнительными компонентами

[1] *Бантова М.А., Бельтюкова Г.В.* Указ. изд. С. 175—176.

(третий элемент — медь и результативное требование: найти массу всего куска бронзы). Текст задачи не содержит никаких трудных для понимания слов, разделить текст на условие и вопрос несложно, но это нисколько не помогает установлению связей между данными и искомым. Проблема выделения в этой задаче составляющих ее простых задач как раз и является центральной, поскольку, как только это удается сделать, путь решения задачи мгновенно «выстраивается» и становится очевидным. Именно в этом этапе и содержится главная трудность в обучении решению задач школьника. И именно здесь традиционная методика ничего не предлагает в качестве средства формирования у ребенка умения выявлять простые задачи «внутри» составной и устанавливать их взаимосвязь. Без этого умения в общем виде ребенок никогда не будет хорошо справляться с задачами, даже если «отработать» с ним способы решения типовых составных задач до уровня навыка.

Рассмотрим другие методические подходы к проблеме формирования умения решать простые задачи.

«При другом подходе процесс решения задач (простых и составных) рассматривается как переход от словесной модели к модели математической или схематической.

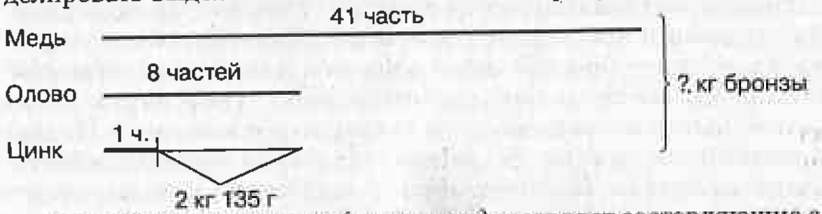
В основе осуществления этого перехода лежит семантический анализ текста и выделение в нем математических понятий и отношений»[1].

Если под математической моделью понимать символическую математическую запись решения, то иерархия этапов моделирования должна быть другой: сначала — схематическая модель, а затем символическая.

Если под семантическим анализом понимать процесс прочтения задачи с последующим выделением основных ее частей и элементов (условия, вопроса, данных, искомого), то только в типовых задачах достаточно простых конструкций семантический анализ приводит к выделению отношений между ними. Мы полагаем, что семантический анализ является предшествующим к построению схематической модели задачи, а не «средством осуществления перехода» от схематической модели к символической. Средством такого перехода является процесс выявления отношений между данными и искомым. Осуществляется этот процесс посредством анализа схематической модели задачи. Иными словами, результатом этого анализа как раз и является осознание отношений между данными и искомым.

[1] *Истомина Н.Б.* Методика обучения математике в начальных классах. М., 2000. С. 210.

Вернемся к приведенной выше задаче о куске бронзы. Для ее решения в процессе семантического анализа сразу же следует моделировать выделяемые элементы задачи в рисунке:



Данный рисунок зримо (визуально) выявляет составляющие ее простые задачи. Его анализ выявляет отношения между данными, а также между данными и искомым, что позволяет составить план решения, т. е. план перехода от схематической модели к символической (арифметической):

1. Находим разницу частей олова и цинка (простая задача на разностное сравнение).
2. Находим массу, приходящуюся на одну часть (простая задача на деление на части).
3. Находим общее число частей в куске бронзы (простая задача на нахождение суммы).
4. Находим массу куска бронзы (простая задача на нахождение произведения).

Таким образом, выделенное в начале данного параграфа умение переводить текстовую модель в предметную или схематическую модель является решающим для процесса самостоятельной работы над задачей. При этом, рассмотренный выше пример, показывает, что при работе над составной задачей это же умение продолжает оставаться центральным, просто модель становится более сложной. Однако учить ребенка приемам такого моделирования следует именно на начальных этапах, при работе над простой задачей, когда тексты достаточно просты и возможна даже работа «на слух». Если начинать учить ребенка приемам моделирования при решении составных задач, то более сложные тексты потребуют умения хорошо читать, и модели становятся более сложными, что может вызвать трудности при их составлении. В этом случае моделирование перестанет выполнять свою главную функцию — облегчение работы над задачей, и превратится в дополнительную ненужную трудность.

С этой точки зрения становится несущественным основной спорный момент между разными методическими направлениями сегодняшнего дня: когда знакомить детей с задачей — в 1 или во 2 классе. В предыдущем пункте мы показали, как можно организовать работу с нечитающими шестилетками при обучении их составлению схематических моделей особого рода при работе «на слух».

В этом случае ребенок сразу по мере чтения ему задачи составляет модель, и затем анализирует уже не текст, а *схематическую модель* задачи, что позволяет осмысленно ее решить.

Читателям может показаться, что мы противоречим сами себе, ведь в этом случае ребенок тоже не работает с текстом как таковым, т. е. не анализирует непосредственно *текстовую* структуру задачи. Это так, но в предлагаемом подходе рациональное зерно состоит в том, что ребенок сразу учится переводить недоступную ему непосредственно текстовую модель (текст читает учитель), на доступный его пониманию язык схемы или рисунка. В этом случае анализ текстовой модели заменяется анализом схематической модели, но сам анализ все-таки присутствует, а не подменяется угадыванием нужного действия по прямому смыслу «главного» слова (улетели, принесли...) или механическим манипулированием числовыми данными задачи.

2. Методика работы с простыми задачами

Методически принято выделять следующие этапы работы над задачей на уроке:

I. Подготовительная работа.
II. Работа по разъяснению текста задачи.
III. Разбор задачи (анализ), поиск пути решения и составление плана решения.
IV. Запись решения и ответа.
V. Проверка или работа над задачей после ее решения.

Особенности каждого из этапов в процессе обучения решению простых задач обусловливаются тем, что простые задачи являются, с одной стороны, одним из средств формирования понятий о смысле арифметических действий, с другой стороны, являются подготовительной ступенью к обучению решению составных задач.

В связи с этим *на подготовительном этапе* к решению конкретной простой задачи необходимо предложить детям задание, позволяющее педагогу проверить, понимают ли ученики смысл действия, которое будут выполнять в задаче. Такая работа проводится либо на предметной, либо на схематической наглядности.

Сложение выступает как объединение двух множеств, не имеющих общих элементов, вычитание — как удаление части множества. Например, подготовительный этап к решению простых задач на нахождение суммы и остатка может содержать такие задания:

Педагог выставляет на фланелеграфе кружки разного цвета: красные, синие, зеленые и предлагает показать, сколько всего красных и синих. Затем педагог предлагает записать процесс нахождения количества красных и синих кружков с помощью математического выражения: 3 + 2, затем дети находят его значение. Чтобы исключить пересчитывание, работу можно организовать так: один ученик снимает с фланелеграфа сначала 3 красных кружка и кладет их в конверт, а затем 2 синих и кладет туда же. Другой ученик записывает математическое выражение, соответствующее выполненному действию, и находит его значение. Затем результат проверяется пересчитыванием.

Перед решением задач на нахождение остатка полезно провести работу с наглядностью, также убирая в конверт «уменьшаемое» и вынимая оттуда «вычитаемое», чтобы исключить пересчет и иметь возможность затем проверить полученный результат путем пересчета оставшихся в конверте предметов. При этом производимые действия полезно сопровождать обсуждением схемы

$$\square - \square = \square$$

т. е. выяснить, какое число дети поставят в окошко, находящееся справа от знака «равно»; слева от знака «минус», справа от знака «минус».

Работа по разъяснению текста простой задачи заключается в том, что педагог выясняет все ли слова и обороты текста понятны детям. При решении задач на сложение и вычитание — это термины: старше—младше, дороже—дешевле и т. п.

Разбор задачи включает в себя поиск пути решения и составление плана решения задачи.

Подход к разбору может быть *аналитическим* (в начальной школе обычно говорят«от вопроса») и *синтетическим* («от данных»).

Приведем примеры обоих видов разборов.

> **В нашем городе было 10 школ, а в этом году построили новые школы и всего стало 12 школ. Сколько новых школ построили в этом году?**

Разбор «от вопроса» (аналитический):

— Что нужно знать, чтобы ответить на вопрос задачи? *(Нужно знать, сколько школ было и сколько стало.)*

— Известно в задаче, сколько школ было? *(Известно: 10.)*

— Известно в задаче, сколько школ стало? *(Известно: 12.)* На сколько больше школ стало? *(На 2.)* Значит, сколько их построили? *(2 школы.)* Как нашли 2 школы? *(12 – 10.)*

— Запишем решение: 12 – 10 = 2 (шк.).

Разбор «от данных» (синтетический):

— Что известно в задаче? *(Что школ было 10, а стало 12.)*

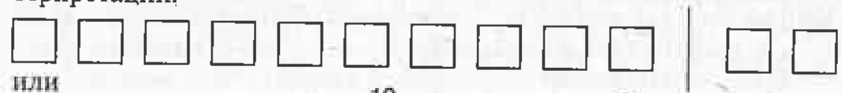
— Можно ли узнать, на сколько больше их стало, используя эти данные? *(Можно: 12 – 10.)*

— Значит, сколько школ построили? *(2 школы.)*

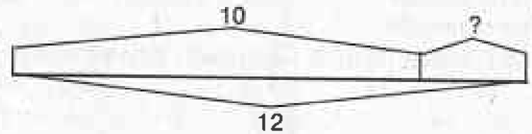
— Запишем решение: 12 – 10 = 2 (шк.).

Педагоги часто пользуются аналитическим методом разбора задачи уже на начальном этапе обучения решению простой задачи. С точки зрения психологии это не совсем верно, так как в возрасте 6—8 лет формирование способности к синтезу у ребенка несколько опережает формирование способности к анализу. В связи с этим в 1—2 классе ребенку легче освоить синтетический способ разбора задачи, особенно, если он сопровождается наглядной интерпретацией или графической схемой.

К данной задаче можно было бы дать различные наглядные интерпретации:



или



Анализ наглядной интерпретации непосредственно «подводит» к выбору действия в задаче.

Запись решения и ответа — может проводиться различными способами:

1) по действиям без пояснения — в этом случае пишут полный ответ;

2) по действиям с пояснением — в этом случае пишут краткий ответ;

3) выражением (в составной задаче);

4) по действиям с вопросами;

5) в случае решения задачи с помощью уравнения, пишут постепенную запись уравнения с пояснениями.

Например:

> **Маляру надо покрасить в одной квартире 6 дверей, а в другой — 4. Он покрасил 7 дверей. Сколько дверей осталось покрасить маляру?**

Запись решения по действиям:

1) 6 + 4 = 10 (д.)
2) 10 – 7 = 3 (д.)
Ответ: осталось покрасить 3 двери.

Запись решения по действиям с пояснением:

1) 6 + 4 = 10 (д.) — нужно покрасить
2) 10 – 7 = 3 (д.) — осталось покрасить
Ответ: 3 двери.

Запись решения выражением:
(6 + 4) – 7 = 3 (д.)
Ответ: осталось покрасить 3 двери.

Запись решения по действиям с вопросами:
1. Сколько дверей нужно покрасить всего?
6 + 4 = 10 (д.)
2. Сколько дверей осталось покрасить?
10 – 7 = 3 (д.)
Ответ: 3 двери.

Запись решения постепенным составлением уравнения с пояснением:
x — дверей осталось покрасить
$7 + x$ — всего дверей
6 + 4 — всего дверей
Количество дверей равное. Составим уравнение:

$$x + 7 = 6 + 4$$
$$x + 7 = 10$$
$$x = 10 - 7$$
$$x = 3$$

Ответ: 3 двери.

Работа над задачей после ее решения заключается в следующем:
1) если задача записывалась по действиям, то запись решения выражением (в составной задаче);
2) проверка решения;
3) решение другим способом (в составной задаче);
4) варьирование данных, условия и вопроса;
5) составление обратной задачи.

Рассмотрим эти виды работы над задачей после ее решения:
Запись решения выражением не является другим способом ее решения, а всего лишь другой формой ее записи, поэтому формулировать задание следует соответствующим способом: «Запишем решение задачи в другой форме: выражением».

Проверка решения задачи проводится с целью установления его правильности. В начальных классах используются следующие способы проверки:
1) *прикидка ответа* — установление возможных границ значений искомого, прикидка проводится до начала решения задачи.
Например:

У пруда росло 9 осин и берез. Осин было 4. Сколько было берез?

В данной задаче целесообразно провести прикидку, поскольку типичной ошибкой является сложение данных 9 + 4. Прикидка проводится следующим образом:

— Что означает число 9? *(Это осины и березы.)*
— Количество берез по отношению к числу 9 должно быть больше или меньше? *(Меньше, потому что березы — это часть от 9 деревьев.)*
После решения задачи перед записью ответа соотносят полученный ответ с «прикинутым»:
Полученный ответ больше или меньше 9? *(Меньше, значит соответствует прикидке.)*
2) *установление соответствия между числами*, полученными в результате решения задачи, и числами, данными в условии (этот способ можно назвать *подстановкой*): для данной задачи это будет выполнение действия 5 + 4 = 9 (д.);
3) *решение задачи другим способом* — возможно только при проверке составных задач, допускающих различные способы решения: если при решении задачи другим способом ответ совпадает, значит, задача решена верно;
4) *решение обратной задачи* — при этом должны получиться данные в условии прямой задачи числа.
Для простой задачи этот способ практически совпадает со способом 2), но сопровождается составлением текста обратной задачи.

Варьирование (т. е. изменение) данных, условия и вопроса является наилучшим развивающим приемом (наряду с проверкой) на этапе работы над задачей после ее решения. Постоянное использование этого приема помогает детям лучше осознать ситуацию, предлагаемую в задаче, установить не только связь между данными и искомым, но и их взаимозависимость в динамике; учит ребенка не относиться к решению задачи формально, учит элементам поиска и творчества в процессе решения задачи. Варьирование вопроса в некоторых простых задачах органично подводит к знакомству с «составной задачей».

Варьирование данных и искомого постепенно приводит к умению составлять обратную задачу. Например, в задаче, рассмотренной выше (о школах), эту работу можно было провести так:
— Как изменилось бы решение задачи и ее ответ, если бы в городе было 8, 5, 3 школы?
— Как бы мы решали задачу, если бы ее условие звучало так: «В нашем городе было 10 школ, а в этом году построили новые школы. Сколько стало школ в городе?»
После того как выясняется, что данных не хватает, учитель спрашивает:
— Какое еще данное нам нужно, чтобы можно было ответить на вопрос задачи? *(Сколько школ построили?)* Добавим данное. Как теперь звучит условие задачи? Можно теперь ответить на ее вопрос? Что для этого надо сделать?

В процессе такой работы постепенно формируется умение составлять обратные задачи. Особенно важна работа после решения в простых задачах на умножение, так как эти задачи являются первыми шагами на пути формирования понятия о прямой и обратной пропорциональной зависимости (т. е. понятия функция). Поэтому после решения такой задачи крайне важно поработать над ней, варьируя данные и искомое, чтобы дети хорошо поняли, что при увеличении одного увеличивается другое или наоборот.

Приведем примеры вариантов варьирования после решения задачи:

У пруда росло 9 осин и берез. Осин было 4. Сколько было берез?

После решения этой задачи полезно провести варьирование данных с целью повторить состав числа 9: Что изменилось бы, если бы осин было 3? 5? 8?

Слава принес в класс 7 рисунков, а Павлик на 4 рисунка меньше. Сколько рисунков принес Павлик?

После решения этой задачи полезно провести варьирование условия: Что нужно изменить в условии, чтобы задача решалась сложением?

Можно провести варьирование вопроса: что изменится в решении задачи, если вопрос будет таким: «Сколько рисунков они принесли вместе?» Или: «Измените вопрос так, чтобы задача решалась двумя действиями».

Бабушка надоила 12 литров молока и разлила его в банки по 3 литра в каждую. Сколько банок потребовалось?

Емкость банки и количество банок находятся в обратно-пропорциональной зависимости: чем больше емкость банки, тем меньше понадобится банок. Эту зависимость и нужно подчеркнуть при варьировании данных в задаче после ее решения. Можно оформить эту работу в таблице:

12 л	12 л	12 л
3 л	4 л	6 л
4 банки	3 банки	2 банки

На одно детское платье расходуют 2 метра ткани. Сколько метров ткани пойдет на 3 таких платья?

Расход ткани и количество платьев находятся в прямо пропорциональной зависимости: чем больше платьев, тем больше расход

ткани. Эту зависимость нужно подчеркнуть при варьировании данных в задаче после ее решения. Можно оформить эту работу в таблице:

2 м	2 м	2 м
3 платья	4 платья	5 платьев
6 м	8 м	10 м

Рассмотренные в данном параграфе пять этапов работы над задачей являются этапами работы учителя при работе над задачей. Не следует смешивать эти этапы с приемами самостоятельной работы ребенка над задачей. Приемы методической деятельности учителя на уроке на различных этапах работы над задачей, безусловно, являются формирующими определенные понятия и способы действий у ребенка. Однако при самостоятельной работе ребенка над задачей дома или на контрольной, ему необходимо хорошо уметь:

1) читать текст задачи, понимая смысл прочитанных фраз;

2) моделировать (в том или ином виде) заданную в задаче ситуацию; при этом важно то, что модель не должна быть формальной (модель ради модели никому не нужна), а должна «указывать» на способ решения задачи;

3) составлять математическое выражение, соответственно смыслу ситуации (выбор действия);

4) оформлять запись решения и ответа;

5) контролировать результат (понимать, что ответ лучше проверить, и владеть способами проверки ответа задачи).

Наиболее сложными для ребенка являются умения 2 и 5, однако именно сформированность этих умений будет гарантировать то, что ребенок будет решать ее не путем «вспоминания» заученного способа решения задачи такого типа, а подходя к любой задаче в общем как к объекту, требующему выполнения перечисленных выше действий.

3. Приемы знакомства с составной задачей

При знакомстве с составной задачей могут быть использованы различные методические приемы.

Рассмотрение двух простых задач с последующим объединением их в составную

Например:

Ежик нашел 2 белых гриба и 4 подосиновика. Сколько он нашел грибов?	Ежик нашел 6 грибов. 3 гриба он отдал белочке. Сколько грибов у него осталось?
$2 + 4 = 6$ (гр.)	$6 - 3 = 3$ (гр.)

Педагог рассматривает с детьми оба текста простых задач, предлагая определить, чем они похожи и чем отличаются. Затем предлагает объединить оба сюжета в одном тексте, получая таким образом *составную задачу*:

Ежик нашел 2 белых гриба и 4 подосиновика. 3 гриба он отдал белочке. Сколько грибов у него осталось?

1) 2 + 4 = 6 (гр.)
2) 6 – 3 = 3 (гр.)

Рассмотрение простой задачи с последующим преобразованием ее в составную путем изменения ее вопроса
Например:

Столяр сделал 8 книжных полок, а кухонных на 3 меньше. Сколько кухонных полок сделал столяр?

После ее решения, учитель предлагает детям ответить на второй вопрос по тому же условию: «Сколько всего полок сделал столяр?» Далее, сравнивая ответы на оба вопроса, устанавливают их иерархию (необходимую последовательность), приходя к выводу, что постановка второго вопроса (Сколько всего полок?) необходимо требует сначала ответить на первый вопрос (Сколько кухонных полок?).

Прием рассмотрения сюжета с действием, рассредоточенным во времени
Например:

В автобусе было 6 пассажиров. На первой остановке вошли еще 4 пассажира, а на второй еще 1. Сколько пассажиров стало в автобусе?

При анализе текста педагог обращает внимание учащихся на то, что входили и выходили пассажиры не одновременно, а на разных остановках. Поэтому для ответа на вопрос задачи нужно выполнить два действия:

1) 6 + 4 = 10 (п.)
2) 10 + 1 = 11 (п.)

После того, как задача решена, полезно сравнить ее с простой задачей: «В автобусе было 6 пассажиров, на остановке вошло еще 5. Сколько пассажиров стало в автобусе?»

Педагог предлагает отметить в каждом из условий те предложения, которыми отличаются тексты рассматриваемых задач. После ее решения можно обсудить, почему в той и в другой задаче получены одинаковые ответы.

Прием рассмотрения задач с недостающими или лишними данными
Например:

У кормушки было 6 серых и 5 белых голубей. Один белый голубь улетел. Сколько белых голубей стало у кормушки?

Анализ текста показывает, что одно из данных лишнее — 6 серых голубей. Для ответа на вопрос оно не нужно. После решения задачи учитель предлагает внести в текст задачи такие изменения, чтобы это данное понадобилось. Это приводит к *составной задаче*:

У кормушки было 6 серых и 5 белых голубей. Один голубь улетел. Сколько голубей осталось у кормушки?

Эти изменения условия повлекут за собой необходимость выполнять два действия:
(6 + 5) – 1 или (6 – 1) + 5 или (5 – 1) + 6.
Таким образом простая задача «достраивается» до составной.

4. Задача в контексте урока

Задача может играть различную роль в контексте урока, в зависимости от его цели. Если цель урока — формирование каких-то вычислительных умений или геометрических знаний, то такой урок может проходить вообще без задач. Задача может играть вспомогательную роль, например, при работе с величинами или дробями и т. п. Однако задача может занимать и центральное место в уроке, особенно если учитель хочет реализовать в этом уроке полную схему работы (все этапы работы) над задачей. Приведем пример такой организации урока, когда задача нового вида занимает в уроке центральное место с реализацией всех этапов работы над задачей в классическом варианте.

Магазин продал за день 24 кг вишневого варенья и 40 кг малинового, причем малинового варенья было продано на 8 банок больше, чем вишневого. Сколько банок варенья каждого сорта было продано за день, если все банки были одинаковы по массе?

Данную задачу учащиеся могут решить в 4 классе, где по программе предусмотрено рассмотрение зависимостей между тремя величинами (общая масса, масса одного предмета, количество предметов). Данную задачу называют задачей *на нахождение неизвестного по двум разностям.*

1. *На подготовительном этапе* полезно дать задание такого вида:

Масса одной ... (кг)	Всего... (шт.)	Общая масса... (кг)
5	?	20
?	8	?

Меняя данные в таблице (и соответственно) тексты заданий, вспоминаем возможности использования свойств прямой пропорциональности.

При этом можно предложить учащимся такие вопросы:

— Дети собирали макулатуру и связывали ее в пачки по 5 кг. Сколько было пачек, если им дали талон на 20 кг?

— Если пачек было 8 (10, 6) сколько было макулатуры?

— Если бы пачки были разного веса, можно было бы ответить на эти вопросы? *(Нет, так как при разном весе пачек мы не могли бы пользоваться данным 5 кг.)*

Таблицу продолжаем следующим образом:

Масса одной ... (кг)	Всего... (шт.)	Общая масса... (кг)
5	?	20
?	?	30
?	? на 2 больше	?

Вопросы учителя:

— В каком случае количество пачек больше? Почему?

— Можно ли найти, на сколько пачек больше собрано во 2 классе? Как это сделать?

— Можно ли узнать, сколько макулатуры собрал 3 класс?

— Как это сделать, если про него почти ничего не известно? Какие данные можно взять за основу? *(Массу одной пачки и количество макулатуры, собранное 2 классом. Или можно узнать сколько пачек макулатуры собрал 3 класс, так как мы знаем, что их на 2 пачки больше, чем во втором... и т. д. полезно рассмотреть все варианты.)*

После такой подготовительной работы, задачу после ее чтения и разбора текста можно дать на самостоятельное решение.

2. *Для разбора текста* (после чтения задачи) используется метод беседы.

Педагог задает вопросы:

— Сколько продали вишневого варенья?

— Сколько малинового?

— Какого варенья было больше? Сколько банок вишневого варенья продали? *(Неизвестно.)* А малинового? *(Неизвестно.)* Что сказано о количестве банок того и другого варенья? *(Малинового на 8 банок больше, чем вишневого.)* Что известно о емкости банок? *(Банки были одинаковые, их емкость неизвестна.)*

В процессе разбора текста на доске заполняется таблица:

Масса 1 банки	Всего банок	Масса варенья
?	?	24 кг
? одинаково	? на 8 банок больше, чем	40 кг

3. *Анализ задачи:*

Если проводить анализ с опорой на таблицу, то следует выбрать путь «от данных» (синтетический):

— Что можно узнать, зная, что вишневого варенья продано 24 кг, а малинового — 40 кг? *(На сколько малинового продали больше.)*

40 – 24 = 16 (кг)

— Что известно из условия о количестве банок малинового варенья? *(Их на 8 больше.)*

— Сколько весят 8 банок? *(16 кг)*

— Что можно узнать из этих данных? *(Массу одной банки с вареньем.)*

16 : 8 = 2 (кг)

— Что можно узнать, если известно, что продано 24 кг варенья в банках по 2 кг в каждой? *(Количество банок.)*

24 : 2 = 12 (б.)

— Что можно узнать, если известно, что малинового варенья продано на 8 банок больше? *(Количество банок.)*

12 + 8 = 20 (б.)

Разбор «от вопроса» (аналитический) выглядит так:

— Что нужно знать, чтобы определить, сколько банок вишневого (или малинового) варенья продано? *(Сколько варенья продано всего и массу одной банки.)*

— Известно, сколько продано вишневого (и малинового) варенья? *(Известно: 24 кг, 40 кг.)*

— Известна масса банки? *(Нет.)*

— Что нужно знать, чтобы определить массу одной банки? *(Массу определенного количества банок.)*

— Знаем мы что-нибудь о количестве банок? *(Знаем, что малинового было на 8 банок больше, чем вишневого.)*

— Известна масса этих банок? *(Нет.)*

— Что нужно знать, чтобы узнать массу 8 банок? *(Нужно знать, на сколько малинового варенья продали больше, чем вишневого.)*

— Знаем мы сколько продано того и другого варенья? *(Да, 24 кг и 40 кг.)*

— Сколько весят 8 банок? *(40 – 24 = 16 кг)*

— Сколько весит одна банка? *(16 : 8 = 2 кг)*

— Сколько вишневого (малинового) варенья продали? *(24 : 2 = = 12 (б.) 40 : 2 = 20 (б.))*

Как видим, путь «от данных» короче и позволяет использовать таблицу, как внешнюю опору для разбора и поиска путей решения.

4. *Запись решения* в данной задаче выполняется по действиям. (Выражение получается слишком сложного вида, записывать его не стоит.)

1) 40 – 24 = 16 (кг)		1) 40 – 24 = 16 (кг)
2) 16 : 8 = 2 (кг)	или	2) 16 : 8 = 2 (кг)
3) 24 : 2 = 12 (б.)		3) 24 : 2 = 12 (б.)
4) 40 : 2 = 20 (б.)		4) 12 + 8 = 20 (б.)

5. *Проверку решения* при первом варианте записи решения можно сделать, соотнеся два полученных в решении данных 20 б. и 12 б. с данным условия «на 8 банок больше»: 20 – 12 = 8 (б.).

В общем случае данную задачу полезно проверить путем составления и решения *обратной задачи*. Для этого используют ту же таблицу, продолжая ее дальше, и используя прием замены известных данных на неизвестные, а неизвестных на новые данные, найденные в процессе решения прямой задачи.

Масса 1 банки	Всего банок	Масса варенья
?	?	24 кг
? одинаково	? на 8 банок больше, чем	40 кг
?	12 б.	24 кг
? одинаково	? на 8 банок больше	?
?	? на 8 банок меньше	?
? одинаково	20 б.	40 кг

6. *Работа над задачей после ее решения* будет заключаться либо в составлении и решении обратных задач (пункт 5), либо в работе по формированию понятия о прямой пропорциональности.

Эта работа проводится путем изменения данных в условии. Например, учитель может спросить:

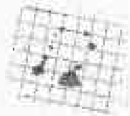
— Что изменится в задаче, если вместо «на 8 больше» будет стоять «на 2 банки больше»? *(Увеличится масса одной банки, уменьшится количество банок.)*

— Могли бы мы решить задачу, если бы банки были разной массы?

— Что нужно было бы изменить в условии, если вместо 24 кг мы поставили бы 48 кг? *(Следовало бы изменить и второе данное — вместо 40 кг взять число больше 48 кг, так как малинового варенья было больше.)*

Подобная полная работа над задачей является крайне полезной с точки зрения формирования общих умений решать задачи и ее следует проводить хотя бы 1–2 раза в неделю.

При решении одной задачи при таком подходе деятельность учащихся является максимально разнообразной (решение подготовительных простых задач, решение прямой и обратных задач, проверка, варьирование данных, работа над понятием прямой пропорциональности, исследование области решений). Поэтому такая работа будет давать более высокие результаты, чем решение нескольких однотипных задач без подобного углубления.



Лекция 21.
Использование приема моделирования при обучении решению задач

1. Моделирование как обобщенный прием работы над задачей.
2. Приемы моделирования при обучении решению простых задач.
3. Схематическое моделирование при обучении решению составных задач.
4. Обучение детей использованию схемы в виде отрезков при решении задач.
5. Моделирование при обучении решению задач на движение.
6. Влияние графического моделирования на формирование умения решать задачи разными способами.

1. Моделирование как обобщенный прием работы над задачей

В основу формирования умения решать задачи можно положить *прием моделирования*, которым дети овладевают в процессе специально организованной деятельности.

Модель — это построенный по определенным правилам аналог исследуемого объекта, процесса, ситуации, который отражает структуру связей и отношений исследуемого объекта и должен быть способен замещать его так, что его изучение дает нам новую информацию об этом объекте. Под моделированием, таким образом, можно понимать способ построения модели.

В процессе решения задачи ученик не может непосредственно исследовать ту ситуацию, которая предлагается ему в тексте задачи. Смысл же процесса решения заключается в том, что данную ситуацию надо описать с помощью математических символов (цифр и знаков

20–2681

действия), т. е. наиболее нужными для ученика являются количественные характеристики этой ситуации и тип связей между ними (объединение, удаление, увеличение и т. д.). Иными словами, чтобы решать задачу, ученик должен отбросить все второстепенные детали и оставить только те, которые нужны непосредственно для составления математического выражения, являющегося решением данной задачи. Выполняя эту операцию (освобождение от ненужных для решения подробностей), ученик строит абстрактную модель реальной ситуации, предлагаемой в задаче. От того, насколько правильно он построит эту модель и какие способы ее построения выберет, зависит правильность ее решения. Удачно построенная модель должна облегчить ученику процесс решения задачи.

В начальной школе используются разные способы построения модели (моделирования). Моделирование может быть *предметным*, т. е. модель строится с использованием вещественной, предметной наглядности (в этом случае учитель обычно использует наборное полотно, фланелеграф, специальную полку для кубиков, машин и т. п.). Моделирование может быть *графическим*, т. е. ситуация, предложенная в задаче, изображается с помощью схемы, схематического чертежа, стилизованного рисунка (когда зайчики изображаются с помощью кружков или треугольников и т. д.).

Все эти варианты моделирования имеют внешнее воплощение, т. е. процесс построения модели отражается в той или иной мере на предметной наглядности, схеме, чертеже, таблице и др. Но моделирование может быть и мысленным, в этом случае ученик представляет себе ситуацию в уме и, пользуясь этой воображаемой моделью, может сразу составить запись решения. О таких детях говорят: решает задачу «по представлению». В этом случае моделирование происходит без опоры на материализованные действия.

Все перечисленные виды моделей являются промежуточными, так как конечная цель ученика при решении задачи — запись ее решения в виде математического выражения.

Как и всякому учебному умению, действию моделирования надо учить специально. Использование визуально воспринимаемых моделей позволяет опираться на наглядно-образное мышление ребенка, характерное для младшего школьного возраста. Сензитивным (наиболее удачным) периодом для начальных этапов обучения визуально воспринимаемому моделированию является период обучения в начальной школе. Причем если организовать обучение моделированию еще на подготовительном этапе, до начала обучения решению задач, то в дальнейшем можно формировать умение решать задачи на базе усвоенных принципов построения модели объекта, ситуации, процесса, явления и т. д.

Основными принципами построения учебной модели являются следующие:

а) модель должна отражать особые (в данном случае количественные) отношения реальной действительности;

б) модель может и должна замещать соответствующие реальные объекты, явления, процессы, ради которых она была создана;

в) модель, отображая структуру исследуемого объекта, процесса, ситуации и т. д. способна замещать его так, что ее изучение дает нам новую информацию об этом объекте, ситуации и т. п.

Средствами построения математической модели могут служить символы, знаки, рисунки, чертежи, схемы.

Для того чтобы решать задачу, ученик должен уметь переходить от текста к представлению ситуации, а от нее к записи решения с помощью математических символов. Все эти три модели являются различными моделями одного и того же объекта — задачи. Различаются они тем, что выполнены на разных языках: языке слов, языке образов, языке математических символов.

С этой позиции процесс обучения решению задач можно рассматривать как обучение приемам перевода моделей одного вида в модели другого вида, а моделирование будет выступать в качестве обобщенного способа решения задачи любого типа. Для того чтобы решить любую математическую задачу, ученик должен уметь выполнить двойной переход:

текст → образ → запись решения.

Сущность перехода от мысленной модели задачи к математической (символической) заключается в правильном выборе арифметических действий, соответствующих смыслу происходящих в задаче изменений. Если мысленная модель, которой руководствуется ученик при выборе действий, верно отражает структуру связей, то она будет прогнозировать ход ее решения и обусловливать верный выбор действий.

Таким образом, если ребенок владеет арифметической символикой и понимает смысл арифметических действий, этот этап он обычно преодолевает без особых трудностей. Часть учеников, не умеющих решать задачи самостоятельно, довольно успешно справляются с ними, если получают в качестве индивидуальной помощи план ее решения в той или иной форме. План решения в этом случае играет ту же роль, что и мысленная модель, т. е. является схемой способа действия. Таким образом, психологически обучение математической символике и формирование понятия о смысле арифметических действий должны предшествовать обучению решению задач. Если ребенок будет плохо понимать смысл действий и путаться в символах, ему сложно будет осуществить переход от мысленной модели к математической.

В то же время процесс перехода от текста к мысленной модели представляет для многих детей гораздо большую трудность, чем переход от мысленной модели к математической. Дело в том, что в возрасте 6—7 лет у ребенка преобладает наглядно-образное мышление, которое в большой степени зависит от непосредственного восприятия. А это означает, что абстрагироваться, отвлечься от наиболее бросающихся в глаза свойств предмета или конкретных подробностей текста, ученику этого возраста очень трудно. Мысленная же модель задачи должна быть достаточно абстрактна. Поскольку она должна помочь ребенку решать математическую задачу, эта модель должна отражать только количественные соотношения предложенной ситуации, а также каким-то образом отразить структурные связи между данными и искомым, чтобы сделать ясным и понятным выбор действий. Опытный учитель знает, что научить младшего школьника решать задачи по самостоятельно выстроенному «представлению», т. е. пользуясь самостоятельно созданной мысленной моделью, если у него нет к тому природных способностей, крайне трудно, и почти всегда в классе есть дети, которые так и не могут этому научиться самостоятельно. Они обычно читают текст задачи «залпом», а потом пытаются угадывать нужные действия, манипулируя числами и «сверяясь» с выражением лица взрослого, наблюдающего этот процесс (учителя, мамы, бабушки, репетитора).

Для того чтобы помочь ученикам в этой ситуации, учителя обычно пользуются наглядностью: сначала предметно-аналитической (предметы, картинки), а затем более абстрактным ее вариантом (вместо зайцев или яблок используют кружки или квадраты). Использование конкретно воспринимаемого материала помогает ученику осмыслить ситуацию.

Постоянное использование предметного моделирования имеет и отрицательные последствия: как только учитель перестает прибегать к постоянному использованию предметного моделирования задачи (это обычно происходит при переходе к решению составных задач либо в случае работы с двузначными и более данными, моделировать которые «поштучно» весьма утомительно), часть учеников перестает справляться с задачей. Привыкнув к постоянной внешней опоре, даваемой в виде предметной наглядности или картинки, ученик не в состоянии справиться с построением мысленной модели без этой опоры.

Иногда учитель вообще отказывается от каких-либо способов интерпретации условия задачи, делая упор либо на обучение учащихся через запоминание способов решения задач определенного типа (обычно с ориентиром на главное слово или выбор из заранее заготовленных шаблонов нужной структуры краткой записи), либо настойчиво добиваясь от всех учащихся умения решать задачи

«по представлению». Практика показывает, что первый путь ведет к формальному овладению детьми умением решать задачи. Эти дети, столкнувшись с задачей незнакомого типа, обычно не могут с ней справиться. Второй путь приводит к тому, что дети со слабо развитым воображением и математическим «чутьем» обычно оказываются безнадежно отставшими. С другой стороны, не зная, что «представляет» себе ученик в процессе решения задачи, не имея возможности контролировать ход его мысли, учитель никогда не может быть уверен в том, что ученик действительно осмысленно выбирает действие, правильно представляет себе ситуацию задачи.

Рассмотрим ситуацию, типичную для 1 класса. На уроке предлагается задача:

Во дворе гуляло 10 детей. 3 из них были мальчики, остальные — девочки. Сколько было девочек?

Ученик (быстро отвечает). Девочек 7.
Учитель. Какое действие ты выполнил?
Ученик. Я прибавил.
Учитель. Что к чему прибавил?
Ученик. Я прибавил к семи три.
Учитель. Почему к семи? Я же сказала, что детей было 10.
Ученик. Потому что 7 и 3 это 10.

Из приведенного фрагмента становится ясно, что, хотя ученик дал верный ответ, задачу он фактически не решил: действие не соответствует смыслу связи между данными и искомым. Правильный ответ дан в связи с тем, что к этому времени (2 полугодие) дети хорошо знают состав числа и зачастую пользуются этим знанием при решении простых задач, не утруждая себя осмыслением ситуации, а используя подбор подходящих чисел. Иногда учителя (и родители) считают, что в этом случае ребенок решает задачу «своим способом». Но представим себе, что данная ситуация «достраивается» до составной задачи: «Потом на двор вышли еще 2 девочки. Сколько теперь девочек?»

Если ребенок первое действие выполнил так, как показано выше: 7 + 3 = 10 (д.), то вторым действием он выполнит 10 + 2 = 12 (д.), поскольку результат первого действия есть начало для выполнения второго действия.

Использование приема моделирования уже на этапе подготовки к введению задачи и в процессе обучения решению простых задач приводит к тому, что в дальнейшем ребенок будет использовать моделирование как обобщенный способ действия в процессе решения математической задачи любого типа. Тем самым снимется необходимость в выработке особых подходов к задачам разного типа, в том числе простым и составным. Обученный моделированию как основному приему решения задач, понимая процесс решения как перевод модели одного вида в модель другого вида, при котором структурные связи остаются неизменными, а изменяется только способ описания модели, ученик легко использует этот прием при решении задач разных типов.

2. Приемы моделирования при обучении решению простых задач

Подготовительным этапом по формированию у ребенка умения моделировать ситуацию задачи, а затем описывать ее с помощью математических символов является обучение выполнению действий с предметными совокупностями таким образом, чтобы действия ребенка соответствовали смыслу ситуации, предлагаемой условием задачи. То есть самым простым способом моделирования задачи является моделирование на предметной наглядности. Этим способом учитель может пользоваться на начальных этапах обучения решению задач, поскольку в этот период особенно важно правильное понимание смысла действия, а смысл действия удобнее всего проиллюстрировать наглядно. Такое моделирование является доступным практически всем детям, и они с удовольствием пользуются им самостоятельно. Если при использовании этого приема моделирования исключается возможность пересчитывания, такая работа является первым шагом на пути обучения ребенка общему умению решать задачи.

Рассмотрим задачу:

В аквариуме плавали рыбки. Когда 3 рыбки вынули, там осталось 6 рыбок. Сколько рыбок было в аквариуме сначала?

Обычно такие задачи вызывают у детей затруднения, так как слова «осталось», «вынули» ассоциируются у них с уменьшением, а потому дети могут предложить такое решение: 6 – 3 = 3.

Наглядное предметное моделирование будет особенно полезным. Сделать это можно следующим образом. Учитель складывает в небольшую коробку стопку открыток с рыбками так, чтобы дети не смогли их пересчитать.

Один ученик берет из коробки 3 открытки. Другой ученик пересчитывает оставшиеся открытки. *(Их 6.)*

Учитель спрашивает первого ученика:

— Сколько рыбок ты взял? *(3)*

— А сколько рыбок осталось? *(6)*

— Что нужно сделать, чтобы узнать, сколько их было в коробке сначала? *(Нужно 3 положить обратно в коробку.)*

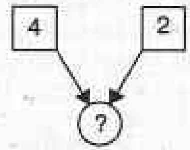
— Каким же действием мы обозначим то, что выполнили? *(Сложением.)* Запишем действие: 6 + 3 = 9.

Проведенное таким образом предметное моделирование позволяет после решения данной задачи провести проверку наиболее адекватным для этого периода обучения способом: дети пересчитывают все открытки, вынимая их из коробки, и убеждаются в правильности найденного ответа.

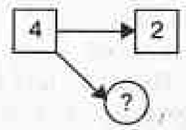
Предметное моделирование — лучший способ организации деятельности учеников на этапе формирования понятия о смысле арифметического действия. Однако пользоваться этим приемом постоянно и на этапе формирования умения решать простые задачи не стоит по причинам, которые были приведены выше. Целесообразнее постепенно заменить предметную наглядность другим способом моделирования простой задачи — *схематическим моделированием* (упрощенный вариант графической модели).

Поскольку на этом этапе модель должна помочь учителю научить ученика правильному ходу мысли при выборе действия, она должна визуально соответствовать характеру этого действия, отражать структурные связи между его компонентами (сложение — объединение двух множеств, не имеющих общих элементов; вычитание — удаление части множества).

В предлагаемом способе схематического моделирования схема, соответствующая действию сложения, выглядит так:



Схема, соответствующая действию вычитания, выглядит так:



Такой рисунок предельно прост в исполнении, посилен для любого ребенка, нагляден и, кроме того, вызывает у детей положительные эмоции: дети с удовольствием составляют схемы из готовых деталей на фланелеграфе (карточек с цифрами и стрелок из бархатной бумаги), рисуют их на доске и в тетради без затруднения, поскольку для этих рисунков достаточно того уровня умения рисовать, которым обладает даже самый слабо подготовленный ребенок шести лет.

Главным достоинством такой схемы с математической точки зрения является то, что она визуально и по смыслу точно отражает характер операций сложения (объединения) и вычитания (удаление части).

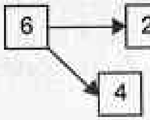
Такая схема удовлетворяет также всем требованиям, предъявляемым к модели: отражает количественные соотношения ситуации, предлагаемой в задаче, показывает в явном виде связи между данными и искомыми, что позволяет ученику легко сориентироваться в выборе действия. Объясняя свои действия при составлении схемы, ученик привыкает описывать ход мысли словами, что является базой для формирования умения анализировать задачу (а также развития словесно-логического мышления).

Для формирования умения составлять схему действия полезны такие упражнения:

На полке стояли 6 книг, две книги девочка взяла. Осталось 4 книги.

Учитель предлагает детям записать этот рассказ с помощью математических символов. Дети записывают равенство: 6 – 2 = 4.

— Я запишу этот рассказ по-другому. Как вы думаете, будет эта запись соответствовать нашему рассказу? *(Да.)*



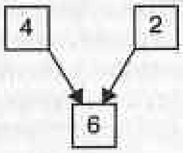
— Можно ли по этому рисунку (назовем его схемой) составить другой рассказ — про морковки, про зайчиков, про солдат..?

При обсуждении вариантов, предлагаемых детьми, их внимание обращается на то, что все рассказы похожи друг на друга по смыслу изменений (удаление части множества). Проводя работу со схемой для разбора ситуации простых задач, очень удобно пользоваться фланелеграфом: из отдельных деталей (чисел на карточках и стрелок из бархатной бумаги) можно собрать схему любой ситуации.

Затем учитель спрашивает:

— Можно ли составит по этой же схеме такой рассказ: «Ваня нашел 2 гриба, а Петя — 4. Вместе у них 6 грибов».

Дети обычно сразу чувствуют разницу между этими рассказами и обращают внимание *на направление стрелок в схеме*: схема, соответствующая процессу объединения, не может содержать стрелок, направленных наружу. Дети говорят обычно: «Нельзя, потому что этот рассказ *(на вместе)*. В процессе обсуждения составляется схема другого вида, причем эта работа вызывает у детей большой интерес, воспринимается как своеобразная игра. Схема, моделирующая объединение, выглядит так:



Затем предлагается этот же рассказ записать с помощью математических символов: 4 + 2 = 6.

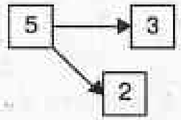
Можно поступить иначе: предложить детям сразу две готовые схемы на доске и спросить, какую они выберут к предложенному рассказу, а затем обсудить разницу между схемами. После этого следует проиллюстрировать тот же рассказ на наборном полотне, на фланелеграфе.

— Покажите, какие грибы нашел Ваня? Какие — Петя? Что нужно сделать, чтобы узнать, какие грибы они собрали вместе? *(Надо к Петиным придвинуть Ванины или наоборот.)*

— Каким действием можно записать то, что мы выполнили? *(Сложением.)*

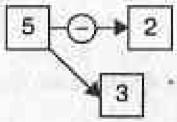
Так, упражняясь в течение нескольких уроков в переводе реальных ситуаций на язык схем, а затем символов, и обратно, ученик постепенно постигает при этом главное: смысл происходящих изменений не зависит от способа описания, одно и то же событие можно описать с помощью различных символов (цифр, знаков, квадратиков, стрелок).

Основное внимание следует обратить на то, чтобы ученики научились описывать ситуацию с помощью равенства, переводить схему в равенство и равенство — в схему. Так, по схеме:

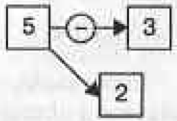


можно составить два равенства, т. е. нужно ввести в схему знак действия. В зависимости от того, где мы его поставим, получим запись действия. Соответственно изменится и условие (и наоборот). Например:

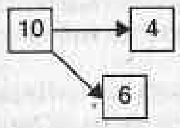
Было 5 квадратов. Из них 2 красных, а 3 синих.
Запись: 5 – 2 = 3

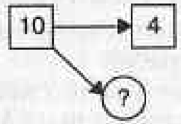


Было 5 квадратов. Из них 3 синих, а 2 красных.
Запись: 5 – 3 = 2

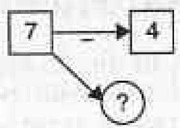


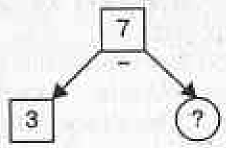
Дети очень легко и быстро усваивают данную символику и через 2—3 урока свободно читают любую из приведенных схем. Если работу по формированию понятия о конкретном смысле действий сложения и вычитания сопровождать не только выполнением упражнений с предметными совокупностями, но и научить детей переводу реальной ситуации на язык схематической записи, то в дальнейшем ввести понятие «задача» можно также сразу с опорой на схему. Делается это следующим образом. Учитель предлагает составить рассказы по двум схемам:

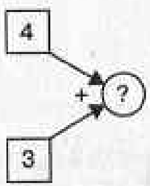


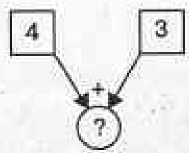


Первая схема уже привычна, составить по ней рассказ детям несложно. Вторая же схема вынуждает ввести вопрос: «Сколько?..» и тогда уже рассказ превращается в задачу. Поскольку структурные связи в схеме не изменились, арифметическое действие, соответствующее ситуации «на удаление», по-прежнему ассоциируется со схемой такого вида. Знак действия на схеме можно обозначить:









При этом знак действия должен появляться на схеме только *после расстановки стрелок*: стрелка ведет за собой знак. Поэтому, с одной стороны, структура схемы соответствует математическому смыслу ситуации (объединение, удаление, увеличение на ...), а с другой, — направляя ход мысли ребенка, помогает на следующем шаге составить символическую (математическую) запись действия.

Рассмотрим задачу:

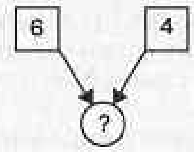
Дети посадили у школы 6 липок и 4 березки. Сколько всего деревьев посадили у школы?

Обычно такие задачи не вызывают у детей затруднения, так как слова «вместе», «всего» ориентируют их на объединение данных в условии множеств предметов. Составляя на фланелеграфе или рисуя на доске схему к такой задаче, учитель полностью предоставляет всю деятельность ребенку у доски. Независимо от того,

насколько хорошо ребенок пишет или читает, умеет ли писать на доске — числа, стрелки и знаки используются изображенные на карточках, крепятся они либо на фланелеграф, либо на доску. Учитель предлагает ученику сначала обозначить числами 6 липок и 4 березки, а затем спрашивает:

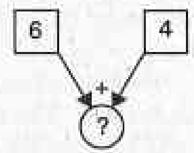
— Знаем ли мы, сколько всего деревьев посадили дети у школы? *(Нет, не знаем.)*

— Давайте обозначим эти деревья знаком ? А теперь покажите стрелками, какие деревья посажены у школы. *(Ученик ставит стрелки.)*



— Какое же действие мы должны выполнить, чтобы ответить на вопрос задачи? *(Мы должны прибавить, сложить.)*

На схему прикрепляется (рисуется) знак и она приобретает вид:



Записывается решение: 6 + 4 = 10 (д.).

Рассмотрим еще одну задачу:

Юра увидел на березе 7 грачей. Потом 3 грача улетели. Сколько грачей осталось на березе?

Такая задача тоже не будет вызывать трудностей при составлении схемы, так как в тексте имеется слово «улетели». Слова «улетели», «унесли», «продали» и т. п. прямо ориентируют детей на удаление части, уменьшение исходного множества предметов.

Работу можно провести следующим образом: после чтения текста задачи учитель предлагает ученику зафиксировать ее данные на фланелеграфе (на доске).

— Сколько было грачей на березе? *(7.)*

— Обозначь число грачей цифрой. *(Ученик крепит на фланелеграфе карточку с числом 7.)*

— Сколько грачей улетело? *(3.)*

— Обозначь число улетевших грачей. *(Ученик ставит карточку с числом 3.)*

— Как показать на схеме, что эти грачи улетели? *(Можно показать это стрелкой.)*

— Поставь стрелку так, чтобы было видно, что эти грачи улетели, что их нет. *(Ученик ставит стрелку.)*

— Почему ты поставил стрелку так, а не наоборот? *(Потому, что они улетели, значит, стрелка должна показывать наружу, прочь от семи...)*

— Что спрашивается в задаче? *(Сколько грачей осталось на березе.)*

— Знаем мы, сколько их осталось? *(Нет.)*

— Как это показать на схеме? Какой символ поставить? *(Ученик ставит символ: ?)*

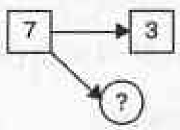
— Покажи на схеме, какие птицы были на березе сначала. *(Ученик показывает на карточку с числом 7.)*

— Покажи птиц, которые улетели. *(Ученик показывает на карточку с числом 3.)*

— Покажи птиц, которые остались, как они у нас обозначены? *(Ученик показывает на карточку со знаком вопроса.)*

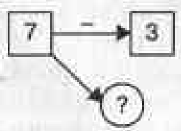
— Как можно показать на схеме, что мы будем искать число оставшихся птиц? *(Можно показать стрелкой.)*

Ученик ставит стрелку, и схема приобретает вид:



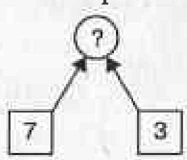
— Как же узнать, сколько птиц осталось, если мы знаем, сколько их было сначала и сколько улетело? *(Надо отнять.)*

На схему прикрепляется знак:



В таком виде схема является одновременно планом решения. Записывается решение: 7 – 3 = 4 (гр.).

После решения этой задачи полезно выполнить такое изменение схемы (карточки просто переставляются, а стрелки разворачиваются):



— Будет ли такая схема соответствовать этой задаче? *(Нет, не будет, потому что стрелки сходятся к вопросу, значит, задачу, изображенную этой схемой, надо решать сложением.)*

— Придумайте задачу или измените условие этой же задачи так, чтобы она соответствовали этой схеме, и решите ее. Запишите решение.

Дети предлагают свои варианты условия, затем записывают решение и находят ответ: 7 + 3 = 10. Такое упражнение способствует формированию обратного хода мысли, т. е. развивает гибкость мышления.

Приведенные выше задачи содержат прямое указание в тексте на выбор действия. Рассмотрим методику обучения приемам схематического моделирования на задачах других типов.

В классе было 10 мальчиков, а в этом году пришли новые мальчики, и всего стало 12 мальчиков. Сколько новых мальчиков пришли в класс в этом году?

В вопросе задачи отсутствует указание на выбор действия, а слова «пришли», «всего стало» часто ассоциируются у детей с увеличением, поэтому они могут предложить решить ее так: 10 + 12 = 22.

Чтобы предупредить эту ошибку, составление схемы нужно начинать одновременно с разбором текста:

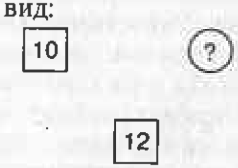
— Сколько мальчиков было в классе? *(Десять.)* Обозначим число этих детей. *(Ученик ставит карточку с числом 10.)*

— Сколько новых мальчиков пришли? *(Этого мы не знаем.)*

— Каким символом обозначим на схеме число новых мальчиков? *(Ученик ставит карточку со знаком вопроса.)*

— Сколько мальчиков стало в классе? *(Двенадцать.)* Обозначим это количество на схеме. *(Ученик ставит карточку с числом 12 ниже первых двух.)*

Схема приобретает вид:

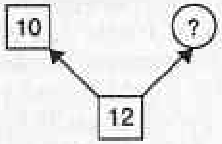


Затем учитель просит ученика показать на схеме, сколько мальчиков стало в классе и как обозначены новые дети. Ученик показывает на соответствующие карточки с числами и символом (движение руки ребенка от числа 12 к вопросу: ученик движением руки как бы предваряет направление стрелки, и это движение рука уже будет «помнить»).

— Как показать с помощью стрелки, что из всех мальчиков в классе нам нужны только те мальчики, которые вновь пришли? *(Ученик ставит стрелку.)*

— Как показать с помощью стрелки, что количество мальчиков, которые раньше были в классе, уже известно и их учитывать не нужно?

Ученик ставит стрелку:



— Если мы знаем, сколько мальчиков в классе теперь и сколько их было раньше, можно ли узнать, сколько их пришло вновь? *(Да, можно. Надо отнять.)*

На фланелеграфе крепится знак действия и записывается решение:

12 – 10 = 2 (м.).

Фактически последний вопрос дублирует схему, которая в таком виде является планом решения, но он полезен, так как приучает детей к грамотному построению вопроса «от данных».

Если учитель планирует самостоятельное решение задачи по схеме, то после ее составления учащимся предлагается записать решение в тетради. При этом учитель не задает вопроса, наводящего на выбор действия, а учащиеся руководствуются только схемой. Пояснение выбора действия проводится учащимися после записи решения.

Из коробки взяли 6 красных карандашей и 4 синих. Сколько карандашей взяли из коробки?

Наличие в тексте слов «взяли» может сориентировать ребенка на действие вычитания. Работа со схемой исключит эту ошибку. Удобно использовать *прием чтения текста по частям с последовательным фиксированием данных.* Учителю непривычна эта рекомендация, поскольку методический стереотип действий требует сначала прочитать задачу целиком, чтобы дети «представили ситуацию». О возможностях детей этого возраста правильно представить ситуацию по словесной модели мы говорили в предыдущему параграфе. Используя прием «неполное чтение», учитель экономит время урока и сразу после первого прочтения получает на доске схему ситуации, с которой можно работать с опорой на визуальное восприятие.

Читаем с детьми текст только «до первого данного», его сразу фиксируем карточкой на фланелеграфе. Затем читаем «до второго данного», фиксируем его на фланелеграфе. Читаем вопрос, фиксируем на фланелеграфе символ вопроса. Таким образом, после первого прочтения на доске уже есть «каркас» схемы. Анализ можно провести по этому «каркасу»:

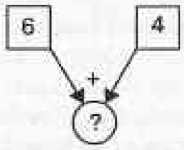
— Что требуется узнать в задаче? Какой знак на схеме означает все взятые карандаши?

— Покажите, какие карандаши взяли сначала? Где они теперь? *(Ребенок показывает рукой направление от числа 6 к знаку вопроса, это направление закрепляется постановкой стрелки.)*

— Покажите, какие еще карандаши взяли? Где они теперь? *(Аналогично ставится вторая стрелка.)*

— Какое действие обозначено стрелками на схеме? Почему сложение? *(Стрелки сходятся к вопросу.)*

Ставится знак действия и решение может быть записано самостоятельно.



Отметим еще одно преимущество такого подхода: поскольку читать «за один раз» ребенку приходится очень маленький кусочек — буквально 3—4 слова, к этой работе можно сразу привлекать любого ребенка, даже плохо читающего — такой «кусочек» сумеет прочитать и понять даже он. Таким образом, удается разорвать «замкнутый круг»: для чтения задачи учитель обычно привлекает сильных, хорошо читающих детей, в результате именно они каждый раз дополнительно тренируются в чтении и осмыслении текста задачи, хотя и так обычно хорошо с этим справляются.

Среди простых задач, решению которых обучаются учащиеся, большую долю составляют задачи, в которых требуется либо увеличить (уменьшить) множество на несколько единиц, либо сравнить два множества для выяснения, которое из них больше (меньше) и на сколько (разностное сравнение). Рассмотрим задачи этого вида.

Подготовительная работа к задачам такого вида обычно проводится на предметной наглядности: поставь кружков на два больше, чем квадратов, на 3 меньше... и т. д. В процессе выполнения таких заданий учащиеся должны усвоить смысл понятий «больше на» и «меньше на». Психологически трудность решения задач такого вида заключается в том, что явно задано только одно множество, второе же следует восстановить по его характеристическому свойству: оно «больше данного на...» (меньше на...). Поэтому, выполняя задание «Положите на парту 3 квадрата, а кружков на 2 больше, чем квадратов», следует основное внимание обращать на первый этап этого сравнения: кружков надо сначала положить *столько же*, сколько и квадратов, а потом увеличить их количество на 2 (*столько же и еще 2*).

В процессе выполнения таких заданий учащиеся усваивают, что «увеличение на» связано со сложением, а «уменьшение на» связано с вычитанием.

Спустя несколько уроков вводятся схемы, соответствующие ситуациям «уменьшение на» и «увеличение на». Для того, чтобы процедура ввода новых схем не была однообразной, их можно ввести через игру «Математическая машина»:

В пустом квадратике помещаются числа, которые «машина» уменьшает или увеличивает. Эти «машины» удобны на устном счете при отработке вычислительных приемов: +1, –1, +2, –2... При работе с такой схемой важно обсудить с учениками вопрос о том, что стрелка в данном случае показывает на то число, которое надо найти в результате. Это число обозначено символом: ? Используя эти схемы, учитель предлагает задания: «Найдите соответствующее число для 3, 2, 5 по заданному принципу».

Рассмотрим задачу, соответствующую ситуации «уменьшение на»:

В саду собрали 5 кг смородины, а малины на 2 кг меньше. Сколько килограммов малины собрали в саду?

После чтения задачи ее данные фиксируются в схеме:

— Сколько собрали смородины? *(5 кг.)* Давайте это запишем (обозначим).

Ученик либо ставит на фланелеграфе карточку с числом 5, либо делает на доске запись:

— Сколько собрали малины? *(Этого мы не знаем.)* Давайте обозначим на схеме, что это нам неизвестно.

Ученик ставит карточку со знаком вопроса или рисует: ?

— Что требуется найти в задаче? *(Сколько собрали малины.)* Покажите стрелкой, что нужно найти:

— Что сказано в условии про количество малины? *(Сказано, что малины на 2 кг меньше, чем смородины.)*

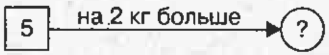
Учитель показывает детям, как это дополнительное условие надписать над стрелкой:

— Почему стрелка показывает на знак вопроса? *(Потому что это у нас малина, а ее на 2 кг меньше, чем смородины.)*

— Как найти, сколько собрали малины? *(Надо отнять: 5 – 2.)* Схему можно дополнить знаком:

В таком виде схема выполняет роль плана решения. После записи решения и ответа полезно провести дополнительную работу, используя возможности работы со схемой.

Можно, например, предложить детям такую схему:



— Похожа ли задача, решаемая с помощью этой схемы, на предыдущую? Чем эти задачи похожи, чем различаются?

Такое упражнение способствует формированию *умения сравнивать*: находить общее и различное. Можно отметить, что дети легко «расшифровывают» язык схем, им даже не требуются к этому времени обучающие объяснения учителя, они сами легко догадываются о смысле используемой схематической символики (что полностью соответствует психологическому «портрету» шестилетки: символизация окружающей действительности — характерное свойство их восприятия и мышления).

Использование на задачах такого типа *приема изменения данных* (следует изменять данное, записанное в квадратике, оставляя неизменным характеристическое свойство, помогающее найти неизвестное число) является подготовительным к формированию понятия о функциональной зависимости. При выполнении такой работы особенно важно обращать внимание детей на следующие моменты:

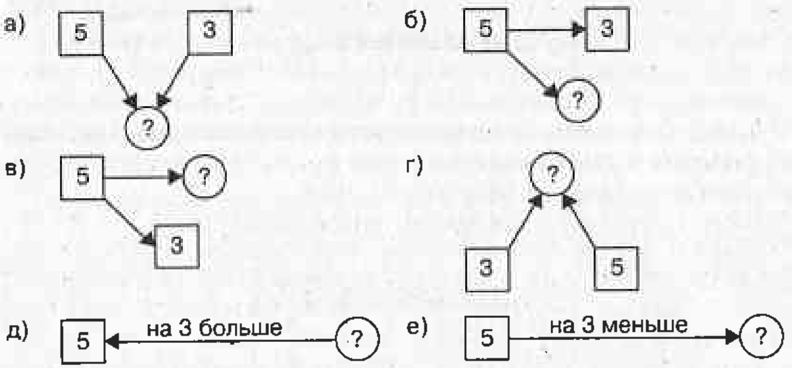
1) Число в «окошке» можно менять как угодно, если правило нахождения неизвестного задано словами «на ... больше».

2) Если правило задано словами «на ... меньше», необходимо следить, чтобы уменьшаемое было не меньше вычитаемого (фактически такая работа является исследованием области допустимых значений).

3) Если задано правило, то всегда можно найти число, соответствующее данному, и оно всегда будет больше на (меньше на...) столько, на сколько указано в правиле.

Время от времени полезно предлагать детям задания, требующие от них не только составления схем по текстовому условию или придумывания задач по предложенным схемам, но и задания на классификацию с использованием схем.

Для этого учитель рисует на доске несколько схем, структурно различных, но с одинаковыми числами:



Детям по одной предлагаются тексты задач и по мере чтения текстов им нужно выбрать схему, помогающую решить задачу, объясняя при этом свой выбор.

1. У Вани было 3 тетради в клетку, а 5 в линейку. Сколько у него было тетрадей? *(Схемы а, г.)*

2. У Вани было 5 тетрадей. 3 из них были в клетку, а остальные в линейку. Сколько тетрадей было в линейку? *(Схемы б, в.)*

3. Папа купил тетради. 3 тетради он отдал Ване, 5 оставил себе. Сколько тетрадей купил папа? *(Схемы а, г.)*

4. У Вани было 5 тетрадей в клетку, а в линейку на 3 меньше. Сколько тетрадей было в линейку? *(Схема е.)*

Так как в схемах использованы одинаковые числа, для распознавания подходящей к каждой задаче схемы ученик должен обращать внимание на характер связей между данными искомыми. Умение обращать внимание прежде всего на характер этих связей является базой для формирования общего умения решать задачи.

Рассмотрим последний вариант простых задач на вычитание.

Задачи на разностное сравнение двух множеств в учебниках относят обычно на более поздний период, предлагая решать их значительно позднее задач типа: «увеличить на...», «уменьшить на...», хотя психологически они более просты для понимания: в них сравнивается два явно заданных множества. Схема к ним выглядит так:

Основная трудность для учащихся при решении задач данного вида заключается в том, что все они решаются с помощью действия вычитания (хотя в вопросе может быть и «на сколько больше»

и «на сколько меньше»). Прежде чем приступить к решению таких задач, учитель должен провести большую подготовительную работу с привлечением предметного наглядного материала. Такую работу следует проводить параллельно с подготовительной работой к решению задач на увеличение и уменьшение числа на несколько единиц, так как задачи этих видов являются взаимообратными.

Полезны такие упражнения с использованием модели числового луча или числового ряда:

У мухи 6 ног, а у паука на 2 ноги больше. Сколько ног у паука?

Учитель предлагает показать на числовой оси отрезок, соответствующий количеству ног у мухи. Ученик помечает его дугой.

— Что нужно сделать, чтобы показать на рисунке, что у паука ног на 2 больше? *(Добавить еще 2 единицы.)*

Ученик дополняет рисунок, показывая дугой еще 2 единицы.

— Сколько ног у паука? *(8.)*

Задача решена с опорой на модель числовой оси (или числовой ряд). Ее решение фиксируется в записи: $6 + 2 = 8$.

У кого ног больше: у двух собак или у одного паука?

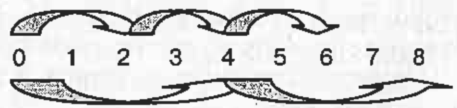
Учитель предлагает провести аналогичную работу с использованием числовой оси (или числового ряда).

Сравнивания длины отрезков числовой оси, дети записывают решение: $4 + 4 = 8$ — ног у двух собак; $8 = 8$.

Ответ: ног одинаково у двух собак и у одного жука.

У кого ног больше у трех кур или у двух собак?

Соотнеся оба количества с полученными схематическими рисунками, дети могут дать ответ на вопрос задачи:



(У двух собак ног больше.)

— Почему вы думаете, что у двух собак ног больше? *(Их 8, отрезок на оси длиннее.)*

— На сколько их больше? *(На 2.)* Как и вы это определили?

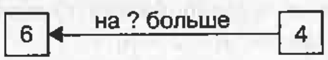
Ответы могут быть разными: видно по рисунку, 8 больше 6 на 2, 8 это 6 и 2. Важно, чтобы выполнение заданий такого вида сопровождалось работой с моделью. Дело в том, что к тому моменту, когда начинают решать такие задачи, дети уже хорошо знают состав числа и часто дают ответ автоматически, не задумываясь над проблемой выбора действия. Образ процесса сравнения как сравнения отрезков числовой оси (или числового ряда) будет фиксироваться у ребенка и закрепляться как визуально, так и через движение руки (по дуге или по оси), и закрепляться записью действия. Такие упражнения являются подготовительными и для введения схемы.

У клоуна 6 колец и 4 шляпы. На сколько колец больше, чем шляп?

После чтения (или во время чтения) задачи ученик, вызванный к доске, фиксирует ее данные:

— Чего больше, колец или шляп? *(Колец больше, их 6.)*

— Давайте покажем стрелкой, что требуется найти, на сколько колец больше. Ученик рисует стрелку и подписывает требование. Схема приобретает вид:

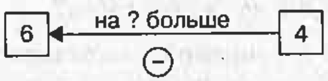


— На сколько колец больше? *(На 2.)*

— Как нашли? *(Отняли: 6 – 4.)*

— С помощью какого действий решается данная задача? *(С помощью вычитания.)*

Сама структура схемы уже не позволит ребенку бездумно выполнить сложение, а заставить задуматься и вспомнить, как записать сравнение чисел. Можно добавить к схеме знак:



В таком виде она выполняет роль плана решения.

Основной факт, который должны осознать дети, заключается в том, что для нахождения результата при сравнении чисел используется вычитание. Поэтому после решения данной задачи полезно предложить следующее задание.

Учитель рисует на доске схему:

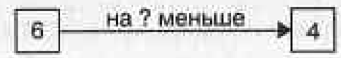
и проводит, например, такую беседу:

— Могу ли я использовать к этой схеме условие предыдущей задачи? *(Да.)*

— Можно ли поставить тот же вопрос к этой схеме? *(Нет, стрелка показывает на меньшее число.)*

— Как должен звучать вопрос к такой задаче? *(На сколько меньше шляп, чем колец?)*

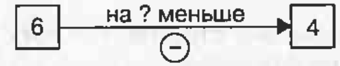
Учитель дополняет схему:



— На сколько шляп меньше? *(На 2.)*

— С помощью какого действия можно это найти? *(Вычитания.)*

Схема дополняется знаком и записывается решение: 6 – 4 = 2 (ш.).



При решении таких задач анализ выбора действия был проведен после того, как дети дали ответ. На этапе обучения решению простых задач такое нарушение последовательности этапов решения задачи вполне правомочно. Причины заключаются в том, что, решая простую задачу с вычислениями в пределах 10, дети зачастую пользуются знанием состава чисел и дают ответ, не задумываясь над выбором действия. Не мешая ребенку быстро решить задачу (это поддерживает положительное отношение ученика к процессу решения), учитель помогает ему проанализировать готовые решения и обосновать выбор действия. В более сложных задачах этот этап, естественно, проводится раньше, так как цель анализа — выбор действия.

На столе 8 стаканов, это на 3 больше, чем чашек. Сколько чашек на столе?

Задачи такого вида представляют для учеников очень большую трудность, так как слова «на 3 больше» не соответствуют смыслу действия, которым решается задача. Такие задачи, где смысл действия не совпадает с имеющимися в условии характерными словами («больше», «отдали», «вынесли», «меньше» и т. д.), называются *косвенными.* Для того чтобы правильно выбрать действие, при их решении надо осознать смысл связей между данными и искомым, абстрагируясь от используемой в тексте лексики.

Основными приемами при решении таких задач являются *моделирование* и *переформулировка* в процессе анализа:

— О чем говорится в задаче? *(О стаканах и чашках.)*

— Сколько стаканов на столе? *(8.)*

Ученик обозначает число стаканов карточкой с цифрой 8.

— Сколько чашек? *(Это неизвестно.)*

Ученик обозначает число чашек символом ?

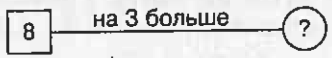
На доске появляется «каркас» схемы: $\boxed{8}$?

— Что сказано о чашках? *(О них ничего не известно, их число надо найти.)*

— А что сказано о стаканах? *(Сказано, что их на 3 больше, чем чашек.)*

— Я дополню схему этой информацией, а вы скажете, чего еще не хватает в нашей схеме.

Учитель дополняет схему:

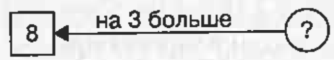


Дети замечают, что на этой схеме нет стрелки, поэтому непонятно, к чему относится запись «на 3 больше».

— Чего было «на 3 больше»? *(Стаканов.)*

— Давайте обозначим на схеме, что слова «на 3 больше» относятся к стаканам.

Ученик обозначает направление стрелки:



— Теперь видно, какое число «на 3 больше»? *(Видно.)*

— Если это число (учитель показывает рукой на число 8) на 3 больше, то что можно сказать об этом числе (учитель показывает на число, обозначенное знаком вопроса)? Что можно сказать о числе чашек? *(Оно должно быть на 3 меньше.)*

— Если я изменю схему таким образом (учитель рисует рядом новую схему), какое условие нужно будет написать над стрелкой:

(На 3 меньше.)

В результате *перформулировки задачи* схема приобретает знакомый вид: стрелка указывает на число, которое надо найти, а информация над стрелкой указывает на способ его отыскания (задача в таком виде превращается из косвенной в прямую), что помогает детям легко справиться с задачей:

— С помощью какого действия можно его найти? *(Вычитанием: 8 – 3.)*

Этот прием на первых порах помогает детям осознать возможность перевода обратного хода мысли в прямой и наглядно отразить этот перевод в виде изменения в схеме.

Рассмотрим еще одну косвенную задачу:

Саша купил булочку за 7 рублей и у него осталось 8 рублей. Сколько рублей было у Саши?

При работе над задачей можно использовать *прием чтения по частям*: схема составляется не после чтения текста, а во время его чтения. Например, один ученик читает: «Саша купил булочку за 7 рублей».

Другой ученик рисует или ставит карточку: $\boxed{7}$

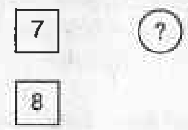
Ученик читает дальше: «У него осталось 8 рублей».

Ученик у доски ставит карточку: $\boxed{8}$

— Сколько рублей было у Саши? *(Этого мы не знаем, значит обозначим:* (?) *)*

Обозначения данных и искомого лучше сразу разносить: слева — данные, справа — искомое (или сверху — данные, ниже — искомое и т. п.). Тогда схема визуально отражает и структуру задачи: условие с данными и вопрос с искомым.

Таким образом, к тому моменту, как задача прочитана в первый раз, в тетради (на доске) появляется «каркас» схемы:



Разбор задачи выполняется уже *по схеме* (к тексту обращаться только в случае каких-то неясностей).

— Что обозначает число 7? Число 8?

— Какие деньги мы обозначили знаком вопроса?

Анализ удобнее всего выполнять от данных к вопросу:

— Эти (учитель показывает на карточку с числом 8) деньги у Саши были сначала? *(Да.)* Как это показать с помощью стрелки?

— А эти (показывает на карточку с числом 7) деньги у него были? *(Да.)* Как поставим стрелку?

Теперь схема имеет вид:

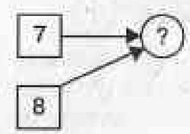


Схема такого вида соответствует операции сложения, поэтому можно задать вопрос: «С помощью какого действия найдем, сколько денег было у мальчика сначала?»

Таким образом, разбор текста и анализ задачи выполняется с опорой на схему, что облегчает детям работу и занимает меньше времени. Особенно помогает схема слабым ученикам, тем, которые не могут решать задачу по представлению. Знак действия ставится *после* расстановки стрелок, т. е. направление стрелки, показывающее направление действия, «ведет за собой» знак действия, что приучает ученика не связывать знак со словами «больше», «осталось», а ориентироваться на логику и смысл ситуации. Примечательно, что использование такой схематизации особенно эффективно в слабом классе, в том числе в классе коррекционного обучения и классе для детей с ЗПР.

3. Схематическое моделирование при обучении решению составных задач

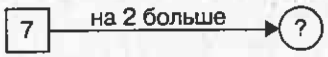
Рассмотрим возможность использования схем при знакомстве с составной задачей и обучении решению составных задач на сложение и вычитание в 1 и 2 классе.

Использование схематического моделирования рассмотренного вида позволяет построить процесс знакомства с составной задачей на основе частично-поискового метода: при таком подходе достаточно после решения простой задачи задать еще один вопрос, и схема приобретает новый вид, моделируя ситуацию составной задачи.

Рассмотрим этот прием на задаче:

Саша нашел 7 грибов, а Петя — на 2 гриба больше. Сколько грибов у Пети?

После составления схемы и записи решения учитель спрашивает:



— А если Саша и Петя на обратном пути сложили все грибы в одну большую корзину, можно узнать, сколько в ней оказалось грибов? *(Да, можно, если узнать, сколько грибов положил туда Петя и сколько Саша.)*

— Давайте обозначим эту корзину на схеме. Знаем мы сразу сколько в ней грибов? *(Нет.)*

— Обозначим ее символом ?

— Покажите, какие грибы положили в нее дети.

Ученик у доски движением руки показывает, какие грибы положены в корзину, и вслед за движением руки рисует стрелки. Схема приобретает вид:

Вторая часть схемы определяет сложение, значит, можно поставить знак: +.

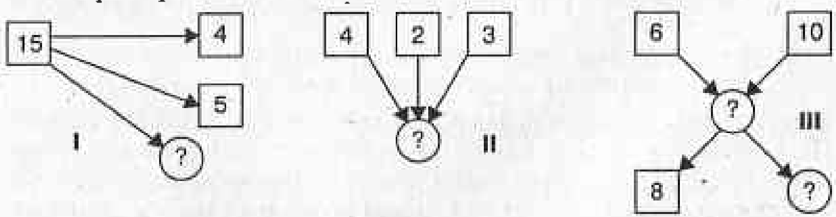
Схематический рисунок такого вида ученики легко переводят в символическую запись решения. При желании на схеме можно проставить порядок действий:

В таком виде схема играет роль *плана решения.* После того, как найден ответ на второй вопрос, учитель обращает внимание детей на тот факт, что до сих пор они таких задач еще не решали. Вводится понятие составной задачи как задачи, для решения которой требуется выполнить больше одного действия.

Использование приема моделирования простой задачи с помощью схемы снимает необходимость готовить ученика к решению составных задач как к чему-то новому. Обученный прежде всего обращать внимание на данные и искомое, на характер и структуру связей между ними, ученик переносит это умение на процесс решения составной задачи. Разница для него только в том, что данных стало больше и характер связей стал более разнообразным.

Уже на первых уроках знакомства с составной задачей детям можно предлагать схемы составных задач, помогая составить по ним задачи и решить их.

Например:



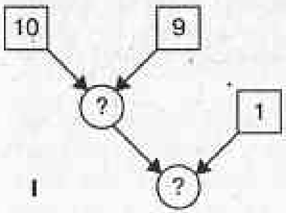
Практика показывает, что дети уже на первых уроках знакомства со схемами составных задач легко «читают» такие схемы, составляют по ним задачи и решают их, записывая при этом решения в виде выражения там, где это соответствует структуре схемы (схемы I и II).

Далее при обучении решению составных задач учитель ориентируется на те же этапы, что и в работе с простой задачей. Умения, сформированные у детей при решении простых задач, получают дальнейшее развитие, становятся более совершенными. Приемы работы с моделью, используемые на каждом этапе работы с задачей, носят более разнообразный и сложный характер.

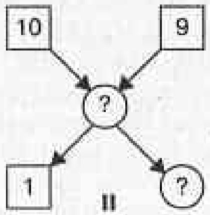
В автобусе ехали 10 человек. На первой остановке в автобус вошли 9 человек, на второй вошел еще 1 человек. Сколько человек стало в автобусе?

В связи с тем, что при решении составной задачи может быть использована новая форма записи ее решения — в виде выражения, при разборе этой задачи может быть использован такой методический прием.

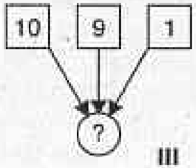
После чтения задачи и разбора ее текста учитель предлагает детям рассмотреть готовые схемы на доске и выбрать ту, которая подходит к данной задаче.



I



II



III

При анализе выбранных схем I и III учитель обращает внимание учащихся на то, что схема I отражает последовательность событий: 9 человек вошли на первой остановке, 1 человек — на второй остановке. Но поскольку все они в конечном счете едут в одном автобусе и в задаче спрашивается «Сколько человек стало в автобусе?», схема III также отражает структуру этой ситуации.

При выборе схем учитель показывает детям две формы записи решения:

1) 10 + 9 = 19 (ч.) и 10 + 9 + 1 = 20 (ч.)
2) 19 + 1= 20 (ч.)

и предлагает определить, какая из форм записи подходит к схеме III, а какая — к схеме I. Схема III определяет форму записи выражением, схема I — по действиям. Такие упражнения на установление связей между структурой схемы и формой записи решения способствуют формированию аналитических способностей: ученик в состоянии проанализировать структуру схемы и соотнести ее со структурой записи решения. Здесь же можно обсудить вопрос о том, какая из схем и, соответственно, приемов записи решения задачи имеют более экономную компактную форму.

После работы над этой задачей полезно обратить внимание учащихся на схему II:

— Почему вы считаете, что эта схема не подходит к данной задаче? *(Стрелка показывает, что 1 пассажир вышел, а не вошел.)*

— Составьте задачу по этой схеме. *(Дети составляют задачу.)*

— Чем похожи эти задачи? *(У них одинаковые данные и одинаковые вопросы.)*

— Чем они отличаются? *(Характером событий, а значит, и решения будут разные.)*

— Зная, что в автобусе было 10 пассажиров и на остановке вошли 9 пассажиров, что можно узнать? *(Сколько пассажиров стало в автобусе после первой остановки.)*

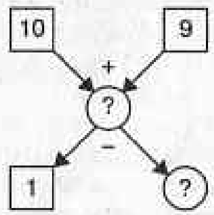
— Какое действие нужно использовать? *(Сложение.)*

Схему дополняют знаком действия.

— Зная, сколько всего пассажиров в автобусе и что один пассажир вышел на следующей остановке, что можно узнать? *(Сколько их осталось.)*

— Какое действие? *(Вычитание.)*

Схему дополняют знаком действия, и в таком виде она выполняет роль плана решения:



Решение данной задачи целесообразно записать и по действиям и выражениям, так как ее схема не имеет ярко выраженного характера, соответствующего той или иной форме записи.

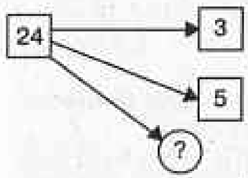
Приведем примеры составных задач:

Девочка купила блокнот за 8 рублей, карандаш за 3 рубля и линейку за 6 рублей. Сколько денег она потратила?

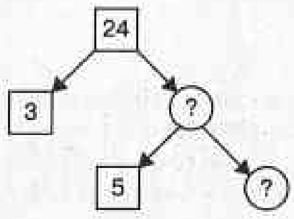
Схема к этой задаче может быть составлена по типу схемы III (см. выше).

В бидоне 24 л молока. Одному покупателю отлили 3 л, другому 5 л. Сколько молока осталось в бидоне?

Схема к этой задаче может быть составлена двух видов:



I



II

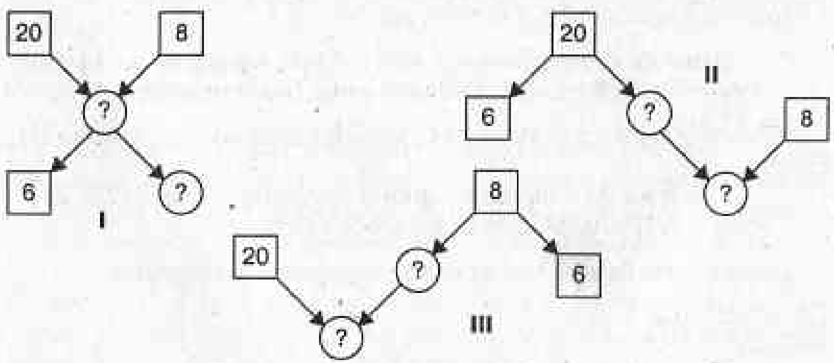
Схема I соответствует записи решения выражением. Схема II отражает последовательность событий (сначала одному покупателю отлили 3л, потом другому — 5 л) и соответствует записи решения по действиям (количество строк записи решения показывает и количество знаков вопроса в схеме).

Решение большинства составных задач в 1—2 классе тесно связано со свойствами арифметических действий (прибавление числа к сумме, вычитание числа из суммы, прибавление суммы к числу, вычитание суммы из числа). Эти свойства позволяют решать составные задачи различными способами.

Утром ушли в море 20 маленьких и 8 больших лодок. 6 лодок вернулись. Сколько лодок должно еще вернуться?

Для того чтобы нахождение разных способов решения данной задачи не превратилось в формальное манипулирование числами на основе свойств арифметических действий, необходимо уделить основное внимание анализу ситуации, которая дана в задаче. При анализе текста главным будет являться вопрос: «Знаем мы, какие лодки возвращались — большие, маленькие или те и другие?» *(Нет. Мы знаем только, что их вернулось 6.)*

После уточнения этого факта можно использовать такой методический прием: учитель открывает на доске три заготовленных заранее схемы и предлагает детям выбрать подходящую к данной задаче. Ученик, выбирающий схему, должен рассказать соответствующую этой схеме версию событий задачи (вернулись только большие лодки, только маленькие, те и другие). Схемы к этой задаче имеют вид:



Этим трем схемам соответствуют три разных способа решения, которые дети составляют после разбора каждой схемы:

I.	II.	III.
1) 20 + 8 = 28 (л.)	1) 20 – 6 = 14 (л.)	1) 8 – 6 = 2 (л.)
2) 28 – 6 = 22 (л.)	2) 14 + 8 = 22 (л.)	2) 20 + 2 = 22 (л.)

Все три решения имеют одинаковый ответ, следовательно задача решена верно.

Можно было использовать и такой методический прием: предложить учащимся не только три готовые схемы, но и сразу три варианта решения. Это упражнение направлено на формирование аналитических способностей: ученики должны соотнести структуру схемы со способом решения и выбрать к каждой схеме соответствующую запись, объясняя логику своего выбора.

Использование приема моделирования при формировании умения решать задачи предполагает в основном синтетический подход к ее разбору. Психологически это обусловлено тем, что в возрасте 6—7 лет развитие способности к синтезу опережает развитие способности к анализу. На этом этапе ребенку ближе и понятнее синтетический подход к задаче («от данных»), который, кроме того, значительно короче, а значит, более доступен. Синтетическая схема, в отличие от аналитической, является прежде всего моделью ситуации, предлагаемой в задаче. В связи с этим она как бы направляет ход мысли. Синтетическая схема обычно отражает ход событий в задаче, приучая ребенка к внимательному изучению ситуации, соблюдению хронологии, помогает выстраивать цепочку рассуждений, следуя за главными событиями, не отвлекаясь на второстепенные детали.

Приведем пример синтетического разбора задачи, сопровождаемого составлением схемы.

Первоклассники заготовили для птиц 6 кг рябины и 4 кг семян арбуза. За зиму они скормили птицам 9 кг корма. Сколько кг корма осталось?

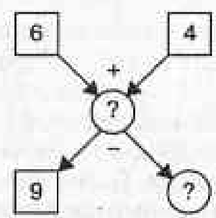
— Что можно узнать, если известно, что дети заготовили рябины 6 кг и арбузных семян 4 кг? *(Можно узнать, сколько корма заготовили всего.)*

— Как это сделать? С помощью какого действия? *(Надо сложить 6 кг и 4 кг.)*

— Что можно узнать, если известно, сколько корма было всего и сколько съели птицы? *(Можно узнать, сколько его осталось.)*

— Как это узнать? *(Надо от всего корма отнять 9 кг.)*

Схема, соответствующая этому разбору, выглядит так:



Характерно, что синтетический разбор обычно сопровождается составлением плана решения, так как при каждом следующем «шаге» используется данное, найденное на предыдущем «шаге».

Приведем аналитический разбор («от вопроса») той же задачи:

— Что нужно знать, чтобы ответить на вопрос задачи? Или: Что нужно знать, чтобы определить, сколько килограммов корма осталось? *(Нужно знать, сколько корма заготовили и сколько скормили птицам.)*

— Известно, сколько скормили птицам? *(Да, 9 кг.)*

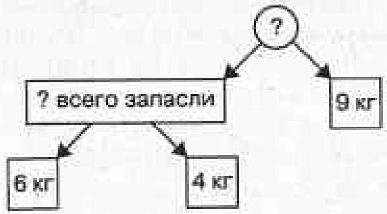
— Известно, сколько корма заготовили? *(Неизвестно.)*

— Что нужно знать, чтобы определить, сколько корма заготовили? *(Нужно знать, сколько заготовили рябины и арбузных семечек.)*

— Известно, сколько было рябины? *(Да, 6 кг.)*

— Известно, сколько было арбузных семян? *(Да, 4 кг.)*

Схема, соответствующая такому разбору, выглядит так:



Чтобы составить план решения, надо вернуться по этой схеме «обратно»:

— Как узнать, сколько корма запасли? *(Сложение.)*

— Как узнать, сколько корма осталось? *(Вычитание.)*

Как видно из приведенного примера, составление аналитической схемы требует хорошо развитого «обратного» хода мысли, высокого уровня сформированности аналитических способностей.

При постепенном переходе от использования предметной наглядности к использованию схемы (абстрактного изображения ситуации, предложенной в задаче) создаются предпосылки и фактически ведется работа по формированию у ребенка умения абстрагироваться: умения, являющегося необходимым для развития математического мышления.

Схема состоит из элементов, смысл которых легко понимается маленькими детьми: кружков, квадратиков, стрелок. Таким образом, схема, с одной стороны, легко выполняется учеником, так как не требует никаких специальных графических умений, а с другой — не требует умения достаточно хорошо писать опорные слова, что необходимо для оформления краткой записи. Такая модель задачи позволяет сделать математические связи и зависимости наглядными для учеников,

причем это относится не только к явным, но и скрытым зависимостям между величинами. Схема является абстрактным изображением той ситуации, которая дана в задаче, она позволяет абстрагироваться от несущественных подробностей, приучает ученика быстро находить главное в задаче (данные, искомое) и тем самым помогает осознать условие и выбрать действие.

Таким образом, схема несет двоякую нагрузку: с одной стороны, она является абстрактной моделью, с другой стороны, схема достаточно конкретна: зримо воспринимаемая, воплощает фактически те мыслительные действия, которые ученик проделывает, моделируя задачу, т. е. является итоговым результатом внутренних действий. Возможность воплотить эти действия и их результат во внешнюю опору для многих учеников служит той самой необходимой ступенькой, поднявшись на которую, они могут двигаться дальше к адекватной мысленной модели ситуации. Наличие схемы на доске или индивидуальной карточке поможет сориентироваться даже слабым учащимся. Анализ проводится, когда схема в первом приближении составлена, что облегчает ученику эту процедуру и резко сокращает затраты времени. Кроме того, готовая схема исключает этап поиска пути решения, так как она сама является схемой способа действия, способа решения. И, наконец, схема является также и средством контроля (самоконтроля), поскольку ребенок всегда может сравнить выполняемые им действия со способом действия, зафиксированным в схеме. Если учесть при этом, что использование приема моделирования (со схемой в качестве модели) помогает формированию таких приемов умственной деятельности как абстрагирование, анализ, синтез, а также способствует формированию внутреннего плана действий у ребенка, то можно с уверенностью утверждать, что использование описанного приема моделирования при обучении решению задач в первом классе будет способствовать развитию мышления, развитию математических способностей.

В настоящее время методисты стали много внимания уделять приему моделирования задачи с помощью различных схем (Н.Б. Истомина, Л.Г. Петерсон и многие другие). Однако во всех случаях идет речь об обучении ребенка использованию сразу графической модели в виде отрезков — так называемой *схемы в отрезках*, где различные совокупности или величины, заданные в задаче, изображаются с помощью отрезков. Безусловно, эти схемы являются очень действенными и, как будет показано ниже, фактически универсальными при обучении ребенка решению задач. Но сама форма этой схемы является очень абстрактной и слишком условной для понимания многих шестилетних школьников. У учителя обычно уходит много сил на обучение детей этому способу моделирования уже с 1 класса. Возможно, именно поэтому новый вариант учебника математики Н.Б. Истоминой для четырехлетней школы, активно использующий схему в отрезках для обучения решению задач, предполагает знакомство с задачей только во 2 классе. Схема в отрезках, даже предъявляемая ребенку в учебнике готовой, не дает ученику, если он заранее не обучен специально вычерчиванию и чтению этой модели, визуально сразу схватываемую и понятную с первого взгляда картину выбора действия.

Учителя уже обращают внимание на то, что наличие в учебниках большого количества готовых схем в отрезках ко многим задачам значимо не влияет на уровень сформированности умения решать задачи у школьников. Это объясняется тем, само умение строить графическую модель к задаче является базовым для обучения ее решению. Формировать это умение следует постепенно повышая уровень абстрактности используемой модели, переход от предметного моделирования сразу к абстрактной схеме в отрезках для многих детей слишком сложен. Опыт показывает, что даже для учителя составление схемы в отрезках для задач чуть более повышенного уровня сложности требует специального обучения.

Предлагаемый нами для 1 класса вариант схемы является намного более простым как в исполнении, так и для понимания ребенка, и не требует для начала даже обучения вычерчиванию отрезков и пониманию процесса суммирования отрезков, что необходимо для работы со схемой в отрезках. Использование этого варианта схемы позволяет знакомить детей с задачей в соответствии с программой традиционного учебника уже в начале 1 класса.

4. Обучение детей использованию схемы в виде отрезков при решении задач

При обучении учащихся построению вспомогательных графических моделей при решении задач важно обеспечить постепенный, но своевременный переход от использования одних видов моделей к другим: от более конкретных к менее конкретным. К концу 1 класса или во 2 классе имеет смысл постепенно перевести детей на использование схемы в отрезках. Время этого «перевода» учитель определяет, ориентируясь на конкретную ситуацию в классе, поскольку схема в отрезках становится необходимостью только при знакомстве с задачами на деление. Все задачи, содержащиеся в учебниках до этого времени позволяют использование рассмотренной ранее рисованной схемы.

Проиллюстрируем на примере одной и той же задачи различные способы ее моделирования.

У Кати 7 книг на полке, а в портфеле на 5 книг меньше. Сколько всего книг у Кати?

Решая задачу, ученики могут воспользоваться условным рисунком: на одной строке рисуют 7 кружочков, на другой — столько же, затем, руководствуясь текстом условия, 5 из них зачеркивают. Оставшиеся незачеркнутыми кружки дают число книг в портфеле. Арифметическое действие можно не выполнять, так как ответ можно сосчитать.

Использование такого рисунка фактически является дублированием соответствующих предметных действий. Такая модель наиболее близка к конкретной наглядности.

Другой вариант использования приема моделирования — это изображение ситуации задачи с помощью схемы:

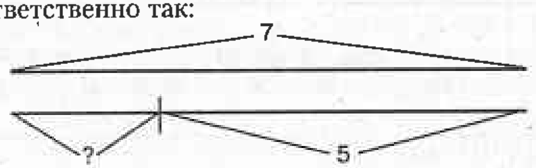
Данная схема отражает отношения между данными и искомым, которые описаны в задаче, но не дает возможности найти ответ пересчетом. Чтобы ответить на вопрос задачи, необходимо выполнить действие. Такая модель является более абстрактной.

Еще один вариант схематического изображения отношений между данными и искомым — это чертеж «в отрезках». Такой чертеж может быть двух видов:

1) длина отрезка «в клеточках» соответствует данным задачи, в этом случае ответ задачи можно получить пересчетом;

2) длины отрезков условны и отражают только отношения между данными и искомым, а численное их значение записывается с помощью цифр: найти искомое в этом случае становится возможным лишь выполнив те или иные арифметические действия над указанными на чертеже числами.

К приведенной выше задаче этот чертеж в виде отрезков выглядел бы соответственно так:



Очевидно, что графическая модель в виде отрезков является моделью более высокого уровня абстрактности, чем схематический рисунок. Такая модель требует сформированности определенного уровня умения читать схематические изображения ситуаций, и еще более сложного умения составлять такие графические изображения ситуаций.

В связи с высоким уровнем абстрактности схема в отрезках обладает большим количеством «степеней свободы», т. е. при использовании одного и того же чертежа в отрезках можно решать задачу несколькими способами, и не нужно каждый раз рисовать новую схему, как в случае со схемами предыдущего вида, рассмотренными выше.

На этапе усвоения учеником смысла понятия «разные способы решения одной задачи» такая работа была полезна. Рисуя схему каждый раз заново, ученик отражает в рисунке разный ход мысли при решении одной и той же задачи, что является главным для усвоения понятия «разные способы решения». Когда это умение сформировано на определенном уровне, полезно перейти к использованию менее наглядной, но более универсальной модели задачи, чтобы дать больше свободы мышлению, т. е. перейти к схеме в отрезках.

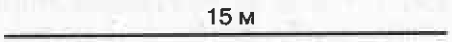
Знакомство с моделированием задач схемами в виде отрезков целесообразно начать с таких задач, данные которых выражены в *мерах длины.* В этом случае изображение данных и искомого в виде отрезков будет понятнее детям.

Приведем пример такого моделирования.

В куске было 15 м ткани. Одному покупателю продали 5 м, а другому 4 м. Сколько метров ткани осталось в куске?

Рассмотрим процесс построения схемы к этой задаче:

— Сколько ткани было в куске? *(15 м.)* Изобразим с помощью произвольного отрезка длину всего куска ткани, надпишем над ним, что он изображает 15 м:



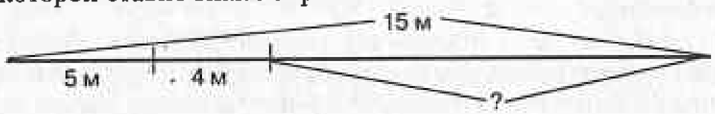
— Что еще известно в задаче? *(Одному покупателю продали 5 м.)* Давайте отметим эту часть отрезка и подпишем под ним, что он изображает 5 м:

— Что известно о ткани, проданной второму покупателю? *(Ее было 4 м.)* Обозначим это отрезком и подпишем:

— Что надо найти? *(Сколько ткани осталось в куске.)*

— Покажите на чертеже отрезок, который обозначает оставшуюся ткань.

Ученик показывает и вслед за движением руки рисует скобку, над которой ставит знак вопроса:



Если первоначально отрезок, изображающий 15 м ткани, отложить размером 15 клеточек, то ответ задачи можно найти пересчетом, т. е. задача будет решена *графически* и другого решения она не требует.

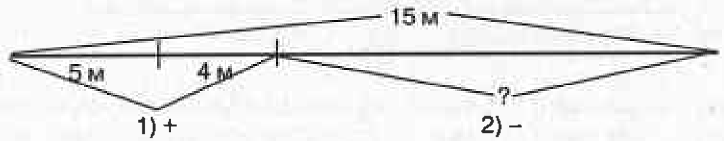
Если длина отрезка была условной, то анализ задачи проводится по чертежу. Лучше выбрать вариант анализа «от данных».

— Что можно узнать, если известно, что продано одному покупателю 4 м, а другому 5 м? *(Сколько им продано обоим.)*

— Какое действие нужно выполнить? *(Сложение.)*

Знак действия ставится на чертеже и обозначается скобкой, какие числа будут складывать.

— Как узнать, сколько ткани осталось в куске? *(От всей ткани отнять то, что продано.)*



В таком виде чертеж играет роль также и плана решения. Модель такого вида вызывает в сознании ученика совершенно конкретное представление о ситуации, структуру связей между данными и искомыми отражает в явном виде, т. е. прогнозирует ход решения. Причем одна и та же модель допускает разные способы решения, а также явно подводит ученика к способу записи решения выражением: $15 - (4 + 5)$ или $(15 - 4) - 5$.

Выполненная средствами языка графики, такая модель позволяет ученику подняться на достаточно высокую ступеньку абстрактности — никаких соотношений, кроме количественных, эта схема не отражает, все второстепенные детали опущены, выбор действия производится без учета «главного» слова, а только исходя из логики происходящих изменений.

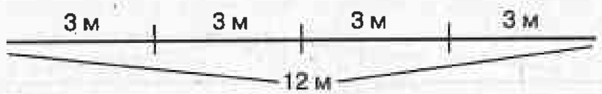
Знакомить учащихся с таким способом моделирования задачи полезно уже в первом классе, хотя бы при решении задач, в которых данные и искомые выражены в единицах длины. Постепенно учащиеся знакомятся с другими задачами, которые удобно моделировать в «отрезках». Такая работа является подготовительной к постепенному переходу от схематического моделирования (в 1 классе) к графическому (во 2 и 3 классах). Понимать чертеж «в отрезках» учащиеся должны к тому времени, как начинают решать простые задачи на деление, поскольку задачи на деление нельзя моделировать схематическим рисунком, рассмотренным ранее, эти задачи требуют рисунка «в отрезках».

Рассмотрим задачу:

Из 12 м ткани в мастерской сшили несколько платьев, расходуя на каждое по 3 м. Сколько платьев получилось из этого куска ткани?

Моделировать такую задачу с помощью схемы со стрелками неудобно — прежде чем ее нарисовать, фактически приходится задачу решить, поскольку иначе неизвестно, сколько стрелок изобразить.

Такая задача является очень удобной для перехода к рисунку «в отрезках»: дети чертят отрезок длиной 12 клеточек, а затем откладывают по 3 м (3 клетки), отделяя их черточкой. В результате получаем графическое решение задачи. Ответ можно найти пересчетом маленьких отрезков:

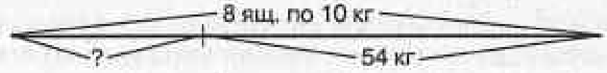


Опыт показывает, что такой переход для детей, имеющих опыт моделирования задач схемами со стрелками, не представляет никакой трудности, поскольку умение моделировать словесно заданную ситуацию средствами графики является общим умением, опыт применения которого дети уже имеют. Другой вид рисунка поначалу затрудняет только немногих детей, причем чаще это обусловлено только характером ребенка, а не трудностью восприятия схемы нового вида — есть дети (как и взрослые), трудно привыкающие к новому во всем (даже в одежде!). Эти дети обычно еще долго пользуются старым «проверенным» способом моделирования задачи и только появление большого количества новых задач, где использование рисунка в отрезках эффективнее старого способа со стрелками, постепенно убеждает их в необходимости перейти к новому виду моделирования. Мы обычно советуем учителям не вводить новый способ «категорическим требованием». Пусть ребенок сам постепенно перейдет на него, а в «переходный период» он может использовать любой способ моделирования, лишь бы этот способ помогал ему легко и правильно решить задачу.

Рассмотрим задачи с различными структурами графических моделей в отрезках.

В ларек привезли 8 ящиков огурцов по 10 кг в каждом. До обеденного перерыва продали 54 кг огурцов. Сколько килограммов огурцов осталось?

Анализ данной задачи удобно проводить, опираясь на графическую модель «в отрезках» в сочетании с элементами краткой записи:

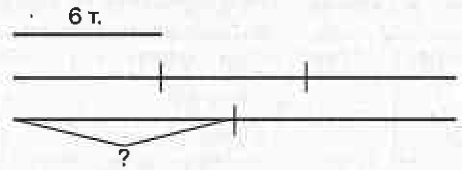


Анализ рисунка подводит ребенка к плану решения и записи решения сразу выражением: $10 \cdot 8 - 54$.

В шкафу стояло 6 глубоких тарелок, мелких в 3 раза больше, чем глубоких, а блюдец в 2 раза меньше, чем мелких тарелок. Сколько блюдец было в шкафу?

Анализируя текст этой задачи, целесообразно сопровождать его построением графической модели в отрезках, используя прием «чтение по частям».

Изобразим количество глубоких тарелок произвольным отрезком и отметим, что он соответствует 6 тарелкам. Так как мелких тарелок в 3 раза больше, отложим ниже отрезок в 3 раза длиннее (3 отрезка такой же длины). Третий отрезок будет обозначать количество блюдец, он вдвое короче второго.



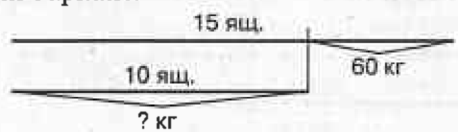
Анализ задачи проводится с опорой на схему: чтобы узнать количество блюдец, надо количество мелких тарелок разделить пополам. Чтобы узнать, сколько было мелких тарелок, надо по 6 взять 3 раза.

Запись решения можно оформить выражением $(6 \cdot 3) : 2$.

В один ларек привезли 15 ящиков с фруктами, в другой — 10 таких ящиков. В первый ларек привезено фруктов на 60 кг больше, чем во второй. Сколько килограммов фруктов привезено во второй ларек?

Данная задача содержит три величины, две из которых связаны пропорциональной зависимостью: количество ящиков и общее количество фруктов, третья величина (емкость ящика) является величиной постоянной и играет роль коэффициента пропорциональности. Нагляднее всего такие задачи моделируются на графическом чертеже «в отрезках», хотя в школьной практике для их моделирования чаще используют таблицу. Покажем оба варианта.

Графический вариант:



Визуальный анализ чертежа показывает, что в первом ларьке фруктов больше за счет того, что больше ящиков. Анализ чертежа должен подвести к тому, что на «лишних» 60 кг приходится 5 ящиков. Второй важный момент условия учитель акцентирует с помощью вопроса:

— Что сказано о размерах всех этих ящиков? Какие они все? *(Ящики одинаковые.)*

— Что можно узнать, если 5 одинаковых ящиков весят 60 кг? *(Вес одного ящика.)*

После того, как задача решена, полезно провести работу над ней, изменяя данные (количество ящиков, массу избытка), выяснить, что изменится, если изменить количество ящиков, но не менять массу избытка (изменится масса одного ящика) и т. д. Дети должны осознать, что, изменяя одну величину при неизменной постоянной, нужно обязательно изменить другую величину (причем точно так же — т. е. пропорционально).

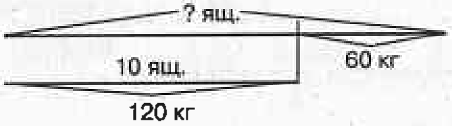
Данную задачу можно решать и оформив ее условие в таблицу:

Количество ящиков	Масса одного ящика	Масса фруктов
15 ящ.	? одинаковая	? на 60 кг больше
10 кг	?	?

Таблица в данном случае является более громоздким вариантом модели. Планируя использование таблицы, учитель должен заготовить ее каркас (рамку) заранее, чтобы не тратить время на ее вычерчивание на уроке. Удобно использовать рамку из тонких реек (она вешается на два гвоздя на доске). Если таблица заполнена в процессе анализа текста на доске, ученикам нет смысла переносить ее в тетрадь — это занимает много времени. Таблица удобна при фронтальном разборе задачи и в том случае, когда учитель планируе. решить задачу, обратную к данной. Тогда, заменяя одно из данных вопросом, а прежний вопрос — данным, легко построить обратную задачу той же структуры. Обратная задача может выглядеть так:

Количество ящиков	Масса одного ящика	Масса фруктов
?	? одинаково	? на 60 кг больше
10 ящ.	?	120 кг

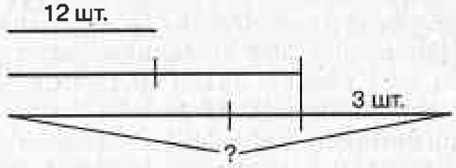
Графический вариант для обратной задачи выглядит так:



Полезно обратить внимание учащихся на то, что если прямую задачу можно было решить только одним способом, то обратную можно решить двумя способами. Нагляднее это видно на графической модели:

I.	1) $120 : 10 = 12$ (кг)	II.	1) $120 : 10 = 12$ (кг)
	2) $120 + 60 = 180$ (кг)		2) $60 : 12 = 5$ (ящ.)
	3) $180 : 12 = 15$ (ящ.)		3) $10 + 5 = 15$ (ящ.)

Для формирования умения свободно пользоваться графическим чертежом полезны задания, в которых учащиеся по данной графической модели составляют условие задачи и записывают решение, например:



Составить задачу по чертежу.

При составлении задачи по чертежу нужно подробно провести анализ графической модели, т. е. рассмотреть, как выражены данные, искомое, как показана связь между ними, как понимать каждое условное обозначение.

— О чем будет наша задача? Что изображает верхний отрезок? Известно ли это число?

— Что изображает второй отрезок? Известно ли это число? А что о нем можно сказать по чертежу?

— Что изображает третий отрезок? Что о нем можно сказать по чертежу? Что требуется узнать в задаче? Как это обозначено на чертеже?

При выполнении подобных заданий ученики начинают лучше и быстрее разбираться в математической структуре задачи, учиться «читать» зависимости, скрытые в схемах и чертежах.

Из всего многообразия задач, решаемых в 3 и 4 классах, задачи на пропорциональную зависимость между величинами следует выделить в отдельную группу. Пропорциональной зависимостью связаны, как правило, две величины, третья играет роль коэффициента пропорциональности. Наиболее часто используемым способом моделирования для большинства таких задач является таблица, содержащая три столбца (по количеству задействованных величин). Оформление условия и вопроса задачи в таблицу позволяет ученику быстрее сориентироваться как в характере и количестве задействованных в задаче величин, так и в структуре связей между ними.

В одном альбоме 600 марок наклеено на 15 страницах поровну. В другом альбоме наклеено 448 марок и на каждой странице на 8 марок меньше, чем в первом альбоме. Сколько страниц занято марками во втором альбоме?

Анализ текста удобнее отразить в таблице:

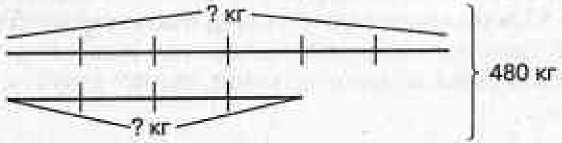
Всего марок	Всего страниц	Марок на 1 странице
600 шт.	15 стр.	? (поровну)
448 шт.	?	? на 8 шт. меньше

Анализ задачи проводится с опорой на таблицу (вариант «от данных»). В таблице видно, что ее первая строка содержит два известных данных и один вопрос, значит, начинать решение задачи следует с ответа на этот вопрос. Затем сравниваются два данных в третьем столбце по вертикали. (Можно ли узнать, сколько марок на одной странице второго альбома, если мы знаем, сколько их на 1 странице в первом?) И затем можно ответить на главный вопрос задачи. Таблица удобна для работы над задачей в классе, поэтому многие учителя предпочитают использовать ее при проведении фронтальной работы. Отрицательным моментом этой модели является то, что *это не самостоятельный прием работы над задачей самого ученика*. Таблицу готовит и руководит ее заполнением учитель. Дети не чертят таблиц в тетради. Поэтому этот способ деятельности (эта модель) многими детьми не присваивается, т. е. не становится собственным приемом работы ребенка с задачей.

В противоположность таблице графический рисунок ребенок полностью рисует в тетради сам. Научившись этому на уроках, он и в домашней работе, и на контрольной может использовать этот способ моделирования любой задачи.

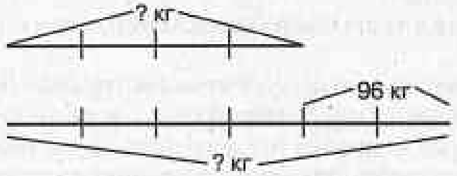
С одной грядки собрали 4 мешка картофеля, а с другой 6 таких же мешков. Масса всего собранного картофеля 480 кг. Найти массу картофеля, собранного с каждой грядки.

В основе данной задачи также лежит понятие прямой пропорциональности, постоянной величиной является масса одного мешка. Это важно подчеркнуть при анализе текста. Моделировать такую задачу можно с помощью чертежа или таблицы. Учителя чаще используют таблицу. Покажем вид рисунка «в отрезках» к этой задаче:



Основная мысль, которую должны понять дети при решении этой задачи, заключается в том, что 480 кг распределяются пропорционально количеству мешков, которые собраны с каждой грядки. Рисунок показывает это наглядно.

После решения этой задачи полезно составить обратную ей:



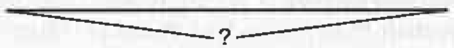
На чертеже хорошо видно, почему со второй грядки собрали картофеля на 96 кг больше (так как больше мешков). Значит, разница в 96 кг приходится на 2 мешка, отсюда виден путь решения задачи.

На субботнике 20 школьников убирали классы. Это $^1/_3$ часть тех школьников, которые убирали пришкольный участок. Сколько детей убирали пришкольный участок?

Анализируя данную задачу, лучше начать с ее вопроса:

— Сколько детей убирали пришкольный участок? *(Это неизвестно.)*

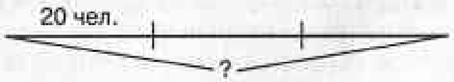
— Изобразим общее число детей в виде произвольного отрезка:



— Отметим, что их количество мы не знаем.

— Что известно о школьниках, убиравших классы? *(Их было $^1/_3$ от всех и всего 20 человек.)*

— Разделим отрезок на 3 равные части (приблизительно) и отметим ту часть школьников, которая убирала классы:



— Что можно сказать о количестве всех школьников на участке? *(Их в 3 раза больше.)*

Обращаем внимание учителя на то, что вопрос детям, почему сделан такой вывод, нецелесообразен — это видно по рисунку.

— Каким действием их можно найти? *(Умножением: $20 \cdot 3 = 60$ чел.)*

Приведенный пример показывает, что достаточно трудные для восприятия многих детей задачи «на нахождение числа по его доле» удобнее всего моделировать рисунком в отрезках, визуально показывающим способ ее решения.

5. Моделирование при обучении решению задач на движение

Рассмотрим большую группу задач, традиционно считающихся трудными в обучении школьников начальных классов, — это задачи «на движение».

Трудность этих задач для ребенка методически обусловлена двумя причинами.

В первую очередь, это содержательная трудность. «Скорость» — это физическая величина, связывающая две величины, которые ребенок уже привык за период предыдущего обучения воспринимать каждую «саму по себе»: время и расстояние (длина). Для осознания каждой из них имеется либо визуальная опора (у длины, которую можно непосредственно «оценить глазом»), либо уже привычный за три года обучения инструмент измерения — линейка, часы. «Скорость» — это абстракция, которую ребенок не может ни увидеть, ни непосредственно измерить (т. е. «оценить» хотя бы, как время). Сама запись «скорости»: км/ч, м/мин — не имеет для ребенка никаких аналогий, особенно сейчас, когда в последней редакции традиционного учебника математики не дается запись дроби. И даже если она детям известна (как в альтернативных учебниках), ее способ чтения ничего не дает для понимания смысла понятия «скорость».

Второй причиной является технологическая трудность. Долгие годы традиционный курс математики впервые знакомил детей со схемой задачи «в отрезках» именно на задачах «на движение». Иными словами, без всякой предварительной подготовки к использованию графической символики (обычно после 2—3 лет использования задач краткой записи в качестве модели при решении), ребенок должен был ее освоить сразу на задачах с содержательно трудным понятием «скорость». Эти задачи появлялись во втором полугодии последнего года обучения в начальной школе, поэтому многие дети с таким трудом адаптируются к ним— они просто не успевают так быстро освоить одновременно новую величину с ее сложностями и чертеж в отрезках.

С точки зрения математической структуры эти задачи не являются новым видом — это задачи на пропорциональную зависимость: расстояние (длина) прямо пропорционально скорости и времени движения; и обратно: скорость движения обратно пропорциональна времени движения при постоянном значении расстояния. Та же зависимость наблюдается в задачах «на куплю-продажу», «на площадь», «на работу» и т. п. Однако многие учителя полагают, что задачи «на движение» представляют собой особую группу задач нового вида, и при обучении их решению нужны какие-то новые приемы. Покажем,

что заранее сформированное у ребенка умение переводить словесно заданный текст задачи на язык графики (в схему в отрезках) является универсальным приемом самостоятельной деятельности ребенка при решении задачи на движение.

Задачи «на движение», содержащие пропорциональные величины, позволяют использовать как таблицы, так и схематические чертежи, причем последние являются, безусловно, более наглядной моделью.

Прежде чем приступить к решению задач, содержащих такие величины, как «скорость», «время» и «расстояние», необходимо разъяснить учащимся само понятие скорости. При этом следует опираться на опыт детей, широко использовать практический и наглядный методы.

Дети часто употребляют в своей речи слова «быстрее», «медленнее», не отдавая себе отчета в том, что эти слова связаны со скоростью (дети больше связывают их со временем). Для разъяснения понятия скорости можно задавать детям такие вопросы:

— Кто быстрее преодолеет данное расстояние: автомобилист или велосипедист, велосипедист или пешеход?

— Как вы понимаете слова «быстрее пройдет данное расстояние?»

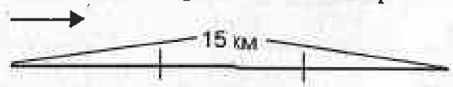
— Чаще всего ответ учащихся связан со временем: «Пройдет за меньшее время».

— А почему он пройдет за меньшее время? *(Он проходит в час расстояние большее.)* Значит, *его скорость* больше.

Понятие о скорости конкретизируется в процессе решения задач, например, таких:

Пешеход за 3 ч прошел 15 км. В каждый час он проходил одинаковое расстояние. Сколько километров пешеход проходил в час?

Разбор задачи следует сопровождать графической моделью, на которой обозначаются данные задачи: обозначим все расстояние отрезком и отметим, что это расстояние он прошел за 3 часа:



Поскольку главная трудность при решении таких задач состоит в том, что неподвижная картинка является моделью равномерного непрерывного процесса (движения), в рисунок принято вводить стрелку, символизирующую это движение и его направление.

— Можно ли найти на чертеже точку, в которой окажется пешеход через час? Через 2 часа?

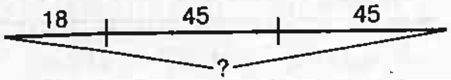
— Покажите, откуда он вышел? Где пешеход окажется через три часа?

Туристы за день прошли пешком 18 км и проехали 2 ч на автобусе со скоростью 45 км/ч. Какой путь проделали туристы за день?

Таблица к данной задаче выглядит таким образом:

Скорость	Время	Расстояние
?	?	18 км
45 км/ч	2 ч	?

При разборе задачи она фактически не работает, поскольку неизвестные скорость и время в первой строке не нужны для решения задачи, в то время как использование графической модели поможет учащимся быстро найти решение:



При решении некоторых задач полезно часть условия записать в виде таблицы, а затем применить прием графического моделирования.

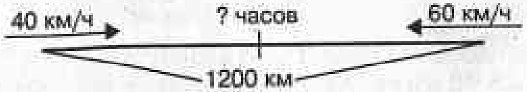
Из двух городов, расстояние между которыми 1200 км, вышли одновременно навстречу друг другу два поезда. Один из них может пройти это расстояние за 20 ч, другой — за 30 ч. Через сколько часов поезда встретятся?

Скорость	Время	Расстояние
I — ?	20 ч	1200 км
II — ?	30 ч	1200 км

Анализ таблицы дает возможность найти скорость поездов:

1. 1200 : 20 = 60 (км/час)
2. 1200 : 30 = 40 (км/час)

После этого строится графическая модель:

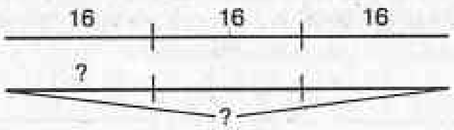


Чертеж дает наглядное представление о движении поездов навстречу друг другу, облегчая поиск дальнейшего пути решения.

Расстояние от города до поселка велосипедист проехал за 3 ч со скоростью 16 км/ч. Возвращаясь обратно, он то же расстояние проехал за 4 ч. С какой скоростью ехал велосипедист на обратном пути?

Для решения задачи можно использовать как графическую модель, так и таблицу.

Графическая модель:



Скорость	Время	Расстояние
16 км/ч	3 ч	? одинаковое
?	4 ч	?

Визуальный анализ рисунка подсказывает путь решения задачи, при этом сразу, еще до решения можно сказать, что скорость во втором случае будет меньше — это подсказывает рисунок.

После решения задачи полезно обратить внимание учащихся на взаимозависимость скорости и времени (чем больше скорость, тем меньше времени будет затрачено на дорогу, и наоборот). Для этого можно предложить сравнить скорость движения велосипедиста и подумать, почему на обратный путь велосипедист затратил больше времени. *(Потому, что скорость была меньше.)*

Особое место в этой группе занимают задачи на движение в противоположных направлениях (на сближение и удаление).

При их решении целесообразно использовать графическую модель, так как она дает наглядное представление о характере движения и во многом облегчает поиск решения задачи.

Два пешехода одновременно вышли навстречу друг другу. Через 4 ч они встретились. Скорость первого пешехода 5 км/ч, скорость второго — 6 км/ч. На каком расстоянии первоначально находились пешеходы друг от друга?

При составлении графической модели необходимо довести до понимания учеников тот факт, что оба пешехода находились в пути одинаковое время.

С этой целью на подготовительном этапе можно предложить ряд таких заданий:

Два автомобиля выехали одновременно навстречу друг другу и встретились через 7 ч. Сколько времени находился в пути каждый автомобиль?

Коля и Таня вышли одновременно в школу каждый из своего дома. Через 10 мин они встретились в школе. Сколько минут был в пути Коля? Сколько минут была в пути Таня?

Такого рода задания помогут учащимся осознать характерный момент задач на встречное движение: одинаковое время в пути для обоих сближающихся объектов (или удаляющихся).

Графическая модель уже визуально наводит учеников на два способа решения этой задачи:

I. 1) 5 · 4 = 20 (км)
2) 6 + 4 = 24 (км)
3) 20 + 24 = 44 (км)

II. 1) 6 + 5 = 11 (км/ч)
2) 11 · 4 = 44 (км)

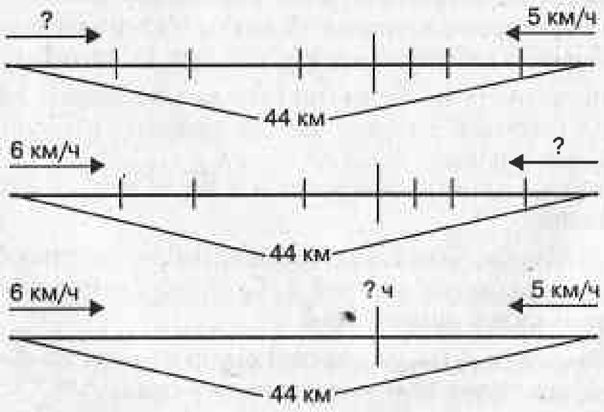
При решении задачи вторым способом можно ввести термин «скорость сближения», разъяснив его по графической модели. Учитель может сдвигать одновременно навстречу друг другу фигурки пешеходов, каждый раз на одно деление. Это значит, что прошел 1 час пути.

— На сколько приблизились (сблизились) друг к другу за 1 час пешеходы? *(На 5 + 6 = 11 км/ч)*

Обращаем внимание детей на то, что складываются скорости, поэтому в наименовании ответа тоже скорость.

Далее учащиеся рассуждают так: *«За 1 ч пешеходы сблизились на 11 км; за 4 ч они сблизятся на 11 · 4 км».*

Работая с данной задачей, целесообразно использовать различные методические приемы и прежде всего рассмотреть задачи обратные данной. Их можно предложить в графическом виде, облегчающем детям самостоятельное составление обратной задачи:



Составьте по чертежам три обратные задачи.

После рассмотрения обратных задач можно предложить учащимся вопросы:

— Ближе к какому пункту произойдет встреча?

Если в задаче даны обе скорости, то с помощью готового чертежа или при его выполнении полезно выяснить, почему пункт встречи находится ближе (или дальше) к одному из пунктов отправления, чем к другому. Если сначала известна только одна из скоростей, то данный вопрос полезно задать уже после решения задачи.

— Какое расстояние будет между пешеходами через час после встречи, если они продолжали двигаться в тех же направлениях?

Обратим внимание детей на то, что «скорость сближения» равна «скорости удаления».

— Могли ли пешеходы встретиться в середине пути?

— Кто из них придет в конечный пункт первым?

Можно использовать целый ряд приемов с целью подготовки учащихся к решению более сложных задач. Например, можно изменить данные в условии задачи и предложить детям составить задачу по такому чертежу:

— Поставьте вопрос к задаче по рисунку *(На каком расстоянии друг от друга будут находиться пешеходы через 4 ч?)* и решите задачу.

Выполнение задания такого рода формирует умение читать чертеж, умение трансформировать (видоизменять) условие и решать задачи усложненного вида.

Аналогичный прием постепенного усложнения условия можно использовать и при решении задач на удаление в противоположных направлениях.

6. Влияние графического моделирования на формирование умения решать задачи разными способами

Среди различных видов работы над уже решенной задачей (работа над задачей после ее решения) особое место занимает решение задачи другим способом. Хотя в начальной школе выбор различных способов решения задачи в большинстве случаев связан с использованием свойств арифметических действий (сложения, вычитания, умножения, деления), следует стремиться к тому, чтобы учащиеся сознательно выбирали наиболее рациональный из известных им способов.

Решение задач различными способами способствует развитию логического мышления и математических способностей учащихся.

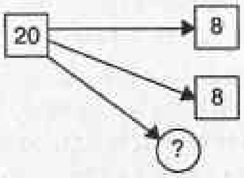
23-2681

Ранее уже говорилось, что эффективным способом отыскания различных способов решения задачи является ее графическое моделирование. Происходит это потому, что строя графические модели задачи, мы освобождаем учащихся от восприятия несущественных особенностей условий, представляем существенные особенности в наглядной форме и тем самым помогаем детям установить все возможные связи и зависимости между величинами, что, в свою очередь, облегчает детям нахождение различных способов решения.

Приведем несколько примеров работы над такими задачами и покажем, как при этом графические иллюстрации облегчают нахождение путей их решения различными способами. Иными словами, графическая модель задачи сама по себе является средством подведения ребенка к пониманию того, что задача может быть решена разными способами.

Мама купила 2 батона, по 8 рублей каждый. В кассу она подала 20 рублей. Сколько сдачи должна получить мама?

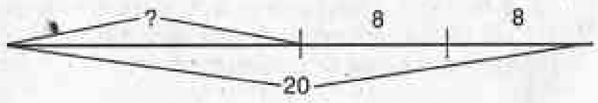
Схема к данной задаче подводит учащихся к одному способу решения:



По этой схеме дети составляют выражение: (20 – 8) – 8.

Второй способ решения на этой схеме не просматривается.

Если же использовать графическую модель в отрезках, то на ней явно видны оба способа решения:



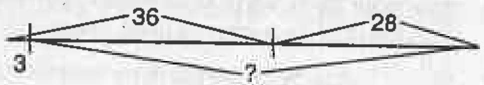
1. 20 – (8 + 8)
2. 20 – 8 – 8

На примере таких задач удобно показывать детям необходимость постепенного перехода к более высоким ступеням графической абстракции при решении задач: чем абстрактнее модель, тем больше «степеней свободы» она имеет.

Девочка нашла 36 грибов, а мальчик 28. Среди этих грибов оказалось 3 несъедобных. Сколько съедобных грибов нашли дети?

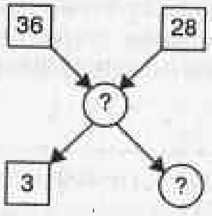
Графическая модель данной задачи дает возможность по одному рисунку составить все три возможные решения задачи:

1) (36 + 28) – 3
2) (36 – 3) + 28
3) (28 – 3) + 36



Схематические изображения для каждого способа решения надо делать разные. В данной задаче их полезно сделать по готовым решениям и объяснить ход мысли при составлении каждой схемы.

Например:



Рассуждение:

Сначала дети высыпали все грибы вместе на полянку, а затем отобрали три несъедобных и выбросили. Значит сначала найдем, сколько грибов было всего, а затем отнимем несъедобные — их было 3.

В магазин привезли 12 ящиков с яблоками по 8 кг в каждом. До обеденного перерыва было продано 9 ящиков. Сколько килограммов яблок осталось продать после обеденного перерыва?

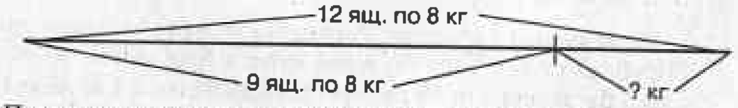
Анализируя текст, строим графическую модель.

— Обозначим отрезком все ящики с яблоками, которые привезли в магазин.

— Сколько килограммов яблок было в каждом ящике? *(8 кг.)* Обозначим это на чертеже.

— Сколько ящиков продано? *(9.)* Обозначим на чертеже эти 9 ящиков. Покажите на чертеже те ящики, что остались.

— Что надо узнать в задаче? *(Сколько кг яблок осталось.)* Обозначим на рисунке искомое знаком вопроса.



По чертежу легко увидеть различные способы решения:

1 способ: $8 \cdot 12 - 8 \cdot 9 = 24$ (кг)

2 способ: $8 \cdot (12 - 9) = 24$ (кг)

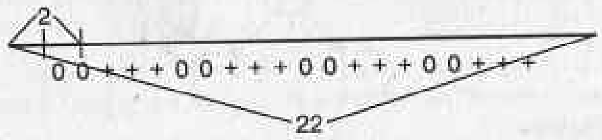
Роль графической модели при нахождении разных способов решения задач «на движение» была показана выше.

В заключение приведем несколько нестандартных задач, на примере которых можно со всей убедительностью показать высокую практическую эффективность графической модели как опоры для осознанных мыслительных действий при решении задачи.

Девочка сыграла на чемпионате школы 22 партии в шахматы. 2 партии она проиграла, а из остальных на каждые 2 партии вничью, у нее 3 выигранных. Сколько побед у девочки?

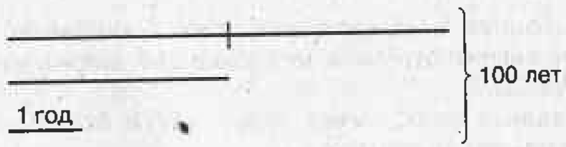
Обозначим на модели нулем — ничью, плюсом — выигрыш. Если начертить отрезок длиной 22 клетки, то задачу можно решить графическим способом, подсчитав по рисунку количество выигрышей.

Опора на графическую модель приводит к следующим выводам:



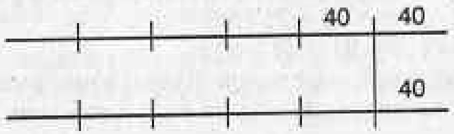
а) выигрышей $3 \cdot 4 = 12$;
б) проигрышей $2 \cdot 4 = 8$.

Внук спросил дедушку: «Сколько тебе лет?» Дедушка ответил: Если проживу еще половину того, что я прожил, да еще один год, то мне будет сто лет. Сколько лет дедушке?



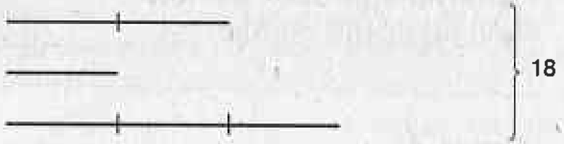
Анализируя графическую модель, получаем решение:
1) 100 – 1 = 99 (лет)
2) 99 : 3 = 33 (года)
3) 33· 2 = 66 (лет)

Мама купила 4 кг яблок. Расплачиваясь за них, она получила 40 рублей сдачи. Если бы мама купила 6 кг яблок, то ей пришлось бы доплатить 40 рублей. Сколько стоил 1 кг яблок?



Анализ графической модели приводит к выводу, что цена 1 кг яблок 40 рублей.

Сумма трех чисел равна 18. Первое число в 2 раза больше второго, а второе в 3 раза меньше третьего. Найдите эти числа.



Анализируя графическую модель, получаем: I число — 6; II число — 3; III число — 9.

Обучение младших школьников решению задач — процесс длительный, методически неоднозначный и сложный даже для учителей с большим стажем работы. Опыт работы автора данного пособия в системе повышения квалификации учителей подтверждает это. С целью более детального анализа всех видов встречающихся в курсе математики начальных классов задач и подробного анализа методики работы с ними, автором данного пособия была написана книга для учителя «Обучение решению задач в начальных классах» (М., 2003). При подготовке к практическим занятиям, а также при подготовке к выходу на учебную практику в школу студентам рекомендуется обратиться к этой книге. В ней рассмотрены методика работы над всеми типовыми и производными от типовых задач, встречающимися в различных учебниках для начальных классов, а также вопросы обучения решению задач повышенной сложности при проведении факультатива или кружка по математике.

Глава 9

Методическая подготовка учителя к обучению математике в начальной школе

Лекция 22.

Подготовка учителя к уроку математики в начальных классах

1. Краткий анализ наиболее известных теорий обучения.
2. Организация урока математики в начальных классах.
3. Классификация учебных заданий.
4. Деятельность педагога при планировании и проведении урока математики.
5. Методический анализ урока математики в начальных классах.

Рассмотрим процесс подготовки педагога к уроку математики *как методическую задачу*. При решении любой задачи необходимо провести анализ исходных данных (*что у нас есть?*), определить цель или вид конечного результата (*что мы хотим получить?*), а затем наметить способ достижения этого результата (*как из того, что у нас есть, получить то, что мы хотим?*).

Анализ исходных данных адресует нас к дидактике обучения, а именно к *принципам обучения* как опоре при конструировании учебного процесса в целом и на конкретном уроке. Теоретически в современной дидактике рекомендуется идти от принципов к содержанию, т. е. предполагается, что если имеется принцип, то он определяет отбор содержания и способ построения его изучения. Далее предполагается органичный переход от содержания к методам и средствам его изучения (т. е. особенности содержания обусловливают особенности методики обучения), а потом — к организационным формам. Иными словами, определяющим началом являются принципы обучения, которые в свою очередь, являются сутью той или иной *теории обучения*.

1. Краткий анализ наиболее известных теорий обучения

Рассмотрим наиболее известные теории, в которых по-разному определяются оптимальные способы построения учебной деятельности,

и по-разному объясняется, как происходит научение, что обусловливает разные подходы к построению психолого-педагогических принципов для разработки методик обучения, рассчитанных на развивающий эффект.

Теория планомерного (поэтапного) формирования знаний, умений, умственных действий (П.Я. Гальперин)

Согласно этой теории, явившейся обобщением и дальнейшим развитием учения о происхождении психических процессов и внутренних состояний из внешней деятельности, предметное действие и выражающая его мысль составляют конечные, исходно различные, но генетически связанные звенья единого процесса постепенного преобразования материального действия в идеальное, его интериоризации, т. е. перехода извне внутрь. Действие функционально связано с предметом, над которым оно осуществляется, включает в себя продукт — цель преобразования данного предмета и средства такого преобразования. Все это вместе взятое составляет исполнительскую часть формируемого действия.

Кроме нее в состав действия входит ориентировочная основа действия (ООД). В результате правильного выполнения ООД субъекту представляется картина обстоятельств, в которых должно быть совершено действие, намечается адекватный этим обстоятельствам и цели действия план его выполнения, определяются параметры и формы контроля действия, а также способы коррекции допускаемых при его исполнении ошибок. На ориентировочную часть выполняемого действия в теории планомерного формирования умственных действий обращается особое внимание. Она считается главной, так как в первую очередь от ООД зависят уровень и качество исполнения формируемого действия.

Процесс преобразования действия с целью его совершенствования реализуется в виде операций по созданию новой или актуализации старой ООД (это называется *ориентировочными операциями*), включает осуществление самого преобразования (*исполнительные операции*), контроль и коррекция исполнения (*контрольные операции*).

Процесс усвоения знаний и формирование действий происходит по П.Я. Гальперину в шесть этапов:

1) мотивация (привлечение внимания обучаемого, пробуждение его интереса и желания получить соответствующие знания);

2) уяснение ООД;

3) выполнение действий в материальной (материализованной) форме;

4) выполнение действия в плане громкой речи;
5) выполнение действия в плане речи про себя;
6) выполнение действия в плане внутренней речи, или в уме.

В данной теории выделяется три типа учения соответственно трем главным типам ООД. При первом типе ООД усвоение действия происходит с ошибками, с недостаточным пониманием материала, с неспособностью выделить существенные признаки. При втором типе ООД усвоение знаний характеризуется более уверенным и полным пониманием содержания материала с четким различением существенных признаков. При третьем типе ООД обеспечивается быстрое, эффективное и безошибочное усвоение действия, предполагающее формирование всех его основных качеств (полноты, обобщенности, самостоятельности).

Технология реализации такого типа обучающего процесса такова: ориентировочная основа заданного умственного действия разъясняется учащемуся в самом начале его формирования. Затем с опорой на нее выполняется само действие, причем сначала во внешнем плане с реальными предметами. После достижения реального уровня мастерства во внешнем исполнении действий учащийся выполняет его в плане громкой речи, затем — в плане речи про себя и, наконец, в плане внутренней речи. Это и есть умственное действие в собственном смысле слова. При этом действие может быть перенесено во внутренний план целиком или только в своей ориентировочной части (т. е. понимание действия). В этом случае исполнительная часть действия остается внешней, меняется вместе с внутренней ООД и в конечном счете превращается в сопровождающий умственное действие двигательный навык.

Теория формирования научных понятий у школьников (В.В. Давыдов)

Свою концепцию построения учебной деятельности, рассчитанную на *усвоение учащимися младших классов научных понятий*, предложил В.В. Давыдов. Система обучения, сложившаяся в 1930—1950-е годы и в основном еще сохраняющаяся в настоящее время, в противоположность которой была выдвинута эта концепция, основывается на индуктивном способе мышления и приобретения учащимися знаний. Этот способ характеризуется тем, что человек сначала знакомится с конкретными фактами, а затем на основе их обобщения приходит к научным понятиям, законам, которые выражают наиболее существенное из того, что в этих фактах содержится.

Индуктивный способ изложения учебного материала, как показал В.В. Давыдов, рассчитан на формирование у учащихся только одной и не основной стороны мыслительного процесса, а именно — логических рассуждений по типу «восхождения от конкретного к абстрактному». В результате такой логики мышление ребенка развивается односторонне, а сами научные понятия и законы не усваиваются как следует. Это происходит потому, что в ходе обучения учащиеся не получают представления о всеобщем, которое содержится в демонстрируемых им фактах. В силу этого они не обращают внимание на главное, не в состоянии достаточно глубоко понять и осознать эти факты именно как выражающие некоторый общий закон. Этот, последний, в конечном счете не усваивается как следует, поскольку процесс обучения останавливается на формулировке правила, убедиться в справедливости которого учащиеся не имеют возможности.

Для того чтобы сформулировать полноценное теоретическое мышление, а таким является индуктивно-дедуктивное мышление, способное переходить от частного к общему и обратно, анализировать и обобщать, необходимо обеспечить учащемуся на занятиях возможность свободного мысленного движения в двух указанных взаимосвязанных направлениях: от абстрактного к конкретному и от конкретного к абстрактному, с приоритетом первого над вторым. «Одна из задач теоретического мышления, — пишет В.В. Давыдов, — состоит в выделении существенной связи (ее абстрагировании), а затем в мысленном сведении к ней всех проявлений объекта (в их обобщении)»[1].

Для того чтобы развить у учащихся подлинно теоретическое мышление, учебные предметы необходимо, по В.В. Давыдову, перестроить следующим образом. В первую очередь в процессе обучения учащимися должна быть усвоена система теоретических понятий, выражающих собой наиболее общие и существенные знания предмета. Эти понятия должны именно усваиваться учащимися, а не даваться им в готовом виде. Усвоение понятий должно предшествовать знакомству с конкретными фактами. Частные знания, в свою очередь, должны выводиться из всеобщих и представляться как конкретное проявление всеобщего закона. При изучении (усвоении) понятий и законов на основе тех или иных материалов учащиеся в первую очередь должны обнаружить в них генетически исходную связь, определяющую объект, отраженный в соответствующем понятии. Эту связь, пишет В.В. Давыдов, необходимо воспроизвести в графических, предметных и знаковых моделях, позволяющих изучить ее в «чистом» виде. Для этого у учащихся нужно сформировать специальные предметные действия (моделирующие предметные действия),

[1] *Давыдов В.В.* Основные проблемы развития мышления в процессе обучения // Хрестоматия по возрастной и педагогической психологии. В 2 ч. М., 1981. Ч. 2. С. 204.

посредством которых они смогут в учебном материале выявить и далее воспроизвести искомую существенную зависимость, изучая ее собственные свойства. Это предполагает постепенный переход учащихся от внешних предметных действий с моделями к их выполнению в умственном плане.

Теория проблемного обучения (Л.В. Занков, А.М. Матюшкин)

Ряд теорий научения относится к проблемному обучению — такому, которое рассчитано не столько на усвоение готовых знаний, умений, действий и понятий, сколько на непосредственное развитие мышления учащихся в процессе решения ими разнообразных проблем. Одним из первых свою психолого-педагогическую концепцию проблемного обучения у нас в стране разработал Л.В. Занков. Следуя положению Л.С. Выготского о том, что правильно организованное обучение должно вести за собой развитие, Л.В. Занков сформировал и теоретически обосновал мысль, согласно которой обучение детей необходимо вести на основе принципа «высокого уровня трудности». Этот принцип «характеризуется не тем, что повышает некую абстрактную «среднюю норму трудности», но прежде всего тем, что раскрывает духовные силы ребенка, дает им простор, и направление. Если учебный материал и методы его изучения таковы, что перед школьниками не возникает препятствий, которые должны быть преодолены, то развитие детей идет вяло и слабо»[1].

Данный принцип органически вошел в содержание целого цикла психолого-педагогических исследований, связанных с проблемным обучением. А.М. Матюшкин определил два основных понятия, которыми пользуется психологическая теория проблемного обучения: понятие *задачи* и понятие *проблемной ситуации*. Задача по А.М. Матюшкину — это «такое интеллектуальное задание, в результате выполнения которого человек должен раскрыть некоторое искомое отношение, свойство, величину, действие»[2]. Задача как таковая не предполагает включение в нее субъекта действия. В отличие от нее *проблемная ситуация* характеризуется как «определенное психологическое состояние субъекта (ученика), возникающее в процессе выполнения такого задания, которое требует открытия (усвоения) новых знаний о предмете, способе или условии выполнения действия»[3]. Для субъекта решение проблемной ситуации означает

[1] *Занков Л.В.* Обучение и развитие // Хрестоматия по возрастной и педагогической психологии. М., 1981. Ч. 2. С. 22.

[2] *Матюшкин А.М.* Теоретические вопросы проблемного обучения.// Хрестоматия по педагогической и возрастной психологии. М., 1981. Ч. 2. С. 274.

[3] *Матюшкин Н.М.* Там же.

определенный шаг в своем развитии, в получении нового, обобщенного знания на основе решения содержащейся в ней проблемы.

Обучение, основанное на создании и решении проблемных ситуаций, называется проблемным. Основные компоненты проблемной ситуации:

1) то неизвестное, что в этой ситуации содержится (отношение, способ или условие действия);

2) необходимость выполнения действия, направленного на решение поставленной задачи, вызванная потребностью в новом, подлежащем усвоению знании;

3) собственные возможности учащегося в анализе условий задания и усвоения открываемого в нем нового знания.

Ни слишком легкое, ни слишком трудное задание не может само по себе породить для учащегося проблемную ситуацию. Главной задачей для педагога в организации проблемного обучения является поиск соответствующих проблемных ситуаций, которые находились бы на достаточно высоком, но доступном для учащихся уровне трудности, порождали бы потребность и обеспечивали возможность получения учащимися подлинно нового знания, которое по своему психологическому содержанию равноценно пусть небольшому, но интересному ребенку открытию.

В рамках рассматриваемой теории обучения Л.В. Занков сформулировал ряд дидактических принципов, известных в настоящее время как *дидактические принципы развивающего обучения*. Приведем формулировки этих принципов и раскроем их содержание.

Принцип обучения на высоком уровне трудности. В соответствии с ним процесс обучения нацелен не на заучивание фактов и способов действий (пусть и в системе, и последовательно и т. п.), а на познание сущности изучаемых явлений, связей и зависимостей между ними. Реализация этого принципа в процессе обучения предполагает систематический подбор педагогом специальных заданий, которые требуют от ребенка постоянных умственных усилий (хотя бы небольших!), а не использования механического запоминания и воспроизведения наизусть. Высокий уровень трудности абсолютно индивидуален (это субъективное восприятие — одно и то же одному труднее, чем другому). Методическое мастерство педагога при работе на основе этого принципа состоит в том, чтобы так подобрать *проблемное задание*, чтобы его трудность при определенном умственном усилии оказалась преодолимой для многих детей, иначе ее высокий уровень будет выступать как отрицательный фактор. Именно такой способ обучения в свое время Л.С. Выготский называл «обучение в зоне ближайшего развития». При этом положительные эмоции от осознания ребенком самостоятельно преодоленной трудности (Я сумел! Сам!) сыграют роль фиксатора результата в памяти намного лучшего, чем «многократные повторения в разных вариациях».

Принцип обучения быстрым темпом. Этот принцип исключает однообразное повторение и «топтание на одном месте» (такой урок Л.В. Занков называл «жвачкой»). При соблюдении этого принципа многократное повторение «вариаций» — это просто «методическое преступление». Суть состоит в том, что не должно быть повторения ради повторения. Повторение происходит, но только в виде включения усвоенных понятий и способов действий в новые связи. Повторение такого вида обеспечивает постоянную новизну в изучении материала — на каждом занятии ребенок усваивает что-то новое, пусть в совсем небольшой «дозе», поднимается еще на одну маленькую ступеньку «лестницы образования». Соблюдение этого принципа требует отказа от однотипных тренировочных упражнений и однообразного повторения пройденного. Отсюда следует, что не может быть такого типа урока как «урок закрепления пройденного» или «урок повторения пройденного», но могут быть «уроки обобщения и систематизации материала», «уроки формирования обобщенных умений и способов действий». Соблюдение этого принципа в данной трактовке обусловливает быстрое продвижение ребенка вперед при постоянном поддержании активного познавательного интереса (ребенок знает, что каждый урок приносит что-то новое, неожиданное, что стимулирует его любопытство, а в младшем возрасте любопытство — это предвестник и проводник познавательного интереса).

Принцип ведущей роли теоретических знаний в обучении. Под теоретическими знаниями понимается осознание ребенком принципов построения изучаемых систем и их обобщенных характеристик (если это возможно). Например, в математике, в соответствии с этим принципом не нужно заучивать с ребенком результаты сложения и вычитания числа с единицей вида 7 + 1, 7 – 1 и т. п. Достаточно донести до него принцип образования чисел в натуральном ряду: следующее число всегда на единицу больше предыдущего. Значит, в случае «число + 1» в результате всегда будет просто следующее число, а в случае «число — 1» в результате всегда будет число предыдущее. И этот принцип работает всегда, в любом концентре, для любого натурального числа. Иными словами следует знакомить ребенка с обобщенными способами действий (что является в то же время очень экономичным способом обучения, когда «одним выстрелом убиваем сразу всех зайцев») и обобщенными понятиями, законами и правилами (что в целом согласуется с теорией обучения по В.В. Давыдову). Такой способ обучения в свою очередь формирует у ребенка так называемые обобщенные мыслительные структуры, характеризующие теоретический стиль мышления. Главная трудность в следовании этому принципу

состоит в том, что педагог должен достаточно качественно владеть содержанием предмета, чтобы уметь строить обучение ребенка на использовании этих обобщенных принципов и понятий (иными словами, педагог сам должен хорошо понимать, что есть обобщенный принцип и обобщенное понятие или способ действий).

Принцип осознания процесса учения. Смысл этого принципа состоит в том, что следует так строить учебные ситуации и подбирать учебные задания, чтобы ребенок не только понимал смысл того, что изучает, но и понимал, *зачем и почему* он это изучает (причем, конечно, не в варианте: «Учи, Петя, тебе это потом пригодится!»). Другими словами, объектом осознания для ребенка должен являться сам процесс усвоения знаний, последовательность и взаимосвязь выполняемых операций и необходимость контролировать себя в процессе работы. При соблюдении данного принципа на первый план выступает учебная мотивация, процесс осознания и принятия учебной задачи, формирование и развитие самооценки и самоконтроля у ребенка.

Принцип целенаправленной и систематической работы над развитием всех детей, в том числе и слабых. Этот принцип требует тщательного изучения педагогом личностного своеобразия ребенка, анализа и выявления причин задержки его развития или плохих успехов в обучении и разработки и применения к данному ребенку таких технологических приемов обучения, которые помогают ему в усвоении материала, а также компенсируют и корригируют недостатки или своеобразие его мыслительной деятельности и психических процессов. При ориентации на этот принцип педагог не просто фиксирует, что, например, у ребенка небольшой объем и плохая устойчивость внимания, что естественно мешает ему в усвоении знаний, а, установив этот факт, планирует и систематически проводит индивидуальную работу с ребенком по развитию этих характеристик психического процесса. Или, например, педагог видит, что ребенок медлителен (медленно думающий ребенок), поэтому он не успевает выполнить нужную работу за отведенное время (не потому, что не понимает, а потому, что медлителен). Значит, педагог должен учесть это при организации выполнения задания в классе (дать ребенку задание раньше, чем другим; или оставить его спокойно заканчивать работу после урока; или раздробить ребенку задание на две составные части, одну из которых ребенок успеет выполнить сегодня, а другую — завтра и т. п.). Кроме того, необходимо выяснить, чем обусловлена медлительность — типом мыслительной деятельности (тогда педагогу к ней надо приспосабливаться), или заниженной самооценкой ребенка, когда он долго не решается приступить к работе (тогда надо работать над коррекцией и становлением самооценки) и т. п.

Многолетние и разнообразные психологические исследования показали, что такая работа над общим развитием ребенка эффективно сказывается на его учебных успехах (например, коррекция недостатков внимания резко повышает грамотность ученика, формирование у ребенка приемов самоконтроля значительно уменьшает количество вычислительных ошибок, развитие приемов мыслительной деятельности улучшает умение решать задачи и т. п.).

Экспериментальное обучение младших школьников в соответствии с этими принципами проводилось с 1957 г. Его результаты были настолько существенны, что это сыграло ведущую роль в замене курса «Арифметика» в начальной школе на курс «Математика» в 1968 г., а также в создании всех альтернативных программ для начальной школы, действующих сегодня.

2. Организация урока математики в начальных классах

Позиция педагога при постановке цели урока (т. е. формулировки желаемых результатов) определяется его дидактической позицией: что он желает делать на уроке — учить или развивать? От определения этой позиции зависит его ориентация на типовую (классическую) структуру урока в соответствии с классической системой дидактических принципов: актуализация знаний, объяснение нового, закрепление, контроль, повторение; или структуру развивающего урока в соответствии с новой системой дидактических принципов Л.В. Занкова: подготовительная работа к постановке проблемной ситуации, постановка проблемной ситуации, организация осознания учебной задачи и ее принятия детьми (что конкретизирует познавательный мотив: «Интересно... ну и как же тут поступить, как это все-таки сделать?»), подготовка и организация системы моделирующих действий (или заданий) для решения проблемной ситуации, организация процесса осознания необходимости и рациональности нового знания, и на следующем этапе — организация ситуации, стимулирующей перенос нового знания или умения на расширенный содержательный объем, обобщение этого знания или умения и упрочение его в виде обобщенного способа действий или обобщенного понятия.

На первый взгляд, последний перечень кажется крайне сложным, поскольку сформулирован в новой достаточно непривычной многим педагогам лексике современной теории и психологии обучения. На самом деле, при подготовке к уроку, составляющие дидактические позиции органически «перетекают» одна в другую и педагогу остается лишь следить за тем, чтобы процесс не остановился «в трудном месте» и завершился искомым *обобщением*.

Очевидно, что в центре рассматриваемой методической технологии стоит *умение педагога организовать проблемную ситуацию* на уроке (на рассматриваемом математическом содержании), причем «подать» ее в такой форме, чтобы дети поняли суть проблемы и захотели выполнить действия по ее решению (принятие учебной задачи и организация учебной мотивации). Следующее важнейшее методическое умение — это *умение построить систему моделирующих действий ребенка* с изучаемым понятием или способом действий. При этом, чем младше ребенок, тем значимее роль вещественных моделей понятий или способов действий. И, наконец, последнее — это методическое умение так *организовать процесс «подведения итога» деятельности*, чтобы дети самостоятельно сформулировали искомый вывод, причем на максимально возможном на данный момент уровне обобщения.

Две рассмотренные выше дидактические схемы (классическая и развивающая) определяют *внешнюю структуру урока* (этапы урока, на которых решаются те или иные дидактические задачи). Однако этим не исчерпываются базовые компоненты урока математики. Следует помнить, что содержание курса математики в настоящее время также является внешним компонентом, никак не связанным с рассмотренными выше принципами. Иными словами, рассмотренные принципы теории обучения не определяют сегодня содержание обучения младших школьников математике. Это содержание является совершенно самостоятельным, более того, это содержание традиционно настолько, что в целом практически не отличается от содержания, изучавшегося нашими бабушками и дедушками в начале века.

Проблема обновления содержания обучения в начальных классах является частью проблемы организации развивающего обучения ребенка младшего школьного возраста. Психологическое обоснование важности и особой значимости этой проблемы было разработано Д.Б. Элькониным и В.В. Давыдовым, в исследованиях которых было детально показано, что решающим фактором в развитии мышления младших школьников выступает содержание обучения. Тем не менее, изменения собственно содержания обучения за последние 30 лет в математическом образовании младших школьников практически не происходило, что в общем подтверждает проведенный в главе 1 анализ содержания сегодняшних альтернативных программ по математике для начальных классов.

Сопоставляя различные системы обучения математике младшего школьника сегодняшнего дня, представленные на рынке образовательных технологий более чем десятком различных комплектов учебников и учебных пособий различных авторов и авторских коллективов, можно отметить лишь незначительные содержательные различия этих учебников. Фактически эти содержательные различия касаются в основном учебников для 1 класса, и обусловлены, главным образом, способом подведения ребенка к знакомству с понятием «натуральное число» (либо через знакомство с мерами величин в учебниках школы В.В. Давыдова; либо через оперирование с дискретными множествами в учебных пособиях А.М. Пышкало, К.И. Нешкова; либо через организацию деятельности и с теми и с другими понятиями в учебнике Н.Я. Виленкина, Л.Г. Петерсон, либо непосредственно сразу же за небольшим этапом работы по уточнению умения выделять внешние признаки объектов — работа с числом и счетом предметов во всех остальных учебниках). Уже ко 2 классу все содержательные различия сглаживаются, что является совершенно закономерным следствием того, что сегодня (как и десятилетия назад), несмотря на декларирование ценности и самостоятельной значимости каждого периода в жизни ребенка, начальная школа по-прежнему воспринимается большинством педагогов (особенно педагогов-предметников) всего лишь как подготовительный этап к переходу в среднюю школу.

Начальная школа сегодня — это фактически замкнутый концентр системы образования, нацеленный главным образом на то, чтобы дать ребенку элементарные навыки чтения, письма, счета и расширить его представления об окружающем мире. Крайний консерватизм этого концентра поддерживается не только фактически единой программой содержания образования в начальной школе (госстандарт), но и общепринятой системой подготовки учителей для начальных классов как в педучилищах, так и на соответствующих факультетах вузов. В частности, математическая подготовка этих учителей жестко ограничена рамками небольшого объема элементарной математики, выстроенного, главным образом, вокруг понятия «натуральные числа» и операции с ними. Такое содержание математической подготовки учителя было обусловлено долгими годами работы по единому учебнику (стабильному) во всех регионах бывшего Советского Союза и теперешней России. Этот единый учебник был выстроен целиком и полностью на основе понятия «натуральное число» и действиях с ним (счет, вычисления, измерение скалярных величин и действия с именованными числами, арифметические задачи).

Сегодня эта жесткая связь становится главным камнем преткновения на пути обновления содержания обучения младших школьников. Учитель начальных классов не готов к такому обновлению содержания.

Возможно, именно поэтому практически все методические исследования последних десятилетий, порожденные процессом «поворота школы лицом к ребенку», процессом упрочения позиций развивающего обучения, тем не менее разрабатывают, главным образом, проблемы управляемых изменений методов обучения младших школьников (сегодня это принято называть «технологии»), но практически не касаются изменения содержательной стороны обучения. Те небольшие содержательные изменения, составляющие 3—4 понятия или способа действий, которые имеют место в существующих учебниках нельзя считать значимыми в решении проблемы обновления содержания обучения младшего школьника. Однако такие изменения необходимы, если всерьез вести речь о том, что содержание обучения определяет не только уровень развития мышления ребенка этого возраста, но и, как показано В.В. Давыдовым[1] определяет стиль и способы его мыслительной деятельности.

Таким образом, реально «управляемая» учителем область технологии развивающего обучения, на сегодня ограничена внутренней структурой урока (поскольку принципы обучения дает ему принятая им теория обучения, а содержание обучения — государственная программа обучения и требования к знаниям, умениям и навыкам школьников по окончании начальной школы).

Обратимся к этой внутренней структуре урока, которая, на наш взгляд, предоставляет учителю не так мало возможностей, как это кажется на первый взгляд. Прежде всего, хотелось бы отметить, что значение работы, проделанной авторами и разработчиками концепций развивающего обучения, состоит отнюдь не в том, что они «открыли» этот тип обучения, — он существовал и существует вне зависимости от какой-либо концепции. Но они впервые попытались построить теоретические модели развивающего обучения и «перевести» их с языка чистой теории на язык «рабочей» технологии.

Тем самым оно оказалось открытым для рядовых учителей, далеко не каждый из которых обладает данными, позволяющими создавать шедевры педагогического искусства, но любой при желании и настойчивости может стать мастером развивающего обучения, овладев его технологией. Именно ставка на владение учителем *технологиями развивающего обучения*, а не на его искусство, делает сегодня развивающее обучение достоянием массовой общеобразовательной школы.

При этом имеет место не очень акцентированный в сегодняшних педагогических исследованиях, но реальный обоюдный процесс развития: развивающее обучение оказывается таковым не только для учащихся, но и для осуществляющего его учителя. Оно формирует у него (учителя) сначала способность к педагогическому творчеству, затем склонность к нему и, наконец, — потребность в нем. При этом ограниченность такого творчества на первых порах

[1] См.: *Давыдов В.В.* Виды обобщения в обучении. М., 1972.

рамками внутренней структуры урока скорее помогает педагогу, чем сдерживает его возможности. Практика показывает, что освоение технологии развивающего обучения не только не закрывают возможность педагогического творчества, а, наоборот, способствует включению учителей в творческий поиск. Многие учителя, проработавшие несколько лет в рамках этих концепций, нашли себя и создали в результате уникальные авторские методики.

Рассмотрим, из чего складывается *умение спланировать и разработать внутреннюю структуру урока.* Эта структура определяется содержанием и последовательностью учебных заданий, взаимосвязью между ними, и определяет характер деятельности детей при изучении математических понятий и способов действий с ними.

Таким образом, внутреннюю структуру урока определяет *система заданий* (упражнений), выполняя которые ребенок знакомится с существенными свойствами математических объектов, их взаимосвязью и взаимозависимостями, знакомится с новыми понятиями, приобретает знания и умения, продвигаясь в своем развитии. От того, какие задания подбирает педагог для данного урока, в какой последовательности их выстраивает, насколько им подготовлена и разработана система моделирующих действий ребенка, направленная на решение проблемы поставленной в задании, зависит достижение целей обучения, характер, способ и уровень самостоятельности детской деятельности на уроке.

Через учебные задания (упражнения) реализуются различные функции развивающего обучения:

1) *мотивационные* (задание в игровой форме, проблемное задание);

2) *развивающие* (задания, выполнение которых формирует и развивает психические процессы ребенка);

3) *познавательные* (задания, выполнение которых подводит ребенка к новым знаниям или осознанию нового способа деятельности);

4) *дидактические* (задания, воспитывающие различные качества характера — аккуратность, внимательность, прилежание, произвольность; или задания, готовящие ребенка к пониманию смысла проблемной ситуации, задания, выполнение которых обусловливает обобщение способа действия или понятия);

5) *контролирующие* (задания, качество выполнения которых показывает педагогу и самому ребенку уровень владения им знанием или способом действия).

Мы полагаем важным обозначить еще одно методическое умение педагога — *умение осознанно составлять и выстраивать задания в систему*, имея в виду достижение цели урока. Это умение можно по аналогии с принципами развивающего обучения назвать

«умением осознавать и управлять методическим процессом на уроке». На основе этого осознания педагог может правильно разработать внутреннюю структуру урока (систему заданий).

Теоретически предполагается, что любой педагог, закончивший специальное учебное заведение (педучилище, педвуз) умеет правильно опознавать цель задания (как дидактическую, так и математическую) в учебниках любого предмета. Тем не менее, опыт работы в системе заочного обучения и системе повышения квалификации учителей начальных классов показывает, что именно опознание цели задания, разведение его математического смысла и развивающей направленности, более всего затрудняет педагога при столкновении с новым учебником математики. В последние годы в продаже появились разнообразные «решебники» и методички, содержащие решение примеров, задач и уравнений и ответы на различные вопросы из различных учебников математики. Однако не существует ни одного методического пособия ни к одному учебнику, которое бы имело целью сделать для учителя «прозрачной» триединую цель каждого задания (обучающую, развивающую, воспитывающую). В те времена, когда все учителя страны работали по одному (традиционному) учебнику математики, такие пособия, возможно, и не были необходимыми, поскольку на практических занятиях по методике обучения математике студентов обучают «расшифровке» цели задания на соответствующей странице учебника. На сегодня такая «расшифровка» по всем существующим учебникам невозможна как в силу ограниченности времени изучения данного предмета в учебных заведениях, отсутствия собственно самих альтернативных учебников в нужных количествах в библиотеках вузов, так и тем, что отказ от единого для всей страны учебника снял ограничения для авторских концепций и программ: сегодня новые учебники появляются едва ли не ежегодно. Естественно их появление невозможно предугадать и соответственно заранее научить будущего педагога конкретным приемам работы с этим учебником. В то же время, неумение учителя правильно определить цель и роль того или иного задания превращает его в раба учебного пособия, когда учитель либо слепо доверяет автору учебника, не в силах что-то видоизменять в последовательности заданий, даже если очевидно, что дети его класса не готовы к такой структуре урока; либо «выдергивает» из последовательности заданий, предлагаемой автором, те, что кажутся ему наиболее привлекательными или целесообразными, полностью нарушая при этом как логику урока, так и замысел автора. Таким образом, неумение учителя осознать смысл задания и его роль на уроке лишает его возможности управлять методическим процессом на уроке.

3. Классификация учебных заданий

Приведем одну из возможных классификаций учебных заданий (упражнений), разработанных для учителей начальной школы[1]. В дидактике учебные задания классифицируют по различным основаниям.

В зависимости от этапов обучения выделяют задания:

1) *на актуализацию знаний, умений и навыков* (задания, выполнение которых готовит детей к пониманию сути и смысла проблемной ситуации);

2) *связанные с изучением нового материала* (задания, попытки выполнить которые ставят перед ребенком проблемную ситуацию, или подводящие детей к осознанию недостаточности наличного уровня знаний или умений);

3) *на закрепление и применение знаний и умений* (задания, выполнение которых требует от ребенка применения вновь приобретенных знаний или умений в различных практических ситуациях);

4) *на повторение* (задания, выполнение которых требует от детей применения ранее приобретенных знаний или умений в новых или вариативных практических ситуациях);

5) *контролирующие* (задания, процесс выполнения, качество выполнения или способ выполнения которых ребенком показывает педагогу и самому ребенку уровень и качество его достижений на данном этапе).

Употребление одного и того же задания на различных этапах обучения будет менять его тип.

В зависимости **от характера познавательной деятельности ребенка** задания подразделяются на:

1) *репродуктивные* (требующие воспроизведения выученных ранее знаний или способов действий);

2) *тренировочные* (требующие от ребенка либо подражания данному педагогом образцу, стремясь при этом достичь наибольшего сходства с ним; либо самостоятельного применения ранее приобретенных знаний, умений и навыков в условиях, аналогичных тем, в которых они формировались);

3) *частично-поисковые* (требующие от ребенка либо применения ранее приобретенных знаний, умений и навыков в условиях, в большей или меньшей степени отличающихся от тех, которые имели место при их формировании; либо частичной самостоятельности в выборе способа действия; либо переноса наличного способа действия в другие условия и применения его на другом родственном содержании);

[1] См.: *Истомина Н.Б.* Методика обучения математике в начальных классах. М., 2000.

4) *творческие* (требующие от ребенка поисковой активности при выполнении нового непривычного вида задания; либо самостоятельного выбора и применения нужного способа действия из имеющихся в наличии на непривычном содержании; либо «изобретения» нового способа действия или видоизменения старого для выполнения новых функций).

Данная классификация позволяет определить дидактическую цель задания. Дидактические цели заданий являются едиными для любого года обучения и любого учебного предмета.

Методическую цель задания определяет главным образом его математическое содержание. Это содержание зависит от программы обучения в соответствующем классе. Рассмотрим содержательную классификацию математических заданий в 1 классе.

В зависимости **от содержания материала** задания математического характера в 1 классе подразделяются на:

1. ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Упражнения на выделение признаков объекта

1. Цвет, его оттенки

К этой группе относятся все задания, вопросы, игры, в которых дети упражняются в различении и назывании основных цветов: черный, белый, красный, синий, зеленый, желтый. Обсуждаются любые предметы окружающей обстановки, одежда, различные предметы с указанием их цвета. Сюда же относятся задания типа: «в эту коробку сложи все красные, а в эту — все синие» и т. д. (классификация по цвету с указанием основания для классификации).

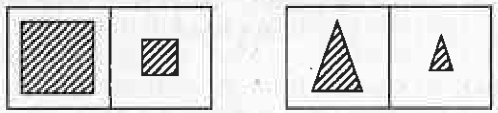
Когда ребенок научится уверенно различать, называть и выбирать контрастные цвета, вводятся оттенки: светло-красный и темно-красный и т. д., а затем близкие цвета: красный — розовый — оранжевый; синий — голубой — фиолетовый и др. Активно используются вопросы: «Что бывает синее?» «Что бывает красное?» и т. д.

2. Величина: большой — маленький, длинный — короткий, тяжелый — легкий, низкий — высокий

К этой группе относятся задания, вопросы, игры, в которых ребенок учится сравнивать объекты по размеру на глаз, путем помещения один в другой, путем прикладывания одного к другому (палочки, ленты, ладони, шарфики, куклы и т. д.) или наложения один на другой, а также по тяжести — путем прикидки на руке (деревянный и пластмассовый кубик, легкая коробка и тяжелая книга и т. д.). Сюда же относятся ситуации, когда ребенок учится характеризовать количество и объем словами «много — мало» (много воды в банке, мало — в чашке; много песка в ведерке, мало в формочке; много яблок в тазу, мало — на тарелке и т. д.).

3. Форма: одинаковая — разная

В этих вопросах и заданиях педагог обращает внимание ребенка на такой признак предмета, как форма. С этой целью используют разнообразные дидактические наборы и строительные конструкторы. Существует множество игр типа «Найди пару», направленных на поиск одинаковых объектов. Интересно использовать другой вариант этой игры: «Найди такой же, но синий», «Найди такой же, но большой». Таких наборов нет в готовом виде, их надо подобрать из любых подходящих пар. Педагог должен следить, чтобы формы были тождественными полностью. Строить такую игру удобно на базе геометрических форм и фигур, так как трудно подобрать изображения абсолютно одинаковых по форме, но разных по цвету животных и т. д.



В школьных учебных пособиях часто используется сравнение картинок, однако при плохом уровне сформированности внимания и восприятия дети работают с этими заданиями недостаточно продуктивно.

Упражнение на выделение количественных характеристик множеств

1. «Один — много» (визуальное распознавание)

Характеристика «много» оценивается визуально и не требует уточнения счетом, характеристика «один» — это уже начало обучения отсчитыванию, поэтому ее надо связывать с деятельностью. Используются задания вида: «Много тетрадей на столе. Положи каждому одну тетрадь», «Много карандашей в коробке. Дай всем по одному карандашу» и т. д.

2. «Столько же» (взаимно-одиночное соответствие)

Характеристика «столько же» предполагает деятельность по получению множеств, эквивалентных данному, т. е. содержащих то же количество элементов. На подготовительном этапе следует ориентироваться на использование способа взаимно-однозначного соответствия: «Положи каждому по одному карандашу. Всем хватило карандашей? Карандашей столько же, сколько детей».

3. «Больше — меньше» (лишнее — не хватает)

Рассматриваем ту же ситуацию с карандашами.

— Карандашей не хватило? Кого больше: детей или карандашей? Почему? *(Пете и Ване не хватило.)*

— Карандашей меньше? Что делать? *(Еще один добавить Ване и один Пете.)*

— Карандашей больше? Почему? *(Эти лишние.)*

4. «Уравнивание количеств» (добавить — убрать)

При уравнивании множеств предметов, используется прием установления взаимно-однозначного соответствия (образование пар).

Если предметов не равное количество, то для уравнивания используется прием удаления «лишних» или добавления «недостающих», результат деятельности фиксируется при этом словами: чтобы стало одинаково, надо еще добавить, надо убрать лишние. При освоении количественных характеристик «два» и «три», используются упражнения аналогичного вида: раздай всем «по два», «по три» (равные количества) предмета (тетради, карандаши, фишки).

5. «Увеличение или уменьшение наличного количества (увеличить на, уменьшить на)

Задания этого типа требуют добавления к наличному количеству нескольких элементов (или изъятия). При этом пересчет начального количества не обязателен.

6. Соотнесение количеств (на сколько больше, на сколько меньше)

Задания этого типа требуют сравнения путем установления взаимно-однозначного соответствия: элементы множества, оставшиеся без пары, показывают «на сколько больше» или «на сколько меньше».

7. Изменение количественной характеристики множества или величины и ее символическое описание (арифметические действия)

Задания этого вида готовят ребенка к пониманию смысла арифметических действий.

8. Соотнесение количественных характеристик и обозначений (счетные действия)

Задания этого вида требуют от ребенка знания названий числительных и правильного их употребления в процессе счета.

Упражнения на пространственное расположение предметов

1. Расположение на линии (за, перед, следом, между)

Задания этого вида учат ребенка ориентироваться в расположении предметов на линии, что является важным для последующего понимания структуры натурального ряда, которую принято ассоциировать с линейно выстроенным рядом чисел.

2. Расположение относительно замкнутой линии: внутри и вне (снаружи)

Задания этого вида готовят ребенка к осознанию понятия ограниченности, принадлежности, замкнутости и т. п.

3. Расположение в пространстве (над, под, перед и т. д.)

В речевом общении на любом уроке учитель активно использует предлоги и наречия, характеризующие пространственное расположение ребенка и предметов. Следует не просто употреблять их, характеризуя уже организованную ситуацию, а сделать ребенка главным исполнителем «ситуации по заданию»: встань *на* коврик; спрячь *под* коврик; поставь чашку *на* блюдце; лампа *над* головой; мяч *за* шкафом; стул *у* двери; Вова *за* дверью; войди *в* комнату; Катя, встань *перед* Ирой; положи книгу *в* портфель и т. д.

4. Расположение на плоскости (выше, ниже, в центре, рядом и т. д.)

Освоение расположения на плоскости требует абстрагирования от привычной ребенку с рождения пространственной среды. Плоскость двумерна, в отличие от трехмерного пространства, а отношение «впереди» в пространстве отличается от отношения «перед чем-то» на плоскости, где оно связано больше с отношением «следовать перед», «предшествовать», т. е. быть расположенным в ряду левее. В связи с этим сначала лучше работать над отношениями «выше», «ниже», так как на плоскости эти отношения — аналог пространственного расположения (выше домика — небо, солнце, тучи; ниже — трава, цветы, ежик, земля, дерево). Для характеристики других отношений на плоскости лучше сначала использовать слово «рядом», постепенно включая в активный словарь ребенка характеристики «справа — слева». Работая на плоскости листа, постепенно также вводим в активный словарь ребенка слова: в центре строки, в правом углу, в нижнем углу, в верхнем углу.

Упражнения на развитие познавательных процессов

Познавательные процессы — это основные формы психической деятельности, позволяющие быстро, глубоко и правильно ориентироваться в явлениях окружающей действительности.

1. Мышление — познавательная деятельность человека по выявлению внешне скрытых особенностей объекта, характеризующаяся обобщенностью и опосредованностью; применение, преобразование и обновление запаса полученных в учении знаний.

Мышление теоретическое — познание и обнаружение законов, принципов.

Мышление практическое — познание, осуществляемое в ходе практической деятельности, выработка планов и программ действий.

Мышление творческое — создание в ходе познания продукта, субъективно или объективно нового.

Успешность этого специфического познавательного процесса обеспечивается сформированностью у человека характерных приемов умственных действий: *анализ, синтез, сравнение, обобщение* и др.

Сериация — построение упорядоченных *возрастающих* или *убывающих* рядов. Классический пример сериации: матрешки, пирамидки, вкладные мисочки и т. д.

Сериации можно организовать по размеру: по длине, по высоте, по ширине — если предметы одного типа (куклы, палочки, ленты, камешки и т. д.) и просто «по величине» (с указанием того, что считать «величиной»), если предметы разного типа (рассортировать игрушки по росту). Сериации могут быть организованы по цвету: по степени интенсивности окраски.

Анализ — выделение свойств объекта, или выделение объекта из группы, или выделение группы объектов по определенному признаку.

Например, задан признак: все кислые. Сначала у каждого объекта множества проверяется наличие или отсутствие этого признака, а затем они выделяются и объединяются в группу по признаку «кислые».

Синтез — соединение различных элементов (признаков, свойств) в единое целое. В психологии анализ и синтез рассматриваются как взаимодополняющие друг друга процессы (анализ осуществляется через синтез, а синтез — через анализ).

Н.Б. Истомина отмечает, что «способность к аналитико-синтетической деятельности находит свое выражение не только в умении выделять элементы того или другого объекта, его различные признаки или соединять элементы в единое целое, но и в умении включать их в новые связи, увидеть их новые функции»[1]. Задания на формирование умения выделить элементы того или иного объекта (признаки), а также на соединение их в единое целое можно предлагать с первых же шагов математического развития ребенка.

Например:

А. Задание на выбор предмета из группы по любому признаку:

Возьми красный мячик.
Возьми красный, но не мячик.
Возьми мячик, но не красный.

Б. Задание на выбор нескольких предметов по указанному признаку:

Выбери все мячики.
Выбери круглые, но не мячики.

В. Задание на выбор одного или нескольких предметов по нескольким указанным признакам:

Выбери маленький синий мячик.
Выбери большой красный мячик.

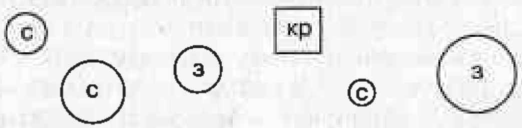
Задание последнего вида предполагает соединение двух признаков предмета в единое целое.

Для развития продуктивной аналитико-синтетической мыслительной деятельности у ребенка в методике рекомендуют задания, в которых ребенку необходимо рассматривать один и тот же объект с различных точек зрения. Способом организации такого всестороннего (или, по крайней мере, многоаспектного) рассмотрения является прием постановки различных заданий к одному и тому же математическому объекту.

[1] *Истомина Н.Б.* Методика обучения математике в начальных классах. М., 2000. С. 166.

Например:

Материал: На фланелеграфе набор фигур.



Задание: Какая из фигур в этом наборе лишняя? *(Квадрат.)* Почему? *(Все остальные — круги.)*

Материал: Тот же. Педагог убирает квадрат.

Задание: Оставшиеся круги разделите на две группы. Объясните, почему так разделили. *(По цвету, по размеру.)*

Материал: Тот же и карточки с цифрами 2 и 3 .

Задание: Что на кругах означает число 2? *(Два больших круга, два зеленых круга.)* Число 3? *(Три синих круга, три маленьких круга.)*

Материал: Тот же и дидактический набор.

Задание: Какого цвета был квадрат, который мы убрали? *(Красного.)* Откройте коробочки «Дидактический набор». У кого квадраты красные? Какого цвета еще есть квадраты? Возьмите столько квадратов, сколько фигур на фланелеграфе. Сколько квадратов? *(5)* Можно сложить из них один большой квадрат? Добавьте столько квадратов, сколько нужно. Сколько вы добавили квадратов? *(4)* Сколько их теперь? *(9)*

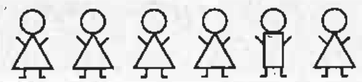
Традиционной формой на развитие визуального анализа являются задания на выбор «лишней» фигуры (предмета).

Например:

Материал: На доске нарисованы мелом фигурки.

Задание: Какая из фигур отличается от всех других? Чем она отличается?

Материал: Рисунок на доске.



Задание: Среди этих фигурок найдите лишнюю, отличающуюся от всех других. Почему она лишняя?

Более сложной формой такого задания является задание на выделение фигуры из композиции, образованной наложением одних форм на другие.

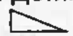
Материал: Рисунок на доске. 

Задание: На этом рисунке спрятано три треугольника. Найдите и покажите их.

Педагог помогает детям правильно показать треугольники (обвести маленькой указкой).

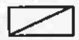
В качестве подготовительных заданий полезно использовать задания, требующие от ребенка синтеза таких композиций на вещественном уровне.

Материал: Детям даны по 4 одинаковых треугольника.



Задание: Возьмите два треугольника и сложите из них один. Теперь возьмите два других треугольника и сложите из них еще один треугольник, но другой формы.

Чем они отличаются? *(Один высокий, другой — низкий; один узкий, другой — широкий.)*

Можно ли сложить из этих двух  треугольников прямоугольник? *(Да.)* Квадрат? *(Нет.)*

Психологически способность к синтезу формируется у ребенка раньше, чем способность к анализу. На этой основе можно построить формирование аналитико-синтетического процесса: если ребенок знает, как это было собрано (сложено, сконструировано), ему легче анализировать и выделять составные части.

Сравнение – логический прием умственных действий, требующий выявления сходства и различия между признаками объекта (предмета, явления, группы предметов).

Выполнение сравнения требует умения выделять одни признаки объекта(ов) и абстрагироваться от других. Для выделения различных признаков объекта можно использовать игру «Найди это»:

– Что (из этих предметов) большое желтое? *(Мяч и медведь.)*

– Что большое, желтое, круглое? *(Мяч.)*

Ребенок должен использовать роль ведущего так же часто, как и отвечающего, это подготовит его к следующему этапу — умению отвечать на вопрос:

— Что ты можешь рассказать о нем? *(Арбуз большой, круглый, зеленый. Солнце круглое, желтое, горячее.)*

Вариант игры: Кто больше расскажет об этом? *(Лента длинная, синяя, блестящая, шелковая...)*

Вариант игры: «Что это: белое, холодное, рассыпчатое?» и т. д.

Методически рекомендуется сначала учить ребенка сравнивать два объекта, затем группы объектов. Маленькому ребенку легче сначала найти признаки различия объектов, затем — признаки их сходства.

Например:

А. Задания на разделение группы объектов по какому-то признаку (большие и маленькие, красные и синие и т. п.) требуют сравнения.

Б. Все задания вида «Найди такой же» направлены на формирование умения сравнивать. При этом количество и характер признаков сходства может широко варьироваться.

Приведем пример задания, в котором от ребенка требуется сравнение одних и тех же предметов по различным признакам:

Материал: На фланелеграфе изображения двух яблок: маленькое желтое и большое красное. У детей набор фигур: треугольник синий, квадрат красный, круг маленький зеленый, круг большой желтый, треугольник красный, квадрат желтый.

Задание: Найдите среди своих фигур похожую на яблоко.

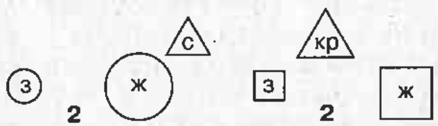
Педагог по очереди предлагает рассмотреть каждое яблоко. Дети подбирают похожую, выбирая основание для сравнения: цвет, форма.

— Какую фигурку можно назвать похожей на оба яблока? *(Это круги. Они похожи на яблоки формой.)*

Материал: Тот же и набор карточек с цифрами от 1 до 9.

Задание: Отложите направо все желтые фигуры. Какое число подходит к этой группе? Почему 2? *(Две фигуры.)* Какую другую группу можно подобрать к этому числу? *(Треугольник синий и красный — их два; две красные фигуры; два круга; два квадрата — разбираем все варианты.)*

Дети составляют группы, зарисовывают и закрашивают их и подписывают под каждой группой цифру 2.



— Возьмите все синие фигуры. Сколько их? *(1)* Сколько здесь всего цветов? *(4)* Фигур? *(6)*

Умение выделять признаки объекта и, ориентируясь на них, сравнивать предметы является универсальным, применимым к любому классу объектов. Однажды сформированное и хорошо развитое,

это умение затем будет переноситься ребенком на любые ситуации, требующие его применения.

Показателем сформированности приема сравнения будет умение ребенка самостоятельно применять его в деятельности без специальных указаний педагога на признаки, по которым нужно сравнивать объекты.

Классификация — разделение множества на группы по какому-либо признаку, который называют «основание классификации». Классификацию можно проводить либо по заданному основанию, либо с заданием поиска самого основания (этот вариант чаще используется со старшими детьми, так как требует определенного уровня сформированности операций анализа, сравнения и обобщения). Следует учитывать, что при классификационном разделении множества полученные подмножества не должны попарно пересекаться и объединение всех подмножеств должно составлять данное множество. Иными словами, каждый объект должен входить только в одно множество и при правильно определенном основании для классификации ни один предмет не останется вне определенных данных основанием групп.

Классификацию с детьми младшего возраста можно проводить:

1) по названию (чашки и тарелки, ракушки и камешки, кегли и мячики и т. д.);

2) по размеру (в одну группу большие мячи, в другую — маленькие мячики, в одну коробку длинные карандаши, в другую — короткие и т. д.);

3) по цвету (в эту коробку красные пуговицы, в эту — зеленые);

4) по форме (в эту коробку квадраты, а в эту — кружки; в эту коробку — кубики, в эту — кирпичики и т. д.);

5) по другим признакам: что можно и что нельзя есть; кто летает, кто бегает, кто плавает; кто живет в доме и кто в лесу; что бывает летом и что зимой; что растет в огороде и что в лесу и т. д.

Все перечисленные выше примеры — это классификации по заданному основанию: педагог сообщает его детям, а дети выполняют разделение. В другом случае классификация выполняется по основанию, определенному детьми самостоятельно. Педагог задает количество групп, на которые следует разделить множество предметов (объектов), а дети самостоятельно ищут соответствующее основание. При этом такое основание может быть определено не единственным образом.

Например:

Материал: На фланелеграфе несколько кругов одинакового размера, но разного цвета (два цвета).

Задание: Разделите круги на две группы. По какому признаку это можно сделать? *(По цвету.)*

Материал: К предыдущему набору педагог добавляет несколько квадратов тех же цветов (два цвета) и перемешивает фигуры.

Задание: Разделите фигуры на две группы.

Возможны два варианта: по форме и по цвету. Педагог помогает детям уточнить формулировки: дети говорят обычно: «Эти — круги, эти — квадраты». Педагог обобщает: «Значит, разделили по форме».

В первом упражнении классификация была однозначно задана соответствующим набором фигур только по одному признаку, а во втором — дополнение набора фигур намеренно было произведено таким образом, чтобы стала возможной классификация по двум разным основаниям.

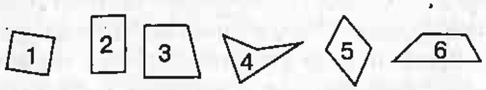
Обобщение — это оформление в словесной (вербальной) форме результатов процесса сравнения.

Обобщение формируется в младшем возрасте как выделение и фиксация общего признака двух или более объектов. Обобщение хорошо понимается ребенком, если является результатом деятельности, произведенной им самостоятельно, например, классификации: эти все большие, эти все маленькие; эти все красные, эти все синие; эти все летают, эти все бегают и т. д.

Все приведенные выше примеры сравнений и классификаций завершались обобщениями. Для младших школьников наиболее характерны эмпирические виды обобщения, т. е. обобщения результатов своей деятельности. Для подведения детей к такого рода обобщениям педагог соответствующим образом организует работу над заданием: подбирает объекты деятельности, задает вопросы в специально разработанной последовательности, чтобы «подвести» детей к нужному обобщению. При формулировке обобщения педагог помогает детям правильно его построить, употребить нужные термины и словесные обороты.

Например:

Материал: Набор фигур.



Задание: Одна из этих фигур лишняя. Найдите ее. *(Фигура 4.)*

Детям незнакомо понятие выпуклости, но они обычно всегда указывают на эту фигуру. Объяснять они могут так: *«У нее угол ушел внутрь»*. Это объяснение для данного этапа вполне подходит.

— Чем похожи все фигуры? *(У них 4 угла, это четырехугольники.)*

При подборе материала для задания педагог должен следить за тем, чтобы не получился набор, ориентирующий детей на несущественные признаки объектов, что будет подталкивать к неверным обобщениям. Следует помнить, что при эмпирических обобщениях дети опираются на внешние видимые признаки объектов, что не всегда помогает правильно раскрыть их сущность и определить понятие. Например, в приведенном примере фигура 4 в общем тоже является четырехугольником, но невыпуклым. С фигурами такого рода дети познакомятся только в 9 классе средней школы, где в учебнике геометрии формулируется определение понятия «выпуклая плоская фигура». В данном случае первая часть задания была ориентирована на операцию сравнения и выделения фигуры, отличающейся по внешней форме от других. Но обобщение сделано по группе фигур с характерными признаками часто встречающихся четырехугольников. Если у детей возникает интерес к фигуре 4 педагог может отметить, что это тоже четырехугольник, но необычной формы.

Методически формирование у детей способности самостоятельно делать обобщения является крайне важным с общеразвивающей точки зрения. В настоящее время происходят значительные видоизменения как в содержании так и в методике начального обучения математике в школе, целью которых является создание такого математического курса, который активно воздействовал бы на процесс развития у детей как эмпирического, так и в перспективе — теоретического обобщения.

2. Память — включает в себя процессы запоминания, сохранения и воспроизведения. Каждый человек обладает своим, присущим ему, наиболее сильным видом памяти (образной, словесно-логической, эмоциональной и др.). Однако в младшем возрасте два вида памяти больше поддаются целенаправленному развитию: образная и словесная. Развитие словесной памяти проводится путем заучивания различных считалок, стихов. Развитию образной памяти способствуют такие игры:

1) *«Что пропало?»* Рассмотрев с ребенком несколько небольших предметов на столе или изображений предметов на фланелеграфе (каждый из них ребенок должен уметь называть), педагог накрывает их платком и под платком прячет один в руке. Можно попросить ребенка отвернуться. Ребенок должен заметить, какой предмет исчез. Постепенно число предметов увеличивается. Прятать или убирать можно сразу 2—3 предмета.

2) *«Что изменилось?»* На столе выстраивается небольшая сюжетная группа, ребенок должен запомнить ее, затем педагог изменяет 1—2 детали (ребенок отворачивается). Задача ребенка — заметить, что изменилось:

— Мишка сидел на стуле, теперь — на полу. Кукла была в косынке, теперь без нее.

— Машина ехала к домику, теперь едет от домика. Кубик в кузове был синий, теперь — зеленый и т. д.

Для развития долговременного запоминания полезны упражнения с так называемой «отсрочкой», когда педагог просит ребенка воспроизвести материал не сразу, спустя некоторое время, после выполнения каких-то других действий.

3. Внимание — не являясь самостоятельным психическим процессом, внимание тем не менее — важное и необходимое условие эффективности всех видов деятельности человека. Внимание — это направленность и сосредоточенность сознания. Проявляясь как бы внутри познавательных процессов (восприятия, памяти, мышления), внимание способствует повышению их эффективности.

На данном возрастном этапе целесообразно развивать сенсорное внимание (зрительное и слуховое). Формирование и развитие слухового внимания связано с рассказыванием ребенку сказок, стихов, прослушиванием и обсуждением коротких музыкальных фраз (существуют специальные методики развития музыкального слуха и образного музыкального мышления).

Развитие зрительного внимания связано с упражнениями предыдущего пункта: «Что пропало?», «Что изменилось?», «Чем отличаются?» (показываете ребенку два предмета или рисунка предметов, отличающихся одним признаком: кот рыжий и кот серый; кукла большая и кукла маленькая; кукла с бантом и кукла без банта и т. д.).

Развитию запоминания способствуют упражнения типа «Найди такой же» (описаны выше), «Расскажи про него»: педагог показывает ребенку предмет в течение 5—10 с, затем ребенок по памяти его описывает или находит среди нескольких.

4. Восприятие — отражение в сознании человека предметов или явлений при их непосредственном воздействии на органы чувств. Хорошо развитое восприятие обеспечивает объединение отдельных ощущений в целостные образы вещей и явлений.

Восприятие — это своеобразная деятельность, направленная на обследование воспринимаемого объекта и на создание его адекватной модели (его подобия) в воображении (представлении). В продуктивном восприятии ребенком предмета огромное значение имеет действие, которым пользуется ребенок при восприятии. Развитие перцептивного действия (*перцепция* — восприятие, схватывание) связывается психологами с развитием сенсорных процессов и рассматривается как формирование ориентировочной деятельности. Таким образом, методически развитие восприятия стимулируется специальным обучением наблюдению (обследованию) и анализу наблюдаемого (обследуемого) предмета, явления и т. п.

При этом, сопровождая чувственное восприятие словом, т. е. давая соответствующие названия и определения (пояснения) ребенок собственно осмысливает то, что он наблюдает (обследует). Восприятие — сложный процесс, связанный в том числе и с накоплением определенного запаса образов (эталонов) и сравнением с этими эталонами наблюдаемых (обследуемых) объектов. Не следует думать, что восприятие не поддается развитию и изменению: приобретение личного опыта, усвоение системы общепринятых эталонов, овладение адекватными приемами наблюдения (обследования) изменяет сам способ восприятия, изменяются и его точность, объем, осмысленность.

Например, все упомянутые выше задания на развитие памяти, внимания, мышления будут в то же время развивать и восприятие ребенка.

Поскольку математические объекты являются абстракциями высокого уровня общности, проблема организации их восприятия связана с построением специальных моделей этих объектов, поддающихся сенсорному (зрительному и кинестетическому) восприятию.

Формирование у ребенка запаса адекватных математических «образов восприятия» требует от педагога безупречного владения теоретическими основами элементарной математики и методикой подачи этого материала в доступной ребенку форме, не искажающей при этом смысл понятия.

5. Воображение — процесс преобразования имеющихся представлений, создание новых образов на основе имеющихся. В основе творческого воображения лежит умение строить отражение реальной действительности в новых, неожиданных, непривычных сочетаниях и связях.

Воображение имеет характер аналитико-синтетический и поддается развитию с помощью специальных упражнений (например, система ТРИЗ).

Полезны упражнения вида:

На что это похоже? 

Возможные ответы:

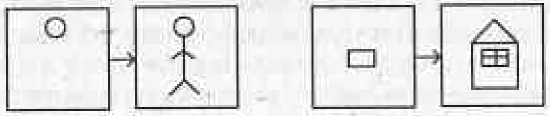
— на крышу, на шалаш, на стог сена, на букву А немножко и т. д.;
— на руль, на бублик, на колесо;
— на мост, на радугу, на гору и т. п.

Для чего это можно использовать? 

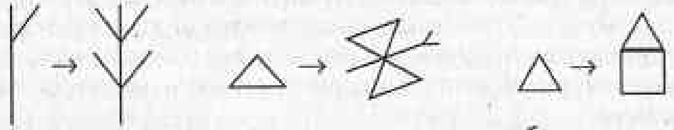
Возможные ответы:

— для еды; для расчесывания, если нет расчески; для доставания ягод из банки с компотом; для вычерчивания узоров на печенье перед выпечкой; для выкапывания ямки в песочнице и т. д.

Дорисуй, чтобы что-то получилось.



Дострой (из палочек, из мозаики), чтобы что-то получилось.



Исследования психологов показывают, что воображение является одним из важнейших факторов, определяющих уровень творческих возможностей человека. С другой стороны, имеются исследования, выявляющие корригируемость развития воображения и развития пространственного мышления человека (поскольку образное мышление является основой пространственного мышления), во всяком случае, для развития математических способностей такая взаимосвязь является очевидной.

Упражнение на развитие характерных качеств математического мышления

1. Гибкость мышления

Качество ума, позволяющее человеку легко менять «точку рассмотрения» предмета или объекта, его свойств, качеств и взаимосвязей с другими объектами; качество, позволяющее человеку варьировать и комбинировать условия задания, его результаты для выстраивания новых взаимосвязей с другими объектами; качество, позволяющее человеку не «зацикливаться» на каком-то одном способе видения объекта или решения проблемы, а уметь искать и находить другие способы, оригинальные и неожиданные.

2. Причинность мышления

Умение видеть и понимать причинно-следственные связи явлений, понятий, представлений. Это качество называют также логичностью, имея в виду именно умение устанавливать причинно-следственные связи, выстраивать умозаключения (два или больше высказываний, связанных «в цепочку» причинно-следственными отношениями).

3. Системность ума

Важное качество мышления, позволяющее человеку рассматривать объект, понятие или явление во взаимосвязи с другими понятиями, образующими систему его связей как с ближайшим видовым, так и более дальними родовыми объектами. Большое значение в развитии системности ума имеет аналитико-синтетическая деятельность мышления, большой объем внимания и хорошо развитая структурно-логическая память.

4. Пространственная подвижность мышления

По мнению многих математиков пространственная подвижность мышления имеет едва ли не решающую роль в становлении математического мышления; во всяком случае непременное наличие развитого пространственного мышления отмечается как необходимое качество ума математически способного человека; это качество ума дает возможность человеку действовать в воображении пространственными образами понятий или объектов, перемещая и компонуя их различными образами, при этом не теряя исходных форм, а также трансформировать эти образы в соответствии с необходимостью, не теряя при этом ни исходных форм, ни системы трансформированных образов, ни способов трансформации.

2. ИЗУЧЕНИЕ НУМЕРАЦИИ В ПРЕДЕЛАХ 10

1. Задания на способ образования каждого следующего числа путем присчитывания единицы к предыдущему.

Как из числа 3 получить 4? *(Добавить к трем один.)*

2. Задания на определение места числа в ряду.

За каким числом стоит число 5? *(За числом 4.)* Где место числа 8? *(Между числами 7 и 9.)*

3. Задания на сравнение как двух соседних, так и несоседних чисел:

Сравни: 5 ... 4 7 ... 2

4. Задания на состав числа.

5. Задания на запоминание обратной последовательности числительных в ряду:

Назови числа от 5 до 1.

Вставь пропущенные числа: $\boxed{6}\,\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{3}\,\boxed{}\,\boxed{1}$

Назови число, которое идет перед числом 5.

3. ИЗУЧЕНИЕ НУМЕРАЦИИ В ПРЕДЕЛАХ 20

1. Задания на способ образования чисел второго десятка:

Покажи тринадцать палочек. Сколько это десятков и сколько еще отдельных палочек?

2. Задания на принцип образования натурального ряда чисел:

Сделай рисунок к задаче и реши ее устно. В городе было 10 кинотеатров. Построили еще 1. Сколько кинотеатров стало в городе?

Уменьши на 1: 16 11 13 20

Увеличь на 1: 19 18 14 17

Найди значение выражения: 10 + 1; 14 + 1; 18 – 1; 20 – 1

Во всех случаях можно ссылаться на то, что добавление 1 ведет к получению числа последующего, а уменьшение на 1 — к получению числа предыдущего.

3. Задания на поместное значение цифры в записи числа:

Что обозначает каждая цифра в записи числа: 15; 13; 18; 11; 10; 20? *(В записи числа 15 цифра 1 обозначает количество десятков, а цифра 5 — количество единиц. В записи числа 20 цифра 2 обозначает, что в числе 2 десятка, а цифра 0 обозначает, что в первом разряде единиц нет.)*

4. Задания на место числа в ряду чисел:

Вставь пропущенные числа: 12 ... ... 16 17 ... 19 20

Вставь пропущенные числа: 20 ... 18 17 ... ... 13 ... 11

При выполнении задания ссылаются на порядок чисел при счете.

5. Задания на разрядный (десятичный) состав:

Заполни пропуски

10 + 3 = ...	13 – 3 = ...	13 – 10 = ...
12 = 10 + ...	15 = ... + 5	

При выполнении задания ссылаются на разрядную (десятичную) модель числа из десятка (пучка палочек) и единиц (отдельных палочек).

6. Задания на сравнение чисел второго десятка:

Какое из чисел больше: 13 или 15? 14 или 17? 18 или 14? 20 или 12?

При выполнении задания можно сравнивать две модели чисел из палочек (количественная модель), или ссылаться на порядок следования чисел при счете (меньшее число называют при счете раньше), или опираться на процесс присчитывания и отсчитывания (присчитывая к 13 две единицы получим 15, значит, 15 больше, чем 13).

Сравнивая числа второго десятка с однозначными числами, следует ссылаться на то, что все однозначные числа меньше, чем двузначные:

Назови самое большое и самое маленькое из этих чисел: 12; 6; 18; 10; 7; 20.

4. УСВОЕНИЕ СМЫСЛА АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ И ФОРМИРОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ НАВЫКОВ

1. Задания на соотнесение ситуации и выражения:

Подбери выражение к данной ситуации или измени ситуацию в соответствии с выражением (ситуация может быть изображена на картинке, нарисована на доске, смоделирована на фланелеграфе).

2. Задания на составление выражений по ситуациям:

Составь выражение в соответствии с ситуацией.

3. Задания на усвоение названий компонентов действий.

4. Задания на формирование вычислительной деятельности, состоящие из: подготовительных к знакомству с приемом вычислений, знакомящих с приемом вычислений, обучающих приему вычислений, закрепляющих прием вычислений, обобщающих прием вычислений на другой числовой области.

5. Задания на знакомство с правилами (законами) арифметических действий и их применение в вычислительной деятельности и при решении задач.

5. ЗНАКОМСТВО С ВЕЛИЧИНАМИ И ЕДИНИЦАМИ ИХ ИЗМЕРЕНИЯ

1. Задания, знакомящие ребенка с понятием «величина», ее свойствами и принципом ее измерения с помощью меры.

2. Задания на знакомство и способ применения стандартных мер величин.

3. Задания на перевод мер величин одного наименования в другие.

6. ЗНАКОМСТВО С ЗАДАЧЕЙ

1. Задания на подготовку к знакомству с задачей.

2. Задания на усвоение понятия задача.

3. Задания на формирование умения решать задачи.

Используя эти классификации, педагог может достаточно точно определить тип задания, а, следовательно, и его роль и место в системе заданий на уроке.

4. Деятельность педагога при планировании и проведении урока математики

Педагог, независимо от программы, учебных пособий и особенностей класса, может ориентироваться на общий способ деятельности, который позволит ему обдумать и выстроить логику урока. Общий способ деятельности, связанный с планированием занятия, можно представить в виде следующей последовательности вопросов:

1. Какие понятия, свойства, закономерности, способы деятельности рассматриваются на данном занятии?

Ответ на этот вопрос поможет педагогу четко сформулировать его математическое содержание и обозначить тему урока (т. е. то, что он запишет в журнал).

2. Что я сам о них знаю?

Данный вопрос обязателен, поскольку педагог должен достаточно четко представлять себе разницу между действительным полным и научным содержанием понятия и тем объемом этого содержания, которое он собирается донести до детей. Если педагог недостаточно полно представляет себе содержание этого математического понятия, следует обратиться к соответствующим учебным пособиям. Данный совет не является чем-то обидным для учителя начальных классов, поскольку ряд альтернативных учебников математики включает в предлагаемое детям содержание не только материал, традиционно изучавшийся ранее в средней школе, но и такой материал, который не изучается в средней школе (элементы теории множеств и теории алгоритмов в учебнике Л.Г. Петерсон, элементы формальной логики в учебнике В.Н. Рудницкой, сложные уравнения и системы неравенств в учебнике И.И. Аргинской).

3. Что из своих знаний я могу донести до детей этого возраста (моего класса)? Знакомство с каким понятием, свойством или способом действий является целью моего урока? (Какова математическая задача урока?)

Ответ на этот вопрос поможет педагогу четко сформулировать методическую цель урока.

4. С какими из понятий дети знакомятся впервые? С какими уже знакомы? Когда они познакомились с ними?

Для ответа на этот вопрос следует изучить те задания, которые дети выполняли в процессе знакомства и при закреплении этих понятий и способов действий. Это даст педагогу возможность выстроить систему заданий, актуализирующую знания детей.

5. Какова главная дидактическая задача урока? (Обучающая, развивающая, контролирующая?)

6. Как можно организовать продуктивную развивающую деятельность ребенка, направленную на актуализацию знаний, умений и навыков, на восприятие нового материала, на его осознание и усвоение?

Ответ на этот вопрос состоит в непосредственном отборе и составлении заданий, и выстраивании их в систему: сначала я дам такое задание — его результат даст мне то-то, затем его продолжит такое задание — его результат даст мне то-то, а затем можно предложить это и это на выбор по желанию....

Суть такого подбора заключается не в разнообразии подбираемых заданий, в их целесообразности для формирования конкретных

математических представлений детей. Например, если речь идет о знакомстве с новым вычислительным приемом, то целесообразным будет такой подбор заданий, который актуализирует знания детей об уже знакомых вычислительных действиях, лежащих в основе данного приема, и показывающий их «соединение» в новый вычислительный прием. При решении задачи целесообразным будет подбор заданий, который подготовит детей к правильному восприятию смысла действий в задаче, правильному восприятию ее «событийного ряда» (подскажет аналогию). На первый взгляд, данное положение кажется самоочевидным; но далеко не каждый учитель умеет правильно выявить все те знания, которые лежат в основе вычислительного приема или трудной задачи, отсюда и следуют такие, казалось бы, парадоксальные ситуации, когда учитель жалуется, что «при подготовке к контрольной решили пять задач этого типа, а на контрольной опять ошибки!» Такая ситуация закономерна, если дети не понимают смысла того, что они делают, не осознают структуру задачи, а ориентируются на знакомые речевые формы при выборе действия («улетели», значит, отнимаем; «в два раза больше» — значит, умножаем и т. п.) Осознание же ребенком смысла и сути нового материала возможно, только если система заданий, выстроенная учителем на уроке отражает эту суть, а не внешние атрибуты нового знания.

7. Какие трудности могут возникнуть у детей при выполнении каждого задания, какие ошибки они могут допустить в процессе их выполнения?

Ответ на этот вопрос после выстраивания «канвы» урока, позволит педагогу заранее принять меры по предупреждению ошибок и усвоения неверного способа действия. По крайней мере, педагог будет готов к появлению ошибок и заранее продумает меры их устранения. Опытные педагоги не боятся использовать ситуацию «нечаянной ошибки» как обучающую — в этом случае педагог намеренно допускает ошибки и побуждает детей найти их и исправить. Для формирования у себя умения предугадывать трудности и ошибки детей, полезно при отборе заданий заранее обозначить в конспекте предполагаемые ответы детей, причем постараться предусмотреть разные варианты. Тогда даже самые неожиданные ответы детей не поставят педагога в тупик.

8. Какие формы организации деятельности детей я использую на уроке?

Педагог определяет, как пройдет урок: будет ли это фронтальная работа со всем классом, или можно применить групповой метод, объединяя несколько детей в рабочую группу; или использовать парную работу и кого с кем объединить в пару; и кому из детей обязательно надо предусмотреть индивидуальное задание. Важно заранее спланировать как совмещать результаты групповой работы для достижения цели занятия, как включать в деятельность детей, требующих индивидуального внимания.

9. Какие наглядные пособия и раздаточный материал я подготовлю к уроку? С какими буду работать я, с какими предложу выполнить задание детям, что раздам всему классу и когда это сделаю?

Список вопросов для подготовки к уроку единый, иерархия вопросов постоянна, а вот ответы педагога самому себе, безусловно, будут отличаться «поправкой» на программу, возраст детей, индивидуальные особенности детей в классе, общую особенность класса (например, класс коррекционного обучения детей с задержкой развития не «выпадает» из этой структуры, но он накладывает специфические особенности на ответы педагога на поставленные вопросы). Следует учитывать и индивидуальные особенности самого педагога — один прекрасно рисует и будет рисовать нужные картинки сразу на доске на глазах детей; другой прекрасно перевоплощается и будет активно использовать драматизацию (ролевую игру); третий предпочитает деловую обстановку на уроке, его дети к этому уже привыкли и с удовольствием работают без особых «украшательств» урока, получая удовлетворение от самостоятельного решения интеллектуальных задач.

Ориентируясь на данные вопросы, начинающий педагог сможет научиться планировать содержательные, выстроенные в определенной логике уроки, и его деятельность, направленная на развитие детей в процессе математической подготовки, будет осознанной, обоснованной и творческой. В этом плане, следует несколько слов сказать об импровизации, как методическом умении педагога-мастера.

Планируя и разрабатывая урок, педагог старается предусмотреть любые случайности, однако возможны ситуации появления действительно непредвиденных проблем. Допустим, педагог при проведении урока вдруг осознал, что выбрал неверную аналогию, неудачно выразился, или почувствовал, что выбранный путь неверен, потому что дети не понимают и не принимают его логики. В такой ситуации некоторые педагоги считают своим долгом «железной рукой» довести урок до конца по намеченному пути, невзирая ни на какие препятствия. Такая позиция обычно характеризует авторитарный педагогический стиль обучения и воспитания. Гуманистическая педагогическая позиция, характеризующая педагогику сотрудничества, предпочитает более «мягкие» способы организации взаимодействия педагога и ребенка на уроке. В подобной ситуации более разумным с методической и педагогической позиции было бы кардинальное изменение плана урока прямо на ходу в соответствии с возникшими обстоятельствами. Однако такое кардинальное изменение плана и «резкая» перестройка структуры урока требует от педагога очень высокого уровня мастерства (педагог-мастер даже свои собственные ошибки, вовремя осознанные, умеет обращать на пользу урока так, что потом при его

разборе присутствующие коллеги полагают, что все это было задумано заранее). При отсутствии такого уровня мастерства, молодому педагогу лучше просто опустить ту часть своего плана, которая «не пошла». Пропустите и идите дальше, именно на такой случай всегда следует предусмотреть «резерв» — 2—3 запасных задания, которые можно использовать в качестве дополнительных к теме урока. Приучив себя к тому, что у Вас всегда есть резервные задания «на крайний случай», Вы поймете, что импровизация на уроке — это на самом деле умелое использование заранее предусмотренного запаса.

5. Методический анализ урока математики в начальных классах

Проблема урока — его содержание, построение, организация и методика работы на уроке — определяется тем, что в повышении эффективности каждого урока должно происходить повышение качества обучения и воспитания ребенка в целом. Существует несколько различных вариантов схем анализа уроков, но все эти схемы являются более общедидактическими, чем частнометодическими. Поясним свою мысль: урок математики отличается от всех других уроков содержательной стороной, т. е. при проведении урока математики важными являются предметно-математические требования. При этом нельзя определить, какие из них важнее: общедидактические или специфически математические. Например, если учитель неверно подобрал систему заданий, подводящих детей к осознанию той или иной математической закономерности, никакие дидактические приемы, реализованные на уроке (организация мотивации, сотрудничество и т. п.) не компенсируют эту методическую ошибку.

С другой стороны, сама по себе логика построения знакомства детей с математическим понятием или способом действий определяет и цель, и виды действий учащихся по достижению этой цели, и уровень достижения цели. Если система заданий выстроена учителем таким образом, что она играет роль «подведения» ребенка к осознанию и принятию учебной задачи (что обеспечивает и мотивацию деятельности в целом), а затем — эта же система заданий выступает как «организатор» деятельности детей по достижению учебной задачи, по ходу дела реализуя и самоконтроль, и сотрудничество детей и учителя, и развивающий аспект, то в этом случае она реализует и воспитательный аспект, поскольку обеспечивает каждому ребенку содержательную познавательную деятельность на уроке.

В статье Н.Б. Истоминой[1] отмечается, что в массовую школу такие взгляды на современный урок математики внедряются слабо.

[1] См.: *Истомина Н.Б.* Проблемы современного урока в начальных классах // Начальная школа. 2001. № 4.

«В большинстве школ, к сожалению, критериями оценки уроков математики по-прежнему являются количество решенных примеров и задач, объем записей, выполненных учащимися в тетрадях, правильные и быстрые ответы детей на вопросы, которые задает учитель, разнообразие средств наглядности, дидактических игр и форм обучения, которые часто носят только внешний характер».

Настойчиво внедряемая в некоторых случаях балльная оценка урока часто превращает анализ урока в формализм, и заставляет учителя вне зависимости от его внутреннего убеждения о качестве урока, гнаться за внешней эффектностью, красочностью, «парадностью» на открытом уроке. При этом практически всем «гостям» этого урока, если они сами — учителя, с самого начала всегда бывает ясно, насколько отрепетировано и малорезультативно такое «действо». Что же заставляет учителя вновь и вновь устраивать такие бессмысленные спектакли на открытых уроках? Именно эти, созданные из лучших побуждений, «многопунктные» схемы анализа урока, рекомендующие при проведении анализа оценивать внешнюю деятельность учителя и детей на уроке.

Приведем схему анализа урока по Т.И. Шамовой и Ю.И. Конаржевскому.

Характеристика урока	Баллы
1. Обозначена цель урока	2
2. Организованы действия учащихся по принятию цели деятельности	2
3. Соответствие содержания учебного материала триединой цели деятельности	2
4. Методика обучения обеспечили: мотивацию деятельности	2
5. Сотрудничество учителя и учащихся	2
6. Контроль и самоконтроль	2
7. Соответствие методов обучения содержанию учебного материала и триединой цели деятельности	2
8. Формы организации познавательной деятельности обеспечили: сотрудничество между учащимися	2
9. Включение каждого ученика в деятельность по обеспечению триединой дидактической цели	2
10. Формы организации познавательной деятельности отобраны в соответствии с методами обучения, содержанием учебного материала, триединой дидактической целью	2
11. Уровень достижения триединой дидактической цели: образовательный аспект	2
12. Воспитательный аспект	2
13. Развивающий аспект	2

Балльные оценки: 2 — реализовано полностью; 1 — реализовано частично; 0 — не реализовано.

Оценка эффективности урока: сложить все баллы, разделить на 26 и умножить на 100%. 85% — отлично, 84—65% — хорошо; 64—45% — удовлетворительно.

Нетрудно заметить, что при проведении анализа урока в соответствии с этой схемой оценку урока в весьма значительной мере определяют: уровень владения самим проверяющим теорией учебной деятельности, развивающими теориями обучения, классической дидактикой образовательного процесса и его личные представления об «уровне» достижения результатов урока по всем 13 пунктам анализа. В цитируемой выше статье приводится конспект урока математики, оцененный автором статьи на «отлично», а другим проверяющим — на «неудовлетворительно». К сожалению, подобную трактовку позволяет практически любая дидактическая схема анализа урока.

Приведем другую схему анализа урока по В.П. Симонову[1]:

Методика системного анализа и оценки эффективности проведенного урока

Что оценивается	Баллы
I. ОЦЕНКА ОСНОВНЫХ ЛИЧНОСТНЫХ КАЧЕСТВ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ	
1. Знание предмета и общая эрудиция преподавателя в целом 2. Уровень педагогического и методического мастерства 3. Культура речи, темп, дикция, интенсивность, образность, эмоциональность, общая и специфическая грамотность 4. Степень тактичности и демократичности взаимоотношений с учащимися	
II. ОЦЕНКА ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК УЧАЩИХСЯ НА УРОКЕ	
1. Степень познавательной активности, творчества и самостоятельности 2. Уровень общеучебных и специальных умений и навыков (какие, как развиты и как развиваются в ходе урока) 3. Наличие и эффективность коллективных (групповых) форм работы 4. Степень дисциплинированности, организованности и заинтересованности	

[1] См.: *Симонов В.П.* Урок: планирование, организация и оценка эффективности. М., 2003. С. 112—113.

Окончание табл.

Что оценивается	Баллы
III. ОЦЕНКА СОДЕРЖАНИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ И УЧАЩИХСЯ	
1. Научность, доступность и посильность изучаемого учебного материала, формируемых умений и навыков 2. Актуальность и связь с жизнью (теории с практикой) 3. Степень новизны, проблемности и привлекательности учебного материала (получаемой учащимися информации) 4. Оптимальность объема, предложенного для усвоения материала, а также заданного на дом	
IV. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ СПОСОБОВ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ И УЧАЩИХСЯ В ХОДЕ УРОКА	
1. Рациональность и эффективность использования времени урока, оптимальность его темпа, а также чередование и смена видов деятельности 2. Степень целесообразности и эффективности использования наглядности и ТСО на уроке 3. Степень рациональности и эффективности использованных на уроке методов и организационных форм работы 4. Уровень обратной связи со всеми учащимися в ходе урока 5. Эффективность контроля за работой учащихся и объективность оценки их знаний, умений и навыков 6. Степень эстетического воздействия урока на учащихся 7. Степень соблюдения правил охраны труда и техники безопасности преподавателем и учащимися на уроке	
V. ОЦЕНКА ЦЕЛИ И РЕЗУЛЬТАТОВ ПРОВЕДЕННОГО УРОКА	
1. Степень конкретности, четкости и лаконичности формулировки цели урока 2. Реальность, целесообразность, сложность и достижимость цели одновременно 3. Степень обучающего воздействия урока на учащихся (чему и в какой степени научились) 4. Степень воспитательного воздействия (что способствовало или не способствовало их воспитанию и в какой степени) 5. Степень воздействия урока на развитие учащихся (что способствовало или не способствовало их развитию и в какой степени)	

Для количественной оценки и самооценки эффективности урока применяется 4-х балльная шкала: 4 балла — данный параметр оценивается на «отлично», 3 балла — на «хорошо», 2 балла — на «удовлетворительно», 1 балл — «неудовлетворительно». Если за урок

получено 85% (баллов) или выше — урок отличный; 65—84% (балла) – урок хороший; 45—64% (балла) — урок удовлетворительный; если ниже 45% (баллов) — урок неудовлетворительный.

Данная схема анализа урока является более детализированной и подробной, однако ее применение в качестве количественного «анализатора» неминуемо приведет к тем же парадоксам оценивания урока, что и предыдущая схема. Например, в пятом разделе относительно объективно можно оценить только первый пункт, второй пункт можно оценить только, если хорошо знать данный класс и каждого его ребенка в отдельности; определить же «степень воздействия» урока на того или иного ребенка сразу — невозможно в принципе.

В первом же разделе учитель с большим опытом и стажем всегда будет иметь более высокие оценки по первым двум пунктам, а наличие пункта 3 как бы подводит к мысли, что высокая эмоциональность, темп, дикция, интенсивность и образность речи педагога всегда положительно влияют на ход урока. Однако мы знаем, что хотя во многих случаях это так, но и при невыразительной мимике, флегматичном характере и неидеальной дикции учитель может владеть умами детей и их душами. В том же ключе можно рассмотреть и остальные разделы данной схемы, однако более важным представляется обратиться непосредственно к методическому анализу урока математики в начальной школе как средства решения триединой дидактической цели (образовательной, развивающей, воспитывающей).

Умение проводить методический анализ как своего урока, так и урока коллеги — сложная, но необходимая часть процесса профессионального становления и совершенствования педагога. Без проведения методического самоанализа обучающая деятельность педагога теряет всякий смысл, становится «неуправляемой». Без формирования умения проводить методический анализ урока коллеги не формируются обобщенные методические умения педагога — умение видеть за внешней формой внутреннее содержание, педагогическая и методическая рефлексия, методическое чутье и методическая интуиция.

Таким образом, процесс методического анализа урока можно представить в виде двух важных составляющих: умения проводить самоанализ урока и умения проводить анализ урока коллеги.

Самоанализ полезно реализовывать на практике постоянно. Педагог, который не проводит самоанализ после каждого своего урока, не будет расти как профессионал. Для проведения самоанализа необходимо сравнить логику запланированных действий (конспект урока) с логикой проведения реального урока. В современных условиях идеальным вариантом является просмотр видеозаписи урока после его проведения и сравнение реальной ситуации с планом урока. В обычной практике можно провести самоанализ, ориентируясь на такие вопросы самому себе:

1. Пришлось ли отступить от запланированных действий и почему?

2. Чего я не смогла учесть при планировании урока такое, что заставило меня отступить от запланированных действий?

3. Достиг ли урок запланированной цели? Как это можно определить? (по ответам или действиям детей при подведении итога, по успешности выполнения намеченных заданий, по интересу детей и их желанию выполнять задания...)

4. Может быть, урок не достиг цели? Почему мне это кажется? Чего же тогда я достигла? Какую часть урока удалось реализовать?

Очень важный момент самоанализа, поскольку разработка следующего урока должна строиться на основе этого итога, достигнутого на предыдущем уроке.

5. Какие моменты урока оказались для меня неожиданными? Чего я не смогла учесть?

И в следующий раз это надо учесть просто на всякий случай! Такой неожиданностью, «ломающей» урок, может оказаться совершенно простая, но непредусмотренная педагогом вещь. Например, автор этого пособия однажды потерпел полное фиаско на уроке, не догадавшись заранее проверить крепление иголок в циркулях — на уроке иголки проваливались и дети не могли выполнять задания, на которых строился урок, а в другой раз в коробках детей оказалось много незаточенных карандашей и масса времени ушла на их заточку, что, конечно, нарушило план урока. Такие «случайности» педагог обязан предусмотреть, всегда имея запас раздаточного материала и инструментов, точилки, клей и т. п.

6. На какие вопросы или ответы детей я не смогла отреагировать?

Вполне реально, если ребенок задает неожиданный вопрос, на который педагог не может сходу ответить. Не следует впадать в панику или отыгрываться на ребенке («Не задавай посторонних вопросов! Умный какой!»). Следует спокойно ответить: «Ваня, ты знаешь, я, пожалуй, не готова сегодня ответить на твой вопрос. Дай мне день-другой и я постараюсь найти ответ». Только не забудьте потом действительно вернуться к вопросу.

Очень трудным для молодого педагога является умение отслеживать свои речевые ошибки, неточности, недочеты, неудачно сформулированные вопросы. В состоянии волнения и нервного напряжения на уроке это заметить практически невозможно. Умение слушать и контролировать себя на уроке формируется годами практики и самоанализа. На первых порах полезно приглашать

кого-то для ведения протокола урока, чтобы потом вместе его проанализировать. Можно поставить в классе магнитофон, а затем, прослушивая его, провести самоанализ.

По мере приобретения методического мастерства педагог учится принимать участие в методическом анализе урока коллеги. Приобретенный на этапе обучения самоанализу опыт окажется здесь неоценимым подспорьем. Приведем возможную последовательность вопросов, обсуждение которых и составляет собственно методический анализ урока математики:

1. Какова тема (математическое содержание) и цель (методическая задача) урока?

2. Соответствует ли логика построения урока его цели? (Имеется в виду соответствие последовательности подобранных педагогом учебных заданий цели урока. Для ответа на этот вопрос педагог, анализирующий урок, должен уметь адекватно определять цель каждого задания и их взаимосвязь.)

При анализе заданий проводится также анализ их функций в организации познавательной деятельности детей: какие задания преобладали — тренировочные, репродуктивные, частично-поисковые или творческие?

3. Какова внутренняя структура урока: использована ли проблемная ситуация, или урок построен на преимущественном использовании объяснительно-иллюстративного догматического метода? Какая деятельность детей преобладала — подражательная, воспроизводящая или поисковая (продуктивная)?

4. Грамотно ли педагог использовал математическую терминологию, насколько четко и логично ставил вопросы? Как реагировал на ответы детей? Какие приемы организации помощи использовал?

5. Как урок спланирован и выдержан по времени? Целесообразно ли распределены виды деятельности детей, учтены ли требования здоровьесбережения?

6. Как учтены индивидуальные особенности детей в классе? Как организована индивидуализация работы детей?

7. Какие формы и средства организации учебной деятельности использованы педагогом? (Как сочетаются фронтальные, групповые и индивидуальные формы? Какая наглядность, ее эстетическое оформление и ее действенность при формировании понятий и способов действий?)

8. Удалось ли педагогу установить контакт со всеми детьми в классе (обратная связь)? Какими приемами педагог осуществлял коррекцию их действий, создавал ситуацию успеха, реализовывал сотрудничество между детьми и педагога и детей?

9. Какие моменты урока показались особенно удачными? Не совсем удачными?

10. Каков итог урока? Какие рекомендации можно дать педагогу по улучшению методики проведения урока математики в будущем?

Приобретение умения грамотно проводить методический анализ урока математики возможно только в практической деятельности самоанализа и участия в анализе уроков коллег. Хорошо, когда в параллели начальных классов такой профессиональный анализ уроков проводится регулярно в качестве методической учебы (методический семинар) не с целью проверки качества, а с целью обучения молодых педагогов методическому самоанализу и анализу урока.

Молодым педагогам также может быть полезен «учебный» анализ планов — конспектов занятий, публикующихся в журналах (не следует думать, что публикуются только безупречные материалы). Этот разбор, проводимый на методическом семинаре, может стать хорошим «тренировочным полигоном» для молодых педагогов.

Глава 10

Личностно-ориентированное обучение на уроках математики в начальной школе

Лекция 23.

Индивидуализация обучения математике как средство развития личности учащегося начальных классов

1. Проблемы индивидуального подхода к обучению
2. Сохранение и развитие математических способностей младшего школьника как методическая проблема
3. Проблема обучения математике в классах коррекционно-развивающего обучения (КРО)

1. Проблемы индивидуального подхода к обучению

Проблема индивидуального подхода к обучению является одной из древнейших проблем педагогики со времен Конфуция и Сократа. Не было в истории педагогики ни одного значительного педагога (от Я.А. Коменского до А.В. Сухомлинского), не отдавшего дань этой проблеме в своих трудах.

Не менее активны в исследовании этой проблемы и психологи, в последние годы все больше склоняющиеся к мысли, что в ее основе лежат физиологические особенности мозга и нервной системы человека.

Основной вывод, к которому психологическая наука все более настойчиво подводит учителя, заключается в том, что процесс воспитания и обучения младшего школьника может быть *развивающим* и происходить без «педагогического брака» (ибо неуспеваемость в сегодняшней педагогической терминологии — это педагогический брак) только в том случае, если он исходит из максимально точного учета общих возрастных и индивидуальных психологических особенностей данного конкретного ребенка в этот период его жизни.

Вопрос о трудностях совместимости задачи развития индивидуальности учащегося и единообразия школьного образования является серьезной психолого-педагогической проблемой во все времена существования системы массового обучения.

Ни одна педагогическая система не отрицает необходимости индивидуального подхода к личности в процессе ее воспитания, но при этом система школьного образования ориентирована целиком и полностью на некоего среднего ученика и нацелена на формирование у этого среднестатистического ученика обязательного уровня знаний, умений и навыков и непременно в четко определенные сроки (при этом отставание от этих сроков крайне нежелательно, а забегание вперед не поощряется).

Данная тенденция характерна не только для системы отечественного образования, но именно наша система образования отличается наиболее страстным стремлением к всеобщей стандартизации, лелея мечту о создании единого образовательного пространства в стране, подчиненного единым образовательным стандартам. При этом наибольшим стремлением к такой унификации отличается именно начальная ступень обучения. Если добавить к этому крайний консерватизм (и не только в содержании обучения) этого фактически замкнутого концентра системы образования, нацеленного, главным образом, на то, чтобы дать ребенку элементарные навыки чтения, письма, счета и расширить его представления об окружающем мире, становится понятной та необходимость поисков путей обновления всех компонентов сложной структуры начального образования, которая активно идет в последние годы в отечественной педагогике.

Давно сложившиеся и ставшие каноническими содержание и методики обучения и воспитания младших школьников (несмотря на наличие большого количества альтернативных учебников для начальной школы, их содержание если и выходит за рамки канонического, то не в смысле изменения, а в смысле увеличения объема за счет перемещения материалов средней школы в начальную) сегодня начинают вступать в противоречия с новыми представлениями об особенностях и возможностях обучения, воспитания и развития детей младшего школьного возраста. Смена приоритетных целей обучения, их обусловленность проблемой воспитания личности ребенка на основе личностно-деятельностного подхода в корне меняет взаимоотношения системы обучения (в лице общества и педагогического коллектива в частности) и ученика, поскольку обучение вообще, а начальное обучение особенно, может быть эффективным, направленным на становление личности ребенка, раскрытие его способностей только в том случае, если оно исходит из максимально точного учета общих возрастных и индивидуальных психологических особенностей детей в этот период жизни и данного конкретного ребенка в частности.

Существует большое количество педагогических и психологических исследований (Б.М. Теплов, С.Т. Шацкий, Е.С. Рабунский,

А.А. Люблинская, З.И. Калмыкова, И.В. Дубровина, М.М. Анцибор, К.М. Гуревич, И.С. Якиманская и др.) убедительно доказывающих, что при обеспечении систематического индивидуального подхода к ребенку при изучении любого предмета можно получить гораздо более высокие учебные результаты. Кроме того, индивидуальный подход с учетом особенностей личности ребенка, безусловно, влияет на его психическое состояние, мотивацию учения, формирование учебной деятельности (Ш.А. Амонашвили, А.М. Матюшкин, З.И. Калмыкова, Я.И. Ковальчук, Н.Ф. Талызина, И.Э. Унт, Л.М. Зюбин, З.П. Шабалина, А.А. Кирсанов, Н.И. Верцинская, Н.Г. Уткина, М.К. Акимова, В.Т. Козлова, Г.Ф. Суворова и др.).

В педагогической науке *индивидуализация* определяется как «организация учебного процесса, при которой выбор способов, приемов, темпов обучения учитывает индивидуальные различия учащихся, уровень развития их способностей к учению»[1].

В реальной школьной практике выбор способов и приемов обучения, как правило, обусловлен характером учебного материала и типом урока. Ни одна из существующих сегодня методик (будь то методика обучения русскому языку, математике, изобразительному искусству и т. д.) не обусловливает рекомендуемый к тому или иному материалу метод (способ) и входящий в него набор приемов обучения индивидуальными различиями учащихся. Наоборот, все рекомендации дидактов и методистов, как правило, ориентированы на некий общий образ ребенка, обладающий не только неким средним уровнем развития способностей к учению, но одинаковым темпом обучения, одинаковым ведущим типом восприятия, способностью к запоминанию и т. д. И как само собой разумеющееся предполагается некий «среднестатистический исполнитель» всего этого, т. е. наличие каких бы то ни было индивидуальных различий учителей вообще не рассматривается. (А в связи с этим не рассматривается проблема учебной и психологической совместимости субъектов этого процесса.)

Ученик, выпадающий из этой усредненной картины, может оказаться не только «неуспевающим», но и «не желающим учиться», «не умеющим учиться», «трудно обучаемым». При этом имеются в виду дети с нормальным интеллектом, а вовсе не учащиеся с клиническими диагнозами, которые, как правило, в обычные школы не попадают.

Что же касается *темпа обучения*, который является опосредованной процессуальной характеристикой учебной деятельности любого человека, его учет представляет собой совершенно явную, но крайне неразработанную педагогическую и методическую проблему. Учение в индивидуальном темпе является наиболее старой

[1] Педагогическая энциклопедия. М., 1965. Т. 2. С. 201.

и наиболее эффективной формой обучения. Реализация этого типа индивидуализации сегодня для учителя весьма проблемна. Классно-урочная система может позволить ребенку продвижение в индивидуальном темпе только в течение небольшого промежутка времени, это обусловлено единым для всего класса учебным пособием, а вовсе не программой, как считают многие учителя. В свое время В.Ф. Шаталов убедительно доказал, что «прохождение» школьной программы по традиционно «труднейшим» предметам (математике и физике) возможно в более короткие сроки и с большей эффективностью даже в старших классах. Вопрос упирается в разработку соответствующих методик и учебных пособий, соответствующих этим методикам.

Реализация индивидуального темпа обучения через раннее поступление в школу, или второгодничество, или механическое замедление этого темпа в условиях класса вряд ли может всерьез рассматриваться как выход из положения, так как первое все равно *не обеспечит* способному ребенку нужного ему темпа в процессе обучения, второе предполагает *не изменение* темпа, а лишь повторение процесса в том же темпе; что же касается третьего, то трактовка понятия «изменение» темпа только как «замедление», но опять-таки единое для всех учеников этого класса, не является реализацией понятия «индивидуальный темп». Не случайно массовая практика создания таких классов в нашей стране на сегодня считается весьма сомнительной, и процесс, к ней приводящий, прямо назван в тексте новой концепции начального образования «браком психолого-педагогической науки» и «браком в работе учителя». Там же утверждается, что «осуществление *дифференцированного* подхода к ослабленным и социально-обездоленным детям (не секрет, что именно они составляют основную массу неблагополучных учеников), методически грамотное их обучение позволяют учить всех психически здоровых детей в одном классе».

Мы полагаем, что речь, безусловно, идет не о *дифференцированном*, а об *индивидуальном подходе*, поскольку учет именно процессуальных характеристик учебной деятельности этих детей, реализованный как в обучении, так и в оценивании результатов учебной деятельности, позволит учителю совершенно по-новому взглянуть на возможности некоторых своих учеников.

Четкое разведение понятий «дифференцированный» и «индивидуальный» подход в условиях классно-урочной системы является при этом обязательной предпосылкой организации обучающей деятельности учителя.

Приведем наиболее распространенное определение понятия внутриклассной индивидуализации обучения: «Внутриклассная индивидуализация обучения — это те приемы и способы индивидуальной

работы, которые использует учитель на уроке в обычном классе массовой школы. Можно выделить *два разных критерия*, которые лежат в основе внутриклассной индивидуализации: 1) ориентация на уровень достижений школьника и 2) ориентация на процессуальные особенности его деятельности»[1]. Там же сказано, что «чаще всего учитель выбирает первый путь — его легко реализовать через индивидуализацию заданий. Слабоуспевающие ученики получают для самостоятельной работы более легкие задачи и упражнения, на долю хорошистов и отличников выпадают задания потруднее».

Распределение заданий по уровням сложности — *это дифференциация, а не индивидуализация*, поскольку в основе распределения учеников на три группы (слабые, средние и сильные) лежит не сходство или различие индивидуальных особенностей их учебной деятельности, а успеваемость, которая является результатом этих особенностей. В итоге такой «индивидуальный подход» каждого «закрепляет» на соответствующем месте. Кроме того, не утихает дискуссия по поводу оценивания в процессе такого подхода: если слабый ученик справился со своим заданием, ему, по-справедливости, следует ставить пятерку, если сильный ученик допустил ошибки, или вовсе не одолел свое трудное задание, ему полагается двойка. При этом все прекрасно знают, что сложность заданий несравнима и ситуация выглядит более, чем странно, так как в следующий раз учитель даст слабому задание потруднее, а сильному — полегче, дабы первый получил привычную двойку, а второй — пятерку и тем была восстановлена «справедливость».

«Вторая форма индивидуального подхода, учитывающая процессуальные параметры учебной деятельности школьников, встречается намного реже... В первую очередь, это объясняется отсутствием возможностей диагностировать в массовой школе типологические особенности детей»[2].

Иными словами, тот подход, который мы с уверенностью могли бы назвать действительно индивидуальным, на сегодня находится в «зародышевом» состоянии, поскольку психологи пока еще не могут дать учителю четкие рекомендации по поводу того, какие именно индивидуально-типологические особенности ребенка необходимо учитывать при построении учебного процесса (а точнее, при изучении конкретного предметного содержания) и еще более непонятно как это можно сделать в условиях классно-урочной системы, при обучении по единому учебнику и при соблюдении нормативных сроков контроля результатов обучения.

---

[1] *Акимова М.К., Козлова В.П.* Индивидуальность учащегося и индивидуальный подход. М., 1992.

[2] Там же. С. 48–49.

Исследования основных свойств нервной системы ребенка как источника его индивидуально-типологических особенностей и анализ этих свойств с точки зрения способов организации обучения были начаты Б.М. Тепловым и В.Д. Небылицыным и продолжены В.С. Мерлином, Е.А. Климовым, В.П. Герасимовым и другими психологами, разрабатывающими теорию «индивидуального стиля учебной деятельности» как фактора, определяющего успешность этой учебной деятельности. Эти исследования определяют новый подход к разработке концепции индивидуального подхода к ребенку в процессе его обучения.

С традиционной точки зрения цель индивидуального подхода к ребенку состоит в том, чтобы приспособить его (ребенка) к специфике учебного процесса, учебного материала, предназначенного для усвоения по тому или иному предмету. Иными словами, мы, в основном, стремились адаптировать «нестандартного» ребенка к методам и средствам обучения, удобным для большинства. Уже одно то, что при классно-урочной системе все дети в классе учатся по одному и тому же учебнику и обязаны показать некий средний уровень усвоения материала в одни и те же, обусловленные программой сроки, является яркой иллюстрацией приведенного выше подхода.

Практика классно-урочной системы во всем мире показывает, что такой подход в принципе возможен и реален, поскольку большинство детей в силу присущих этому возрасту характерных особенностей психики в состоянии приспособиться к такой системе и адаптируются к ней с большей или меньшей мерой успешности (это «сильные» и «средние» учащиеся, которых, безусловно, большинство). Однако, остается относительно небольшая группа учащихся, которые испытывают серьезные трудности в процессе этой адаптации и которые во многих случаях так и не могут сделать это в полной мере — авторы называют их по-разному: «неуспевающие», «слабые», «труднообучаемые», «неспособные к учению» и т. п. Суть же одна — эти дети являются постоянной проблемой для учителя, а их постоянная школьная «неуспешность» является для них самих сильнейшим психотравмирующим фактором, во многом определяющим всю их дальнейшую жизнь.

Рассматривая проблему школьной «неуспешности», или «недостаточной успешности» (признаком чего, на наш взгляд, является столь массовая в школе «твердая тройка»), мы хотим отметить тот факт, что ряд исследователей (как отечественных, так и зарубежных) сегодня связывают эту проблему с понятием «индивидуального стиля учебной деятельности» ученика, и, как следствие, рассматривают ее с точки зрения соответствия этого индивидуального стиля ученика стилю преподавательской деятельности учителя,

с одной стороны, и, что более важно для нас, стилю изложения учебного материала в учебных пособиях, с другой стороны.

Мы полагаем, что «конфликт стилей» ученика и учителя, которому придают в последние годы столь большое значение американцы (Ребекка Оксфорд, Бетти Лу Ливер и др.), в большой мере решается с позиции приобретения учителем педагогического и методического мастерства. В сущности, учитель-мастер — это тот учитель, который может приспособиться к любому ученику в начальных классах и приспособить любого ученика к содержанию материала в старших классах. Именно на этом основано расцветшее в последние годы репетиторство, когда «необучаемый» в руках одного учителя ребенок за считанные месяцы становится «обучаемым» в руках другого педагога.

Более сложным конфликтом является, на наш взгляд, конфликт стиля ученика и стиля изложения материала в учебных пособиях. Учебники, в том числе и учебники начальной школы, обычно ориентированы на один стиль обучения, наиболее часто — на стиль автора. Авторы учебников, как правило, вузовские профессора, обладают высоким уровнем абстрактного (словесно-логического) мышления, склонны к анализу и структурированию (аналитический тип), что обусловлено преобладающим развитием во взрослом возрасте левополушарных способностей. Практически все новые понятия и способы действий в учебниках математики для начальных классов введены аналитическим способом. Это легко видеть даже в структуре построения страницы учебника, где обычно сначала сообщается новый факт, а потом приводится ряд примеров, его иллюстрирующих.

Задача ребенка в этой ситуации — «успеть» за объяснениями учителя (анализом представленного материала), постараться при этом понять все объяснения, запомнить их, а затем использовать полученные знания при выполнении аналогичных действий. В этой схеме легко узнается излюбленный в начальной школе (да и не только в начальной) объяснительно-иллюстративный метод изложения материала, который в такой ситуации не только не снимает означенный конфликт, но и усугубляет его, поскольку учитель использует тот же (аналитический) стиль изложения материала, который использован в учебнике.

Поскольку *аналитический тип мышления* — это перспективная линия развития для большинства людей, очень многие ученики со временем приспосабливаются и к таким учебникам, и к такому стилю изложения материала. В тяжелом положении оказываются дети, обладающие ярко выраженным типом конкретного мышления, склонные к синтезу и конструированию (синтетический тип), что обусловлено преобладающим развитием правого полушария (т. е. ведущим действенно-практическим и наглядно-образным мышлением).

Исследования нейрофизиологов[1] последних десятилетий показывают определенные возрастные закономерности в развитии право- и левополушарных способностей. В частности, до 9—10 лет для большинства людей характерно преобладание в развитии функций, связанных с правым полушарием (синтетический тип), затем более активно формируются функции, связанные с левым полушарием (аналитический тип) и во взрослом возрасте для большинства людей этот тип является преобладающим. Развитие аналитического типа стимулирует и общепринятая система образования, основанная на постоянной активизации центров письма и речи, которые, как известно, находятся в левом полушарии.

Таким образом, физиологии мозга ребенка младшего школьного возраста более соответствует синтетический (конструктивный) тип изложения материала, такой стиль учебной деятельности является наиболее адекватным для большинства младших школьников.

С этой точки зрения проблема учебника для младшего школьника практически не существует (поскольку они просто не могут самостоятельно учиться по подобным книгам), учебник для этого возраста играет реальную роль только в процессе использования его учителем. Именно поэтому так важен уровень методического мастерства учителя в начальных классах, так как урок в идеале — это та интерпретация учебного материала, отраженного в учебной программе и соответствующем учебнике, которая должна быть доступна и адекватна учебным стилям *всех* учеников класса. Естественно, в реальной жизни это просто невозможно, и, таким образом ясно, что единственным выходом из такого положения будет индивидуальная работа с теми детьми, которые не могут продуктивно работать в удобном для большинства стиле, не могут адаптироваться к удобному для большинства стилю учебных пособий и впадают в состояние фрустрации в условиях ограниченности во времени (индивидуальный темп усвоения, замедленный тип).

К аналогичным выводам приходят и психологи, рассматривающие данную проблему несколько в ином ключе, а именно, связывая понятие индивидуального стиля учебной деятельности с особенностями типов нервной системы. Индивидуально-типологические свойства нервной системы имеют генотипическую природу (т. е. зависят от совокупности генов, полученных от родителей) и в этом смысле понимаются как стабильные характеристики высшей нервной деятельности человека. Очевидно, что эти стабильные индивидуальные свойства нервной системы непосредственным образом будут влиять на формирование типа учебной деятельности ребенка. В работах Н.С. Лейтеса[2]

[1] См.: *Роттенберг В.С., Бондаренко С.М.* Мозг, обучение, здоровье. М., 1989.
[2] См.: *Лейтес Н.С.* Умственные способности и возраст. М., 1971.

проводились исследования связей и взаимовлияния психологических проявлений основных свойств нервной системы и учебной деятельности школьников. Было убедительно показано их значительное влияние на процессуальную сторону учебной деятельности (т. е., по терминологии В.С. Мерлина, на стиль учебной деятельности).

Среди природных индивидуально-типологических свойств наиболее изучены в настоящее время сила — слабость (т. е. степень выносливости, работоспособности) нервной системы, ее подвижность — инертность (т. е. скорость смены и скорость протекания процессов возбуждения и торможения).

Это физиологические, а не психологические свойства. В физиологическом плане они однозначны, так как это свойства самой нервной ткани, но в психологическом смысле они могут обусловить разные психологические черты личности. Это зависит как от сочетания вышеуказанных свойств, так и от условий развития индивидуума. В.С. Мерлин называл эти сочетания свойств нервной ткани темпераментом, этот термин более знаком учителю[1].

Характерные черты того или иного типа нервной системы достаточно подробно описывают различные учебные пособия по психологии. Ярких представителей этих типов учитель легко назовет и среди своих воспитанников: это спокойно-тихий, осторожный и послушный, склонный к порядку, легко утомляющийся, впечатлительный и болезненно реагирующий на недовольство взрослых ребенок со слабым типом нервной системы; и это бодрый, шумный, уверенный в себе, поражающий легкостью в учении, успевающий сделать сразу несколько дел (спорт, музыка, школа) одновременно, контактный и в любой компании чувствующий себя уверенно ребенок с сильным типом нервной системы.

Подвижность и инертность нервной системы также хорошо опознается учителем в общении с детьми. Почти всегда в классе есть дети с ярко выраженными свойствами подвижности или инертности: подвижный тип — это непоседливый, шумный ребенок, который часто кажется нам просто плохо воспитанным. Безусловно, это может быть и так, но его подвижность может быть обусловлена органическими свойствами его нервной системы. Этому ребенку крайне тяжело сидеть смирно, его психика требует постоянного движения — и он начинает катать по столу карандаш, постукивает ногой по полу, дома он качается на стуле, став старше, он делает уроки рядом с включенным магнитофоном или телевизором. Он постоянно отвлекается, его речь тороплива, он глотает слова и окончания (так же и в письме), не ходит, а бегает, легко и стремительно переключается с одного на другое, не смущаясь того, что первое не доведено и до середины. Этот

[1] См.: *Мерлин В.С.* Очерк теории темперамента. М., 1964.

ребенок легко приспосабливается к новым условиям, вспыльчив и отходчив, легко загорается и также легко гаснет.

Ребенок с инертной нервной системой — это полная противоположность описанному выше типу. Он медлителен, спокойнее на уроках, у него замедленная реакция, невыразительная мимика, неторопливая речь, перемежающаяся томительными паузами. Этот ребенок не может быстро переключаться с одного дела на другое, не может быстро реагировать на вопросы учителя и поэтому часто кажется тугодумом. Он все делает медленно и основательно, при попытках оторвать его от начатого дела и переключить на другое, чувствует себя несчастным, может дать неадекватную взрывную реакцию. Режим нехватки времени (на контрольной, например) для него просто катастрофа. Он долго помнит обиды, тяжело переживает неудачи, но для усвоения ему не требуется большое количество повторов, а усвоенное он помнит долго. Такой ребенок ответственен и надежен, любит порядок, предпочитает работать в тишине и в одиночестве, тратит массу времени на уроки, но при опросе (при быстро сменяющихся вопросах) может угрюмо молчать, производя впечатление совершенно не готового к уроку.

Безусловно, это весьма схематические портреты, и чаще мы видим в ребенке (и тем более во взрослом человеке) комплекс, сочетание этих обобщенных черт. Однако даже поверхностное соотнесение этих особенностей нервной системы учащегося с характерным для этого ребенка ведущим типом восприятия (кинестезическое, аудиальное, визуальное), типом памяти (зрительной, слуховой, двигательной), преимущественным типом мыслительной деятельности (аналитическим, синтетическим) показывает, из чего складывается то, что сегодня принято называть в специальной литературе «тип учебной деятельности».

И в этой связи становится понятным, что ребенок, у которого основные параметры типа учебной деятельности вступают в противоречие с заложенным в систему «оптимумом», необходимым для успешности в этой системе, будет иметь массу проблем не в силу отсутствия желания или способностей, а в силу своих чисто индивидуальных особенностей.

Безусловно, для того, чтобы быть уверенным в точности «диагноза», учителю нужно проводить соответствующее психологическое обследование ребенка. Существует ряд довольно известных методик, рекомендуемых психологами учителям, в трудных случаях лучше обратиться к профессиональному психологу. Зная устойчивые, характерные для данного ребенка черты его психики, определяющие его тип учебной деятельности, можно гораздо успешнее организовать индивидуальную помощь этому ребенку именно в том виде и в той форме, которая создает условия наибольшего благоприятствия для этого конкретного ребенка.

Отечественные программы начальной школы сегодняшнего дня жестко ориентированы на массовый результат. Таким образом, трезвая реальность сегодняшней школы вынуждает учителя заниматься натаскиванием учащихся на конкретные виды заданий в ущерб содержанию, в ущерб индивидуальному развитию ученика. Наличие жесткого лимита времени (стандартные сроки) и высокая наполняемость класса может вообще поставить любую индивидуализированную работу с учащимися под угрозу срыва.

Однако высокая степень ответственности за детей продолжает оставаться на учителе — фактически все зависит от его способности оценить потребности учащихся, изобрести такие виды деятельности на уроке, которые устроили бы каждого учащегося, найти необходимые для этого средства, и преодолеть губительное воздействие стандартизации и ограниченности во времени.

Мы полагаем, что разделить с учителем эту ответственность обязаны как психологи, задача которых помочь учителю получить индивидуально-типологическую «карту» класса в максимально короткие сроки в первые же дни ребенка в школе (а еще лучше — до его прихода в школу, именно в этом мы видим целесообразность различных собеседований с дошкольниками перед приемом в школу), так и методисты, занимающиеся разработкой средств и методик обучения младших школьников. На сегодня ясно, что невозможно учить всех детей в классе с одинаковым успехом по одному шаблону, даже самому лучшему. В этом убеждает нас уже довольно большой опыт работы по альтернативным учебникам и альтернативным учебным системам в начальной школе. Если вначале появление нового «продвинутого» учебника казалось многим учителям панацеей, которая резко поднимет как успешность всех детей в предмете, так и облегчит ему (учителю) каждодневное методическое «изобретение велосипеда»; то на сегодня появление очередного Развивающего учебника (именно так, с большой буквы, именуют свои учебники некоторые авторы и авторские коллективы) уже совершенно не вдохновляет учителя, особенно, если учесть при этом присущую только нашей школе страсть «к всеохвату» в приказном порядке. Такая ситуация неизбежно приводит к включению всех пришедших в эту школу детей в работу по системе «такого-то», вне зависимости от того, предрасположен ребенок к ней или нет.

При создании средств обучения (сегодня это в большинстве случаев учебник или учебник-тетрадь) следует учитывать, что в классе будут дети с различными типами учебной деятельности, требующие как различной структуры организации учебного материала (аналитический и синтетический стиль), так и разного темпа обучения (в классе всегда есть дети с замедленными психическими процессами и дети с повышенной скоростью восприятия и усвоения).

Иными словами, речь идет о том, средства обучения нового поколения должны представлять собой не традиционный учебник «один на всех», а учебно-методический комплект, позволяющий учителю, *во-первых*, получить индивидуально-типологическую «карту» своего класса и, *во-вторых*, выбирать методические материалы, наиболее адекватные стилю учебной деятельности ребенка с проблемами обучения, возникающими при стандартном подходе. Обращаем внимание педагогов на употребленный нами термин особо, так как речь идет не о наборе примеров и заданий разной степени сложности, а о различной структуре методической организации одного и того же содержания.

Стремление школы к стандартизации находится в остром противоречии с тем, что дети не похожи друг на друга. Нежелание «системы» учитывать особенности личности ученика нередко приводит к тому, что официальный контрольный балл ребенка (в пятибалльной системе) не соответствует не только его возможностям или способностям, но даже реальному уровню его знаний и умений и тем более уровню сформированности учебной деятельности ребенка (иначе бы мы не имели столь частого и резкого «падения» успеваемости выпускников начальной школы при переходе в среднее звено).

В частности, это относится к тем детям, стиль учебной деятельности которых не совпадает с заложенным в систему «оптимумом», а их индивидуально-типологические особенности затрудняют самостоятельную адаптацию ученика к школьной системе. Этих детей на Западе называют «группа риска», у нас — неуспевающие, слабоуспевающие. Если же отнести к этой группе детей с недостаточной «успешностью», т. е. «твердых троечников», которых в школе, в том числе и в начальной, большинство, проблема предстает в совершенно ином свете.

Иными словами, детей, которых следует учить в соответствии с их индивидуальными особенностями, в начальной школе не меньшинство, а большинство! И если мы хотим действительно «повернуть школу лицом к ребенку», следует задуматься о том, что нейрофизиологические особенности психики и основные характеристики ведущих нервных процессов не формируются в процессе обучения. Ребенок приходит с ними «в первый день в первый класс».

Эти особенности развивались в ребенке и в достаточной мере сформировались в первые 6—7 лет его жизни, и конфликт этих особенностей с общепринятой системой обучения младших школьников может начаться с первых недель его пребывания в школе. Неумелая тактика учителя в этой ситуации может очень быстро привести к постоянной неуспеваемости ребенка. И наоборот, если учитель может помочь ребенку осознать «плюсы» и «минусы» своего типа учебной деятельности, своих индивидуальных психических

особенностей и научить (помочь научиться) адекватно их использовать, компенсировать их недостатки и как можно более активно использовать достоинства, это в значительной мере поможет адаптации ребенка к системе массового обучения, причем не за счет подавления его индивидуальности.

Результаты психологических исследований личности человека убеждают нас в том, что другого выхода из этой ситуации просто нет, если мы хотим сделать систему школьного обучения инструментом формирования и развития личности ребенка, а не только местом, где ему «даются» знания.

2. Сохранение и развитие математических способностей младшего школьника как методическая проблема

Проблема развития математических способностей детей — одна из наименее разработанных на сегодня методических проблем обучения математике в начальных классах. Крайняя разнородность взглядов на само понятие «математические способности» обусловливает отсутствие сколько-нибудь концептуально обоснованных методик, что в свою очередь порождает сложности в работе учителей. Возможно, именно поэтому не только среди родителей, но и среди большинства учителей распространено достаточно фатальное отношение к математике в жизни ребенка: математические способности либо даны, либо не даны, и тут уж ничего не поделаешь.

Безусловно, способности к тому или иному виду деятельности обусловлены индивидуальными различиями психики человека, в основе которых лежат генетические комбинации биологических (нейрофизиологических) компонентов. Однако на сегодня нет доказательств того, что те или иные свойства нервных тканей напрямую влияют на проявление или отсутствие тех или иных способностей. Более того, целенаправленная компенсация неблагоприятных природных задатков может привести к формированию личности, обладающей ярко выраженными способностями, чему в истории немало примеров. Математические способности относятся к группе так называемых специальных способностей (как и музыкальные, изобразительные и др.). Для их проявления и дальнейшего развития требуются усвоение определенного запаса знаний и наличие определенных умений, в том числе и умение применять имеющиеся знания в мыслительной деятельности.

Мыслительная деятельность — основной вид деятельности математика, его орудие — карандаш и лист бумаги. Воплощение в жизнь результатов этой деятельности — один из мощнейших стимулов развития цивилизации сегодняшнего дня.

Математика является одним из тех предметов, где индивидуальные особенности психики (внимание, восприятие, память, мышление, воображение) ребёнка имеют решающее значение для его усвоения. За важными характеристиками поведения, за успешностью (или неуспешностью) учебной деятельности часто скрываются те природные динамические особенности, о которых говорилось выше. Нередко они порождают и различия в знаниях — их глубине, прочности, обобщенности. По этим качествам знаний, относящимся (наряду с ценностными ориентациями, убеждениями, навыками) к содержательной стороне психической жизни человека, обычно судят об одаренности детей.

Индивидуальность и одаренность — вещи взаимосвязанные. Все исследователи, занимавшиеся проблемой математических способностей, проблемой формирования и развития математического мышления (А.В. Брушлинский, А.Н. Колмогоров, В.А. Крутецкий, В.В. Давыдов, З.И. Калмыкова, А.Я. Хинчин, Ю.М. Колягин, Д. Пойа, Л.В. Виноградова, И.В. Дубровина, К.А. Рыбников и др.) при всей разнородности мнений отмечают прежде всего специфические особенности психики математически способного ребенка (а также профессионального математика), в частности *гибкость мышления*, т. е. нешаблонность, неординарность, умение варьировать способы решения познавательной проблемы, легкость перехода от одного пути решения к другому, умение выходить за пределы привычного способа деятельности и умение находить новые способы решения проблемы при измененных условиях. Очевидно, что эти особенности мышления напрямую зависят от особой организованности памяти (свободных и связанных ассоциаций), воображения и восприятия.

Исследователи выделяют такое понятие, как *глубина мышления*, т. е. умение проникать в сущность каждого изучаемого факта и явления, умение видеть их взаимосвязи с другими фактами и явлениями, выявлять специфические, скрытые особенности в изучаемом материале[1], а также *целенаправленность мышления*, сочетающаяся с *широтой* мышления, т. е. способностью к формированию обобщенных способов действий, умением охватить проблему целиком, не упуская деталей. Психологический анализ этих категорий показывает, что в их основе должна лежать специально сформированная или природная склонность к структурному подходу к проблеме и предельно высокая устойчивость, концентрация и большой объем внимания человека.

Таким образом, индивидуально-типологические особенности личности каждого ученика в отдельности (темперамент, характер,

[1] См.: *Колягин Ю.М.* Учись решать задачи. М., 1979.

задатки, соматическая организация личности в целом и т. д.) оказывают существенное или определяющее влияние на формирование и развитие математического стиля мышления ребенка, который, безусловно, является необходимым условием сохранения природного потенциала (задатков) ребенка в математике и его дальнейшего развития в ярко выраженные математические способности.

Безусловно, можно говорить о возможности формирования «лаконизма» речи и «скрупулезной точности символики», «четкой расчлененности хода аргументации» и «доведенного до предела доминирования логической схемы рассуждения»[1] — это формируемо с методической точки зрения, хотя и не является простой методической задачей. Но вряд ли возможна одинаковая успешность формирования у всех детей гибкости, широты и глубины мышления, формирование той совершенно специфической отвлеченной образности этого процесса, которую А.Н. Колмогоров называл способностью «мыслить такими образами, которые непонятны и невидимы для тех, кто видит лишь голые символы»[2].

Опытные учителя-предметники хорошо знают, что математические способности — это «товар штучный», и если не заниматься таким ребенком индивидуально (именно индивидуально, а не в рамках кружка или факультатива), то способности могут и не развиться дальше. Именно поэтому мы часто наблюдаем, как выделяющийся своими способностями и возможностями первоклассник к третьему классу «выравнивается», а в пятом и вовсе перестает отличаться от других детей.

Исследования психологов показывают, что могут быть разные типы возрастного умственного развития.

«Ранний подъем» (в дошкольном или младшем школьном возрасте) обусловлен наличием ярких природных способностей и задатков соответствующего типа. В дальнейшем может произойти закрепление и обогащение умственных достоинств, что служит стартом для становления выдающихся умственных способностей. При этом факты показывают, что почти все ученые, проявившие себя до 20 лет, были математиками. Но может произойти и «выравнивание» со сверстниками. Мы полагаем, что такое «выравнивание» во многом обусловлено отсутствием грамотного и методически активного индивидуального подхода к ребенку в этот ранний период.

«Замедленный и растянутый подъем» (т. е. постепенное накопление интеллекта) не означает, что предпосылки больших или выдающихся способностей не выявятся в дальнейшем. Таким возможным «подъемом» является возраст 16—17 лет, когда фактором

[1] См.: *Хинчин А.Я.* Педагогические статьи. М., 1963.
[2] См.: *Колмогоров А.Н.* О профессии математика. М., 1959.

«интеллектуального взрыва» служит социальная переориентация личности, направляющая ее активность в это русло. Такой «подъем» может произойти и в более зрелые годы.

Для учителя начальных классов наиболее актуальной является проблема «раннего подъема», приходящая на возраст 6— 9 лет. Не секрет, что один такой ярко-способный ребенок в классе, обладающий к тому же сильным типом нервной системы, способен «подавить» на уроке остальных детей. И в результате, вместо того, чтобы максимально стимулировать и развивать маленького вундеркинда, мы вынуждены начинать с того, что учим его молчать, ведь в классе 25 других, не таких сообразительных детей. Такое постоянное «притормаживание» и может привести к тому, что через 3—4 года ребенок «выравнивается» со сверстниками. А поскольку математические способности относятся к группе ранних способностей, то возможно именно математически способных детей мы теряем в процессе этого «притормаживания» и «выравнивания».

Психологические исследования показали, что хотя развитие учебных способностей и творческой одаренности у типологически различных детей протекает по-разному, равно высокой степени развития этих способностей могут достичь дети с противоположными характеристиками нервной системы. В связи с этим учителю, возможно, полезнее ориентироваться не на типологические особенности нервной системы детей, а на некоторые общие особенности способных и талантливых детей, которые отмечают большинство исследователей этой проблемы.

Авторы выделяют разный набор общих особенностей способных детей в рамках тех видов деятельности, в которых эти способности исследовались (математика, музыка, живопись и т. п.). Мы полагаем, что учителю удобнее опираться на некоторые чисто процессуальные характеристики деятельности способных детей, которые, как показывает сопоставление ряда специальных психологических и педагогических исследований по этой теме, оказываются едиными для детей с различными видами способностей и одаренности. Исследователи отмечают, что большинству способных детей свойственны:

1. Повышенная склонность к умственным действиям и положительный эмоциональный отклик на любую новую умственную нагрузку.

Эти дети не знают, что такое скука, у них всегда есть занятие. Некоторые психологи вообще трактуют эту черту, как возрастной фактор одаренности.

2. Постоянная потребность в возобновлении и усложнении умственной нагрузки.

Это влечет за собой постоянное повышение уровня достижений. Если ребенка не нагружать, то он сам сделает это — он может

абсолютно самостоятельно освоить шахматы, музыкальный инструмент, радиодело и т. д., изучать энциклопедии и справочники, читать специальную литературу, сочинять романы и т. д.

3. Стремление к самостоятельному выбору дел и планированию своей деятельности.

Этот ребенок имеет обо всем свое мнение, упорно отстаивает неограниченную инициативу своей деятельности, обладает высокой (почти всегда адекватной при этом) самооценкой и весьма настойчив в самоутверждении в выбранной области.

4. Совершенная саморегуляция.

Такой ребенок способен на полную мобилизацию сил для достижения цели; способен неоднократно возобновлять умственные усилия, стремясь добиться поставленной цели. Он имеет как бы «изначальную» установку на преодоление любых трудностей, а неудачи его только раззадоривают, заставляя с завидным упорством стремиться их одолеть.

5. Повышенная работоспособность.

Длительные интеллектуальные нагрузки не утомляют этого ребенка, наоборот, он чувствует себя хорошо именно в ситуации наличия проблемы, требующей решения. Чисто инстинктивно он умеет использовать все резервы своей психики и своего мозга, мобилизуя и переключая их в нужный момент.

Очевидно, что общие процессуальные характеристики деятельности способных детей, признаваемые психологами статистически значимыми, не присущи однозначно какому-то одному типу нервной системы человека. Поэтому педагогически и методически общая тактика и стратегия индивидуального подхода к способному ребенку, очевидно, должна строиться на таких психологических и дидактических принципах, которые обеспечивают учет указанных выше процессуальных характеристик деятельности этих детей.

С педагогической позиции способный ребенок в наибольшей степени нуждается в инструктивном стиле отношений с учителем, требующем большей информативности и обоснованности выдвигаемых требований со стороны учителя: Инструктивный стиль, в противоположность императивному стилю, господствующему в начальной школе, предполагает апеллирование к личности ученика, учет его индивидуальных особенностей и ориентацию на них. Такой стиль отношений, в свою очередь, способствует развитию в детях независимости, инициативности и творческих потенций, что отмечается многими педагогами-исследователями.

Столь же очевидно, что с дидактической точки зрения, способные дети нуждаются, как минимум, в обеспечении оптимального темпа продвижения в содержании и оптимального объема учебной нагрузки. Причем, оптимального *для себя*, для своих способностей, т. е. более высокого, чем для обычных детей. Если учесть при этом потребность ребенка в постоянном усложнении умственной нагрузки, настойчивую тягу к саморегуляции своей деятельности повышенную работоспособность этих детей, можно с достаточной уверенностью утверждать, что в школе эти дети отнюдь не являются «благополучными» учениками, поскольку их учебная деятельность постоянно проходит не в зоне ближайшего развития, а далеко позади этой зоны. Таким образом, в отношении этих учеников мы (вольно или невольно) постоянно нарушаем нами провозглашаемое кредо, основной принцип развивающего обучения, требующий обучения ребенка с учетом зоны его ближайшего развития.

Работа со способными детьми в начальных классах сегодня ничуть не менее актуальная проблема, чем работа с неуспевающими. Ее меньшая популярность в специальных педагогических и методических изданиях объясняется тем, что она не так очевидна. Двоечник — это вечный источник неприятностей для учителя, а то, что Петина пятерка и вполовину не отражает его возможностей, это знает только учитель (и то не всегда), да Петины родители (если занимаются этим вопросом специально). При этом, постоянная «недогрузка» способного ребенка (а норма для всех — это недогрузка для способного ребенка) будет способствовать недостаточной стимуляции развития способностей, не только неиспользованию потенциала такого ребенка, но и возможному угасанию этих способностей как невостребованных в учебной деятельности.

Есть и более серьезное и неприятное следствие этого: такому ребенку слишком легко учиться на начальном этапе, в результате у него не формируется в достаточной мере умение преодолевать трудности, не формируется «иммунитет» к неудачам, чем в большой мере объясняется резкое снижение успеваемости таких детей при переходе из начального в среднее звено.

Для того чтобы учитель массовой школы мог успешно справляться с проблемой работы со способным ребенком по математике, недостаточно обозначить педагогические и методические аспекты проблемы. Как показала тридцатилетняя практика реализации системы развивающего обучения, для того чтобы эта проблема могла быть решена в условиях обучения в массовой начальной школе, необходимо конкретное и принципиально новое методическое решение, в полном виде представленное учителю.

К сожалению, на сегодняшний день практически отсутствуют специальные методические пособия для учителей начальных классов, предназначенные для работы со способными и одаренными детьми на уроках математики. Мы не можем привести ни одного такого пособия или методической разработки, если не считать

разнообразных сборников «Математической шкатулки», в которых одни и те же «занимательные задания» переходят из одного сборника в другой. А ведь для работы со способными и одаренными детьми нужны не «занимательные задания», нужна *специальная система* и специальные «параллельные» к существующим учебные пособия для способных детей. Пока первые такие пособия появляются в курсе школьной математики только в старших классах.

Отсутствие методического обеспечения индивидуальной работы со способным ребенком по математике приводит к тому, что учителя начальной школы этой работой не занимаются совсем (нельзя считать индивидуальной кружковую или факультативную работу, где группа детей решает с учителем занимательные задания, произвольно и, как правило, несистемно подобранные). Можно понять проблемы молодого учителя, у которого не хватает ни времени, ни знаний для подбора и систематизации соответствующих материалов. Но и учитель со стажем и опытом не всегда готов к решению такой проблемы.

Другим (и, пожалуй, главным) сдерживающим фактором является наличие единого для всего класса учебного пособия. Работа по единому для всех детей пособию, по единому календарному плану просто не позволяет учителю реализовать требование индивидуализации темпа обучения способного ребенка, а единый для всех детей содержательный объем учебника не позволяет реализовать требование индивидуализации объема учебной нагрузки (не говоря уже о требовании саморегуляции и самостоятельном планировании деятельности).

Мы полагаем, что создание специальных методических материалов по математике для работы со способными детьми — это единственно возможный способ реализации принципа индивидуализации обучения в отношении этих детей в условиях обучения целого класса.

Рассмотрим возможный вариант построения концепции частного *решения задачи создания учебных материалов для работы со способными детьми* по математике по стабильной программе по математике для начальных классов.

Задача исследования была сформулирована следующим образом: решить проблему индивидуального подхода к обучению математике способного ребенка *средствами структурного преобразования учебного содержания* без изменения этого содержания. Иными словами, не меняя существенно самого содержания обучения, мы перестраиваем его структуру в соответствии с процессуальными особенностями деятельности способного ребенка.

В качестве способа решения этой методической задачи выбран *способ методически целесообразного выстраивания системы учебных заданий*. Такую методически целесообразную систему учебных заданий учитель обычно старается выстроить, готовясь к уроку. Это те подготовительные и вводные задания и упражнения, которые используются учителем в ходе самого урока на различных этапах подготовки, знакомства и закрепления нового материала. При создании учебных материалов возникла мысль — представить ребенку *всю систему целесообразных заданий* в максимально подробном виде в специально разработанном индивидуальном задании. Иными словами речь идет не о карточке с 3—5 примерами или задачей, имеющей целью проверку усвоения материала (как это делается в соответствующих дидактических материалах), а о развернутом структурированном плане подготовки, знакомства и закрепления нового материала, представленном ребенку в полном виде. Такая система позволяет способному ребенку после небольшого периода адаптации к новой форме подачи материала работать практически автономно, т. е. в соответствии с приведенными выше процессуальными характеристиками деятельности способных детей.

Формой вещественного воплощения этого методического решения была выбрана *система долгосрочных заданий.*

Методика использования системы долгосрочных заданий рассматривалась Е.С. Рабунским при организации работы со старшеклассниками в процессе обучения немецкому языку в школе.

В ряде педагогических исследований рассматривалась возможность создания систем таких заданий по различным предметам для учеников старших классов как по усвоению нового материала, так и по устранению пробелов знаний. В ходе исследований отмечено, что абсолютное большинство учеников предпочитает и тот, и другой вид работы выполнять в форме «долгосрочных заданий» или «отсроченной работы». Такой вид организации учебной деятельности, традиционно рекомендуемый главным образом для трудоемких творческих работ (сочинений, рефератов и т. д.), оказался наиболее предпочтительным для большинства опрошенных школьников. Оказалось, что такая «отсроченная работа» удовлетворяет школьника больше, чем отдельные уроки и задания, так как основным критерием удовлетворенности ученика в любом возрасте выступает *успешность в работе.* Отсутствие резкого временного ограничения (как это бывает на уроке) и возможность свободного многократного возвращения к содержанию работы позволяет многим детям справиться с ней гораздо успешнее, что, в свою очередь, вызывает чувство удовлетворения у ребенка. Таким образом, задания, рассчитанные на длительную подготовку, можно рассматривать также как средство воспитания положительного отношения к предмету.

Многие годы считалось, что все сказанное выше относится только к ученикам старшего, в крайнем случае, среднего возраста, но не соответствует особенностям учебной деятельности учеников

начальных классов. Анализ процессуальных характеристик деятельности способных детей младшего школьного возраста привел нас к противоположной мысли, а опыт работы с младшими школьниками на протяжении семи лет, опыт работы учителей, принявших участие в экспериментальной проверке данной методики, и студентов-дипломников, принявших участие в ее разработке и апробации, показал высокую эффективность предлагаемой системы при работе со способными детьми младшего школьного возраста.

Первоначально для разработки системы заданий (в дальнейшем будем именовать их «листы» в связи с формой их графического оформления, удобной для работы с ребенком) были отобраны темы, связанные с формированием вычислительных навыков, которые традиционно рассматриваются учителями и методистами как темы, требующие неусыпного руководства учителя на этапе знакомства и постоянного контроля на этапе закрепления. При этом учителя хорошо знают, что часть детей легко и быстро усваивает эти приемы, а часть детей плохо справляется с ними и в 5—6 классе.

В ходе экспериментальной работы было разработано большое количество листов на печатной основе, объединенных в блоки, охватывающие целую тему. Каждый блок содержит 12—20 листов. Лист представляет собой большую систему заданий (до 50 заданий) методически и графически организованных таким образом, чтобы по мере их выполнения ребенок мог самостоятельно подойти к пониманию сути и способа выполнения нового вычислительного приема, а затем закрепить новый способ деятельности. Лист (или система листов, т. е. тематический блок) представляет собой «долгосрочное задание», сроки выполнения которого индивидуализированы в соответствии с желанием и возможностями ребенка, работающего по этой системе. Такой лист можно предлагать ребенку на уроке или вместо домашнего задания, срок выполнения учитель либо устанавливает ученику индивидуально, либо позволяет ученику (этот путь более продуктивен) самому установить для себя срок (это путь формирования самодисциплины, так как самостоятельное планирование деятельности в связи с самостоятельно определенными целями и сроками — это основа самовоспитания человека).

Тактику работы с листами-заданиями учитель определяет для ребенка индивидуально. На первых порах их можно предлагать ученику в качестве домашнего задания (вместо обычного задания), индивидуально договариваясь о сроках его выполнения (2—4 дня). По мере освоения ребенком этой системы работы можно перейти к предваряющему или параллельному способу работы, т. е. давать ребенку лист до знакомства с темой (накануне урока) или на самом уроке для самостоятельного освоения материала.

Внимательное и доброжелательное наблюдение за учеником в процессе деятельности, «договорной стиль» отношений (пусть ребенок сам решит, когда он хочет получить этот лист), возможно даже освобождение от других уроков в этот или следующий день для концентрации на задании, консультативная помощь ребенку без отсрочки (на один вопрос всегда можно ответить сразу, даже проходя мимо ребенка на уроке) — все это поможет учителю в полной мере сделать процесс обучения способного ребенка индивидуализированным без больших затрат времени.

Работа с листами-заданиями требует обеспечения ребенка готовым листом, в котором он работает как на печатной основе. Не следует заставлять детей переписывать их с листа. Ребенок работает карандашом *прямо на листе*, записывая ответы или дописывая действия. Такая организация средства обучения вызывает у ребенка положительные эмоции — ему нравится работать на печатной основе. Избавленный от необходимости утомительного переписывания, ребенок работает с гораздо большей производительностью. Практика показывает, что хотя листы содержат до 50 заданий (обычная норма домашнего задания 6—10 примеров), дети с удовольствием работают с ними, многие дети просят новый лист каждый день. Иными словами, они перевыполняют рабочую норму урока и домашнего задания в несколько раз, но при этом испытывают положительные эмоции и работают по собственному желанию.

В ходе эксперимента системы таких листов были разработаны по всем «алгоритмизируемым» темам программы по математике для начальных классов: «Устные и письменные вычислительные приемы», «Нумерация», «Величины», «Дроби», «Уравнения».

Охарактеризуем *методические принципы* построения рассматриваемой системы:

1. Принцип соответствия программе по математике для начальных классов.

Содержательно листы соответствуют стабильной (типовой) программе по математике для начальных классов. Таким образом, реализовать концепцию индивидуализации обучения математике способного ребенка в соответствии с процессуальными особенностями его учебной деятельности мы полагаем возможным при работе по любому учебнику, соответствующему типовой программе.

2. Принцип дозированности.

В одном листе вводится только один прием; или одно понятие; или раскрывается одна, но существенная для данного понятия связь. Это, с одной стороны, помогает ребенку четко осознать цель работы, а, с другой стороны, помогает учителю легко отслеживать качество усвоения этого приема или понятия.

3. Принцип постепенного нарастания уровня сложности.

Структурно лист представляет собой подробное методическое решение задачи, введения или знакомства и закрепления того или иного приема, понятия, связей этого понятия с другими понятиями. Задания подобраны, выстроены и сгруппированы (т. е. имеет значение и порядок их размещения на листе) таким образом, чтобы ребенок мог «двигаться» по листу самостоятельно, отталкиваясь от уже знакомых ему простейших способов действий и постепенно осваивать новый способ действий, конструкция которого на первых шагах полностью раскрыта в более мелких действиях, являющихся основой данного приема. По мере продвижения по листу, эти мелкие действия постепенно компонуются в более крупные блоки. Это позволяет ребенку самому освоиться с приемом в целом виде, что является логическим завершением всей методической конструкции.

4. Принцип доступности.

Систематическое использование «листов-заданий» позволяет организовать продвижение ребенка в освоении материала в удобном для него индивидуальном темпе, который ребенок может регулировать для себя самостоятельно.

5. Принцип перспективности.

Задания, рассчитанные на длительную (отсроченную) подготовку, безусловно, требуют перспективного планирования. Умение же организовать свой труд, спланировав его на определенный срок, является, вне всякого сомнения, важнейшим учебным умением.

6. Принцип индивидуализации проверки и оценки знаний учащихся.

Принцип реализуется не на основе дифференциации уровня сложности заданий, а основе единства требований к уровню знаний, умений и навыков. Индивидуализированные сроки и способы выполнения заданий позволяют предъявлять всем детям задания одного уровня сложности, соответствующего программным требованиям к норме. Безусловно, это не означает, что сильным, умным, талантливым детям не надо предъявлять более высокого уровня требований. Для детей с повышенным уровнем способностей листы-задания на определенном этапе позволяют подключить к работе более насыщенный с интеллектуальной точки зрения материал, который в свою очередь является пропедевтическим для знакомства со следующими математическими понятиями более высокого уровня сложности.

Листы-задания содержат также и материал более высокого уровня сложности, чем требуется для усвоения стандартной «нормы», однако для выполнения всех заданий достаточно того уровня знаний и умений, которым ребенок владеет на данном этапе. Необходимы лишь гибкость и вариативность в их применении, а специальная система их формирования «закладывается» в листы уже с первых дней 1 класса.

Иная тактика и стратегия «дозирования» материалов позволяет использовать такие листы в обучении математике детей казалось бы абсолютно противоположных по своим типичным характеристикам нервной системы: детям замедленного типа, медленно думающим, но интеллектуально сильным детям, и «быстрым» детям, легко схватывающим, но «скользящим по поверхности», о которых учитель часто с сожалением говорит: способный, но не работает. Как первые, так и вторые являются наиболее «теряемыми» в учебном процессе начальной школы. Как первым, так и вторым система работы с листами позволяет работать в нужном им темпе, что является одним из важнейших условий успешности для них.

Наиболее способным детям такие листы с первых же шагов предлагались прямо на уроке. Высокий уровень саморегуляции позволял многим из них успевать работать и с листом, и на уроке, при этом дети не ощущали «переработки». Для таких детей было снято ограничение темпа изучения материала. Ребенку раскрывалась и «стратегическая перспектива»: количество листов на месяц, на четверть, на полугодие, необходимость проверки усвоения в присутствии учителя (количество контрольных срезов). При этом обычные домашние задания отсутствовали, дети были свободны в выборе посещения и непосещения уроков по пройденным и сданным темам, имели возможность в освободившееся время заниматься с учителем углублением и расширением знаний по предмету в индивидуальном режиме. Следует отметить, что не все дети, выбранные вначале как способные, захотели работать в таком режиме. Мы полагаем, что это говорит о достаточно адекватной самооценке этих детей, с одной стороны, а с другой стороны о том, что не все способные дети чувствуют тягу именно к математике, что совершенно естественно.

Практика показала, что при такой организации обучения уже через 2—3 месяца в классе выделяется группа способных детей, легко и стремительно уходящая вперед. Их нельзя «тормозить», но на определенном этапе детям следует систематически давать задания повышенной сложности, формируя из них будущих участников математических олимпиад.

Рассмотренное методическое решение проблемы обучения способных к математике детей в начальной школе в условиях обучения целого класса помогает учителю начальных классов организовать работу с такими детьми, и понять, что проблема работы со способным ребенком — это все та же проблема индивидуализации обучения ребенка в условиях классно-урочной системы и госстандарта в системе образования.

Психологи единодушны в том, что способности и одаренность, как одна из сторон индивидуальности, накладывают своеобразный отпечаток на все стороны жизни и деятельности человека.

Массовая школа, часто игнорируя индивидуальность ученика, не дает ему и возможностей для ее развития, для укрепления способностей и творческого потенциала. Как говорят психологи, таланты произрастают из индивидуальности личности, а система воспитания «среднего ребенка» (соответствующего стандартным требованиям) фактически ведет к стиранию индивидуальных особенностей.

Таким образом, индивидуальные особенности каждого одаренного ребенка, это не только его особенности, но и, возможно, источник его одаренности. А индивидуализация обучения такого ребенка — это не только способ его развития, но и основа его сохранения в статусе «способный, одаренный».

3. Проблема обучения математике в классах коррекционно-развивающего обучения (КРО)

В последние годы, когда практика обучения всех детей с шести лет становится нормой школьной жизни, значимой методической проблемой становится обучение детей, у которых при поступлении в школу обнаруживается то или иное «несоответствие норме возрастного развития». По данным Г.Ф. Кумариной[1] и С.Г. Шевченко[2] детей, требующих специального коррекционно-развивающего обучения, в нашей стране становится с каждым годом все больше. Программы для их обучения утверждены, а учебно-методических комплектов, обеспечивающих реализацию коррекционно-развивающего обучения в соответствии с этими программами, пока нет.

О каких детях идет речь? Многие учителя полагают, что к этой категории относятся только дети с диагнозом ЗПР (задержка психического развития). Однако в последние годы в литературе достаточно часто можно встретить термин «дети риска школьной дезадаптации»[3], в группу которых относят не только детей с пограничными нарушениями в развитии значимых для обучения психофизиологических и высших психических функций (школьно-значимых функций), но и детей с социально-педагогической

[1] См.: *Кумарина Г.Ф.* Коррекционная педагогика в начальном образовании. М., 2001.

[2] См.: *Шевченко С.Г.* Коррекционно-развивающее обучение: Организационно-педагогические аспекты. М., 1999.

[3] См.: *Кумарина Г.Ф.* Указ. изд.

запущенностью, с ослабленным здоровьем. Являясь умственно-сохранными, не имея классических форм аномалий развития, такие дети вместе с тем испытывают трудности в учении и освоении социальной роли ученика. Школьная практика показывает, что тактика выжидания или игнорирования имеющихся у первоклассников признаков неблагополучия развития в надежде, что ребенок привыкнет и «втянется», приводит лишь к усугублению первичных неблагополучий. При этом как в отечественной, так и в зарубежной трактовках понимания этих состояний подразумевается, что явления задержки или несоответствия норме, наблюдаемые в генезисе развития ребенка на данный момент, поддаются педагогическому воздействию, со временем они компенсируются или корригируются у большинства таких детей при правильно организованном процессе обучения их в школе.

Такое коррекционно-развивающее обучение представляет собой реализацию усиленного внимания педагога к развитию тех психических процессов и школьно-значимых функций, становление которых у данного ребенка либо несколько задержалось, либо не совсем соответствует нашим примерным представлениям о норме развития. Особо значимо такое коррекционно-развивающее обучение в первые 1—2 года пребывания ребенка в школе. Специалисты рекомендуют уделять особое внимание коррекционно-развивающему обучению в первом полугодии 1 класса, где использование коррекционно-развивающих заданий, построенных на учебном материале, должно быть преимущественным (Дубровина И.В., Кумарина Г.Ф.). Большинство таких детей имеют малую работоспособность, быструю истощаемость, аритмию памяти и внимания, поэтому увеличение нагрузки за счет *добавления* необходимых ребенку коррекционно-развивающих занятий дополнительно к обязательному учебному минимуму зачастую приводит к малой эффективности этих занятий в связи с повышенной утомляемостью ребенка.

Однако в реальной школьной практике большую часть коррекционно-развивающей работы учителя обычно адресуют второй половине дня, и/или базируют ее на внеучебном материале. Особенно эта ситуация характерна для обучения математике. Обусловлено это тем, что учителя вынуждены пользоваться на уроках математики в системе коррекционно-развивающего обучения учебными пособиями, фактически не предназначенными для реализации целей и задач коррекционно-развивающего обучения средствами предмета, и в связи с этим, не содержащими необходимого для решения этих задач материала.

Очевидно, что такое положение является следствием укоренившегося в свое время представления о том, что математика является предметом, который требует главным образом усвоения

предметного содержания. Причем процесс этот настолько сложен, что никакой возможности для организации коррекционно-развивающей работы на этом уроке уже не остается.

Общепринятая педагогическая позиция такова, что изучение математики для этих детей — тяжелый и утомительный процесс, имеющий целью выучить содержание, поэтому поддерживать к нему интерес следует специальными дидактическими приемами, «спасая» детей от утомления сменой видов деятельности. Безусловно, если строить обучение математике на многочисленных тренировочных упражнениях, то такое обучение способно утомить любого ребенка, даже математически способного. Если же учесть, что у многих детей в классах КРО обычно имеют место недостатки устойчивости и концентрации внимания, плохая механическая память, не всегда адекватное восприятие, слабая сформированность логических приемов умственных действий и замедленный тип мыслительной деятельности, то становится очевидным, почему процесс изучения математики очень часто превращается в таком классе в процесс заучивания минимального объема математики наизусть. При этом психологами давно доказано, что такая работа не является развивающей психику ребенка, она лишь загружает его память, создавая иллюзию выравнивания по минимуму.

В сложившихся условиях особую значимость приобретает проблема разработки специального комплекта материалов, который может быть использован учителем при проведении уроков математики в классе коррекционно-развивающего обучения. Главная цель таких материалов: при общем соответствии требованиям программы по математике для начальной школы, комплект должен обеспечивать учителю возможность организации коррекционно-развивающей работы с детьми на уроке на учебном материале. При этом использование коррекционно-развивающих заданий на внеучебном материале не отменяется, а является дополнением к заданиям первого вида.

Рассмотрим возможные пути методического решения проблемы реализации коррекционно-развивающего обучения математике в начальной школе. Сформулируем задачу и сверхзадачу процесса обучения математике в классе коррекционно-развивающего обучения.

Задача понимается как *цель предметного обучения* — это приобретение ребенком определенного объема знаний, умений и навыков, обозначенных программой.

Сверхзадача понимается как *общая основная цель обучения* в 1 классе коррекционно-развивающего обучения — это стимуляция и развитие высших психических и психофизиологических функций, значимых для обучения и общего развития ребенка, а также формирование основных компонентов учебной деятельности, таких как мотивация, познавательный интерес, учебная самостоятельность, самоконтроль и др. При этом мы исходим из основного положения концепции развивающего обучения, трактующего успешность ребенка в усвоении предметного содержания как следствие сформированности (достаточного уровня сформированности) указанных выше психических процессов и учебной деятельности (Л.В. Занков, В.В. Давыдов). Таким образом, иерархия этих задач такова, что достижение цели предметного обучения происходит через посредство достижения результатов развивающей работы.

Такая иерархия целей обучения математике в классе КРО требует нового методического решения процесса обучения математике. Искомая методика не может базироваться на выполнении многочисленных тренировочных упражнений, поскольку такая деятельность не способствует развитию психических функций ребенка. Разработка нового методического решения требует построения психологического обоснования, определяющего как саму технологию обучения, так и отбор предметного содержания для этой технологии.

Базу для такого психологического обоснования следует искать в современных психологических и физиологических исследованиях, посвященных изучению эффективности процесса обучения и формирования различных психических новообразований ребенка дошкольного и младшего школьного возраста. Анализ результатов этих исследований свидетельствует об усилении внимания психологов к использованию *методов моделирования различных видов* как для развития мышления детей, так и для формирования у них полноценной учебной деятельности (П.Я. Гальперин, В.В. Давыдов, А.В. Запорожец, Л.В. Венгер, Л.М. Фридман, Н.Г. Салмина и др.).

Выше подробно рассматривался смысл и сущность использования метода моделирования при обучении детей с нормой развития. В большом количестве психологических исследований последнего двадцатилетия доказано, что наиболее доступным для любого ребенка младшего возраста по сравнению с другими способами моделирования (графическим, символическим) является построение моделей из вещественного материала (бумага, палочки, геометрические мозаики, конструкторы и т. п.), с которым ребенок может действовать самостоятельно, собственными руками, а не только наблюдать за действиями педагога. Эта моделирующая конструктивная деятельность позволяет построить *наглядную и воспринимаемую на тактильном уровне модель изучаемого понятия или отношения*, что чрезвычайно важно как с точки зрения психологических особенностей детей младшего школьного возраста, так и с точки зрения процесса усвоения понятий (П.Я. Гальперин, В.В. Давыдов и др.).

Эффективность моделирующей деятельности при обучении ребенка обусловлена соответствием ее видов ведущим типам мышления в детском возрасте, в частности, психологической особенностью детей младшего школьного возраста является преобладание наглядно-образного мышления (это — норма развития). Детям младшего возраста, даже при норме развития, сложно иметь дело с абстракциями. Для детей же с задержкой развития в 6—7-летнем возрасте достаточно значимыми остаются функциональные особенности *сенсомоторного интеллекта*, в норме соответствующего возрасту 2—3 лет, и *наглядно-действенного мышления*, в норме соответствующего возрасту 3—5 лет.

При ведущем сенсомоторном восприятии в основе распознавания (формирующийся образ предмета, понятия или явления) лежит объединение в комплекс тактильных, зрительных и кинестетических ощущений (двигательных, связанных с ощупыванием, поворачиванием и т. п.). При этом модель понятия или отношения должна быть воспринимаема всеми указанными выше чувствами. В этом случае познавательная деятельность ребенка адекватна уровню развития его интеллекта.

На следующей возрастной ступени наглядно-образного мышления моделирующая деятельность ребенка в процессе обучения постепенно включает и более абстрактные (*но по-прежнему чувственно воспринимаемые*) способы моделирования — схематический, графический. Символическое моделирование (знаки, символы, цифры и т. п.) как наиболее абстрактный вид моделирования нецелесообразно вводить на ранних этапах обучения, поскольку символика, запомненная ребенком без осознания ее смысла, не принесет большой пользы. Не случайно раннее обращение к арифметической символике (знаки чисел, действий и т. п.) при обучении детей с задержкой развития вызывает такие трудности: уровень развития мышления еще «не созрел» для правильного восприятия и понимания символических математических моделей предметов и явлений (а именно таковыми являются количественные арифметические модели, изучаемые в начальной школе). Поэтому при изучении арифметического материала учителя вынуждены идти по пути организации многократного повторения изучаемого материала до его заучивания наизусть. Но даже это не является гарантией формирования прочного навыка (не говоря уже об осознанном усвоении, что является необходимым требованием развивающего обучения), поскольку если какое-то время не повторять материал он просто забывается ребенком. На наш взгляд, это также закономерное следствие методики, построенной на заучивании символики и правил символических действий без осознания их смысла, т. е. без накопления достаточно большой базы модельных представлений и запаса образов моделирующих действий с изучаемыми понятиями и отношениями.

Очевидно, что особенно актуален учет соответствия модельных представлений и моделирующих действий преобладающему типу мышления при обучении детей, имеющих недостаточный уровень развития психофизиологических и высших психических функций. Преимущественное использование *вещественных моделей понятий* при обучении этих детей математике в 1—2 классах является не просто желаемым, но *обязательным* требованием с точки зрения теории использования моделирования как метода обучения.

Приведенное выше теоретическое обоснование приводит к достаточно парадоксальным, с точки зрения традиционной коррекционной методики обучения математике в начальной школе, предположениям о целесообразности подбора содержания для обучения детей с задержкой развития в 1—2 классе начальной школы. Мы полагаем, что это содержание должно носить преимущественно *геометрический*, а не арифметический характер.

Геометрическое содержание позволяет построить работу с ребенком на основе восприятия и осознания формы объектов (а не только количественных его характеристик). Признак формы позволяет на первых порах полностью обратиться к работе с вещественными моделями, воспринимаемыми сенсорикой ребенка (т. е. всеми чувствами). На следующем этапе работы с формой можно подключить использование схематических и графических моделей (рисунков, схем, чертежей), адекватных наглядно-образному стилю мышления (2—4 класс для детей с ЗПР). Анализ формы во многих случаях необходимо приводит к количественным оценкам, т. е. такое построение содержания обучения математике не исключает и знакомства с количественными отношениями, но они являются на первых порах сопутствующими и не перегружают несозревшую систему восприятия ребенком математических закономерностей окружающего мира абстрактной математической символикой.

Психологами в принципе давно высказывается мысль, что насыщение первого знакомства ребенка с математикой преимущественно арифметическим содержанием не является соответствующим действительно «детскому пути вхождения» в математику. Ж. Пиаже отмечал, что ребенок раньше воспринимает и научается выделять пространственные характеристики объектов, чем их количественные характеристики[1].

Следует отметить, что мысль о необходимости насыщения математического содержания, предназначенного для младшего школьного возраста, геометрическим материалом не является

[1] *Пиаже Ж.* Избранные психологические труды. М., 1969.

новой. Об этом еще в начале века писали Д. Мордухай-Болтовский (1908), В. Кемпбель (1910), Л. Гурвич (1912). При этом речь шла об обучении детей с нормой развития.

Однако до сих пор ситуация не изменилась. Анализ геометрического содержания современных учебников математики для начальной школы показывает, что его совершенно недостаточно даже для прямой подготовки к изучению курса геометрии в старших классах, не говоря уже о том, чтобы геометрическое содержание могло взять на себя задачу формирования и развития психических и психофизиологических функций в процессе обучения ребенка в начальных классах.

Данная идея определила содержательное и методическое своеобразие учебных материалов «Математика и конструирование в 1 классе: Коррекционно-развивающее обучение» (М., 2003), имеющего на первом году обучения значительное геометрическое насыщение программного материала. При этом главной функцией этого материала является формирование и развитие дефицитарных школьно-значимых психических и психофизиологических функций младшего школьника. Мы говорим об этом с такой уверенностью, поскольку исследования дефектологов согласуются с нашими многолетними исследованиями. Г.Ф. Кумарина, в качестве наиболее важных функций, требующих оказания незамедлительной коррекционно-педагогической помощи в случае их дефицитарного развития (поскольку самопроизвольно эти функции компенсируются очень слабо и медленно) указывает:

1) пространственное восприятие и анализ, пространственные представления;
2) зрительное восприятие, зрительный анализ и синтез;
3) координация в системе «глаз—рука»;
4) сложнокоординированные движения пальцев и кисти рук;
5) фонематическое восприятие, фонематический анализ и синтез.

Нетрудно заметить, что первые четыре из пяти отмеченных функций являются «геометрозависимыми», т. е. активнее всего (и продуктивнее всего) формируются и развиваются у ребенка при работе с геометрическим, а не арифметическим материалом.

В дидактике развивающего обучения постулировано, что для ребенка младшего школьного возраста основной путь развития — это эмпирическое обобщение, т. е. обобщение своего собственного чувственного опыта (В.В. Давыдов, 1986).

Однако если мы обратимся с этой позиции к традиционному арифметическому содержанию, сейчас же возникает противоречие практически непреодолимого характера: число как математическое понятие является *абстракцией высокой степени общности и отвлеченности от чувственно воспринимаемой основы его построения.*

Какой бы путь построения понятия «натуральное число» ни был выбран — на основе понятия «множество» (традиционный курс, система Л.В. Занкова, «Школа 2100») или на основе измерения скалярных величин (система В.В. Давыдова), — само первичное понятие арифметики — число — является абстракцией, не воспринимаемой чувствами непосредственно. Любая «привязка» его к непосредственно воспринимаемому объекту, например множеству елочек (морковок, зайчиков), это фактически двойное понижение уровня абстрактности, а значит, и общности самого понятия. Двойное, потому что в данном случае мы обращаемся не к множеству вообще (т. е, обращаемся обычно не к графической интерпретации, где элементы множества изображены точками или кругом Эйлера и т. п.), а к «множеству зайчиков» (морковок, елочек). И именно этот образ ребенок непосредственно воспринимает, именно с ним экспериментирует, фиксируя результаты эксперимента в эмпирическом обобщении.

Не случайно многие дети даже с нормой развития в 1 классе, теряют результаты этих обобщений при замене зайчиков на чашки, воспринимая такую замену как новую ситуацию, требующую повторения всего процесса осмысления заново. Теоретически многократное повторение экспериментов с множеством разных объектов должно привести к правильному эмпирическому обобщению. Практически же этого во многих случаях не происходит по разным причинам: начиная от специфики индивидуальных особенностей восприятия ребенка и заканчивая вовсе банальным фактом — нехваткой наглядных материалов, исключающей возможность детей экспериментировать самостоятельно. Таким образом, нарушается второе важнейшее условие продвижения ребенка по пути развития, так как систематическая подмена самостоятельной деятельности наблюдением за деятельностью педагога не является полноценной заменой, способствующей полноценному эмпирическому обобщению.

Существующая традиция преимущественного наполнения курса начальной математики арифметическим материалом сразу высоко ставит планку перед ребенком, требуя от него практически с первых же шагов не только высокого уровня абстрагирования, не только выполнения заданий в отсутствии непосредственно воспринимаемых сенсорикой адекватных аналогов (моделей) понятия, но и систематических действий в умственном плане, в плане представлений:

М а л ь в и н а: Представь себе, что у тебя есть два яблока. Некто взял у тебя яблоко.

Б у р а т и н о: Да я же не отдам Некту яблоко, хоть он дерись!

Сложную и очень двойственную роль играет в этом процессе и ранняя символизация (т. е. раннее введение цифровой и знаковой

символики), имеющая место в учебниках математики традиционного направления, которыми пользуются учителя, работающие в классах коррекционно-развивающего обучения (система 1—4). Сама по себе эта символика запоминается детьми достаточно легко, поскольку *символизация* — это привычный для маленького ребенка способ кодирования реальности в игре. Однако при отсутствии запаса адекватных наглядных представлений об объектах символизации символика приобретает для ребенка совершенно самостоятельное значение. При этом внешнее манипулирование ею замещает внутреннее оперирование математическими понятиями и отношениями. Например, можно часто наблюдать, как ребенок, легко и свободно перечисляющий числительные первого, второго, третьего десятка, теряется, когда его просят назвать числа от 9 до 5. Еще пример. Ребенок бодро считает кружки, выставленные на фланелеграфе в ряд (красный, синий, желтый, зеленый, голубой): «Один, два, три, четыре, пять». На вопрос: «Можно ли начать считать с голубого?» отвечает отрицательно. Его мнение: «Надо начинать с красного. Или их надо переставить, чтобы голубой был первым».

Приведем последний пример: 6—7-летнему ребенку показывают запись:

1, 2, 4, 3, 5, 6, 7, 9, 8
9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
1, 3, 2, 5, 4, 7, 6, 9, 8

Задание «Выбери ряд чисел, которыми можно пользоваться при счете предметов», он не воспринимает, теряется, не понимает, чего от него хотят. Однако достаточно изменить формулировку (найди ряд, где числа записаны в правильном порядке), чтобы ребенок легко нашел правильный ответ. Но такая формулировка полностью меняет ориентацию задания на выявление понимания закономерности построения натурального ряда чисел.

Аналогичных примеров можно привести немало. Они убедительно доказывают: символика довольно часто живет «самостоятельной» жизнью в представлениях ребенка и при этом порой весьма причудливо связана с реальным смыслом понятия или отношения. Доказательство тому — приведенные выше примеры: дети могут хорошо запоминать как сами символы, так и тот порядок, в котором педагог их предъявляет. Желаемого же осмысления и освоения связи понятий и отношений с кодирующей их символикой не происходит.

Не случайно учебники математики системы В.В. Давыдова «отодвигают» знакомство первоклассников с арифметической символикой почти на полгода, а для учебников системы Л.В. Занкова характерна значительно большая насыщенность геометрическим материалом (до 16% в 1 классе в учебнике И.И. Аргинской) по сравнению с учебниками традиционной школы (всего 2, 4% в учебнике 1 класса системы 1—4). А ведь эти учебники разработаны для нормы развития, школьная практика отбора в «развивающие системы» годами приводила к тому, что по ним всегда занимались специально отобранные дети с повышенным уровнем интеллекта. Неудивительно, что сочетание такого содержательного построения учебников с технологиями, направленными на интенсификацию интеллектуального развития ребенка, дает значительно более высокий уровень развития детей в этих системах (Л.А. Ясюкова, 1998). Для детей же, необходимо требующих углубленного коррекционно-развивающего обучения, используются традиционные учебники, построенные на преимущественно арифметическом материале и методики, ориентированные на воспроизведение и многократное повторение.

Дидактически в учебно-методическом комплекте, предназначенном для организации коррекционно-развивающего обучения, реализовано следующее *методическое положение: математическое содержание* урока может и должно стать *средством коррекции* и *компенсации* недостатков развития ребенка. При этом коррекция происходит в ходе обучающего процесса на уроке при усвоении необходимых знаний, умений и навыков по математике. Вновь приобретаемые знания и умения не являются самоцелью урока, а играют *развивающую роль*, так как они становятся базой для формирования обобщенных способов действий с математическими объектами и общих приемов умственной деятельности (сравнения, обобщения, абстрагирования, классификации, анализа и синтеза). В свою очередь, формирование этих умственных операций влечет за собой более интенсивное формирование и развитие словесно-логических (понятийных) форм мышления.

Рассмотрим более подробно данное положение концепции. Анализ характерных для ребенка с задержкой развития особенностей деформации познавательной сферы (П.П. Блонский, В.И. Лубовский, Т.А. Власова, З.И. Калмыкова, А.К. Маркова, А.Г. Лидерс, М.С. Певзнер и др.) показывает, что наиболее развиты у этих детей наглядно действенные и наглядно образные виды мышления, а наименее развиты словесно-логические.

Традиционный вывод состоит в том, что, следовательно, в процессе школьного обучения необходимо сделать главный упор на развитие у таких детей словесно-логического мышления. Однако отсутствие у многих из них зрелых форм наглядно-действенного и наглядно-образного мышления в возрасте 6—7 лет очень часто превращает работу по развитию словесно-логического мышления

в работу по формированию *вербализма.* От ребенка систематически требуются развернутые словесные формулировки (на школьном «учебном языке») *до* произведения непосредственных действий или даже *вне* самих действий («Скажи полным ответом; сначала скажи, потом будешь делать»; «расскажи, как будешь делать» и т. п.). Такой подход к обучению ребенка при преимущественном построении обучения математике на арифметическом материале является закономерным, поскольку арифметические модели — это символические модели (знаки действий, цифры, буквы). Использование вещественных моделей при обучении арифметике ограничено, поскольку использование конкретных предметов при моделировании (например, ситуации задачи) позволяет ребенку подменить выбор действия при ее решении прямым пересчетом предметов, используемых при моделировании. Раннее преимущественное использование символики без накопления предварительного разнообразного опыта моделирующих действий, адекватных смыслу изучаемых понятий и отношений, может также привести к привычному бездумному манипулированию символикой, которое мы часто наблюдаем на практике (так называемые «нелепые ошибки», полтора землекопа в ответе, решение задач «методом тыка» и др.). При этом ребенок может воспроизводить наизусть целые куски текстов, без запинки воспроизвести правило (а впоследствии формулу или теорему), но осмыслить, и тем более применить их в непривычных ситуациях, не может. Таким образом, несмотря на внешне «богатое» речевое развитие, которое учителя часто путают с развитием словесно-логического мышления, мы имеем чистый вербализм, ничуть не помогающий ребенку в процессе обучения в дальнейшем. Однако на этапе обучения в начальной школе, когда учитель полагает, что главным признаком развития словесно-логического мышления является хорошо развитая речь, учебное математическое содержание, традиционно построенное на преимущественном арифметическом и алгебраическом материале, способствует использованию метода многократных повторений, поскольку только этот путь может обеспечить запоминание и воспроизведение наизусть больших объемов формализованного материала.

Нетрадиционный подход, реализованный в учебных материалах «Математика и конструирование в классах КРО», состоит в том, что процесс обучения и развития ребенка, требующего коррекционно-развивающего обучения, на первом этапе (в 1 классе) построен преимущественно с опорой на наглядно-действенное и наглядно-образное мышление, а задачу развития словесно-логического вида мышления мы полагаем на первых порах сопутствующей (сопровождающей непосредственную деятельность с вещественными и графическими моделями). На следующем этапе — во 2 классе — задача развития словесно-логического вида мышления постепенно занимает ведущую позицию при сохранении преимущественного использования методов вещественного и графического моделирования изучаемых математических понятий и отношений, что в свою очередь позволяет использовать для облегчения учебной работы ребенка преимущества более развитого к этому периоду наглядно-образного мышления. В этом случае к 3 классу ребенок будет реально готов к переходу на активное осознанное использование вербальных и символических моделей (арифметических) при работе с математическим материалом.

Стимуляция невербальных видов мышления при обучении математике с постепенным усилением их «озвучивания» на первом году обучения в школе будет приводить к тому, что объекты мышления, а также операции и действия с этими объектами будут все более вербализоваться. Это, в свою очередь, постепенно облегчит ребенку не только осуществление мыслительных действий во внутреннем плане, но и решение задач наглядно-действенного и наглядно-образного характера на более высоком уровне, с использованием элементов предварительного (мысленного вербального или образного) анализа процесса решения задачи. Такой подход к построению методики обучения и развития ребенка в целом соответствует также теории поэтапного формирования умственной деятельности (по П.Я. Гальперину).

Методическая концепция разработанного учебно-методического комплекта безусловно потребовала некоторых «смещений акцентов» в распределении содержания обучения как по часам, так и по иерархии и по распределению по годам обучения. Данная тенденция соответствует наиболее инновационным учебным комплектам обучения математике, разрабатываемым для «нормы». При этом произведенные «смещения» позволили насытить начальный этап работы с детьми максимальным количеством специальных, развивающих познавательные процессы заданий и упражнений на геометрическом материале уже с первых уроков: до 50—60% учебного материала в 1-м полугодии 1 класса, до 40% учебного материала во 2-м полугодии 1 класса и до 30% учебного материала во 2 классе. Интенсивное развитие познавательной сферы ребенка в 1-м полугодии 1 класса позволяет в дальнейшем построить знакомство детей с обязательным объемом арифметического материала на принципиально иных основах и в принципиально более короткие сроки. При этом процесс усвоения материала организован не на основе использования многократных тренировочных упражнений, а на основе формирования и развития мыслительных

процессов и овладения ребенком собственной моделирующей деятельностью с предложенными моделями арифметических понятий и отношений. Использование простейшей (но максимально вариабельной) предметной наглядности на уроках математики и конструирования позволяет реализовать этот курс в любых условиях. В качестве раздаточного материала используется стандартный «Дидактический набор», содержащий двусторонние фигурки трех основных форм: кружок, треугольник (равный половине квадрата) и квадрат. Из этих основных форм дети конструируют как фигуры, так и различные композиции по образцу, по заданию, по контуру, по замыслу, развивая конструктивное и пространственное мышление. Для работы в тетрадях дети используют специальные рамки-трафареты с геометрическими прорезями по типу рамок Монтессори, образцы которых даны в приложении к тетради. Такие рамки позволяют организовать не только работу по распознаванию геометрических форм, но и разработку моторики (обводка и заштриховывание фигур по рамке), а также являются основой для формирования конструктивной моделирующей деятельности через *прием конструктивного рисования* (рисования композиций с опорой на рамку) и *прием конструктивной аппликации* (изготовление деталей аппликации с использованием рамки и последующим конструированием сюжета).

Предметные математические задания выстроены таким образом, чтобы максимально стимулировать интеллектуальную активность, анализирующее наблюдение, формирование и развитие логических приемов умственных действий — сравнения, обобщения, синтеза, анализа, классификации, систематизации. В систему уроков специально заложены упражнения на развитие внимания (устойчивости, объема, переключения, распределения), на развитие образной и словесно-логической структурной памяти, стимуляцию и тренировку воображения; дидактически предусмотрена технология учета низкой работоспособности этих детей на первом году обучения, учтен режим переключений, четко выдержана логика урока, материал компонуется небольшими блоками, которые ребенок успевает воспринять и усвоить даже за короткий промежуток времени. Специально предусмотрена система заданий на развитие саморегуляции (задания для свободного выполнения на выбор), система заданий на развитие речи и вербально-логического мышления.

Основным принципом построения системы заданий в уроке и в системе уроков является базовое положение теории развивающего обучения: *содержание деятельности ребенка должно представлять собой интеллектуальную познавательную задачу*. Мы полагаем необходимость соблюдения этого положения обязательной для системы коррекционно-развивающего обучения математике. Безусловно, методически эта задача должна быть выстроена так, чтобы дети могли с ней справляться, при минимальной (и, желательно, незаметной детям) помощи педагога.

Рассматриваемая концепция имеет также целый ряд специфических, методико-математических особенностей, например, разведение в первом полугодии этапов изучения устной и письменной нумерации; раздельное знакомство с действиями сложения и вычитания; разведение понятий десятичного и разрядного состава; адаптированная к возможностям детей со слабым развитием словесно-логической памяти система формирования вычислительных навыков, при которой главный упор делается на визуальные технологии; адаптированная к недостаточности развития словесно-логического мышления система обучения решению задач и т. д.

Отличительной чертой предлагаемой системы от развивающих систем, ориентированных на норму развития, является ее ориентировка на «второй способ научения» по определению С.Л. Рубинштейна: «Существует... два вида учения или, точнее, два способа научения и два вида деятельности, в результате которой человек овладевает новыми знаниями и умениями. Один из них специально направлен на овладение этими знаниями и умениями, как на свою прямую цель. Другой приводит к овладению этими знаниями и умениями, осуществляя иные цели. Учение в последнем случае — не самостоятельная деятельность, а процесс, осуществляющийся как компонент и результат другой деятельности, в которую он включен»[1]. В качестве «другой деятельности» в предлагаемой системе используется *конструктивная деятельность ребенка с разнообразными моделями изучаемых понятий и отношений*. Внешне привлекательный результат этой деятельности (забавный рисунок, аппликация, конструкция) является средством и способом формирования *мотивации* деятельности ребенка: ему хочется сделать это самому, получить в свое распоряжение, экспериментировать с полученной конструкцией. Дети очень ревностно относятся к результатам своей работы — гордятся ими, демонстрируют сверстникам, родителям, подолгу с удовольствием рассматривают свои тетради и альбомы, просят рамки домой и с гордостью дарят учителю и воспитателю свои самостоятельные работы. Таким образом формируется собственно то, что в дидактике принято называть «познавательные интересы», «познавательная активность», «мотивация познавательной деятельности». Косвенный способ формирования этих компонентов познавательной сферы нисколько не умаляет его результатов и не противоречит общей теории учебной деятельности.

[1] *Рубинштейн С.Л.* Основы общей психологии. М., 1946. С. 600.

«Жесткое» понимание принципа осознания детьми содержания и цели учения, принятого в теориях развивающего обучения, разрабатываемых для детей с нормой развития (Л.В. Занков, В.В. Давыдов) не имеет смысла при работе с детьми с задержкой развития, поскольку они фактически находятся на дошкольном уровне, а чем младше ребенок, тем меньше может педагог рассчитывать на осознание им внутренней мотивации учения. Такое осознание не всегда имеет место не только в начальной школе при норме развития, но и в средней и старшей школе.

Построение процесса учения на доминировании внутренней мотивации деятельности ребенка возможно в том случае, когда цель этой деятельности значима для ребенка и понятна ему, в этом случае она ребенком принимается (интериоризируется) и превращается в «двигатель» его собственной активности. Содержание учения (которое в данном случае явилось средством формирования цели) в этом случае осваивается легко и без всякого принуждения, легкость освоения влечет за собой возможность большей «плотности» этого содержания, т. е. большего объема. При этом собственно учебные навыки и предметное содержание осваиваются ребенком как следствие и результат интересной ему деятельности, можно сказать, что усвоение происходит через подсознание, через четко организованный процесс «периферийного восприятия», с опорой на первую правополушарную систему восприятия. Речевой уровень общения субъектов этого процесса на данном этапе главным образом фиксирует результаты деятельности восприятия и осмысления. Быстрое и объемное усвоение детьми как самих видов деятельности с содержанием, так и непосредственно содержания, приводит к стимулированию общего умственного и психического развития каждого ребенка. У одних детей это приводит к яркому проявлению способностей, заложенных в них природой, или помогает раскрытию потенциала, который по тем или иным причинам задержался в своем «раскрытии»; у других — к общему изменению (коррекции) интеллектуального потенциала; у третьих — к коррекции и компенсации недостатков и задержек развития познавательных процессов. Главное в этой работе — система, рассчитанная не на один год, не пропускающая ни одного дня, не откладывающая коррекционно-развивающую работу на потом («Вот выучим таблицу, а потом сделаем пару развивающих заданий»; «вот отработаем этот тип задач, а в субботу на индивидуальном занятии займемся развитием»; «скорее решайте примеры, а то времени на индивидуальные задания не останется...»).

Оценивая результаты обучения математике детей с задержкой развития, мы хотели бы отметить, что детям очень нравится такая система работы — они ждут уроков математики, готовы заниматься ею дополнительно по собственному почину и предпочитают математику всем другим урокам. На наш взгляд, это достаточно показательный результат обучения, поскольку формирование мотивационной стороны учебной деятельности сегодня считается не менее важной стороной процесса обучения, чем усвоение содержательной стороны. Значимый коррекционно-развивающий эффект предлагаемой методической системы подтверждается результатами независимых обследований, проводимых ежегодно школьными психологами. Что же касается содержательной стороны (математики), то ее хорошее усвоение в предлагаемой системе происходит как следствие повышения общего уровня развития ребенка, что согласуется с базовыми положениями теории развивающего обучения Л.В. Занкова.

Приведем пример методической разработки трех уроков математики из книги для учителя «Математика и конструирование в 1 классе. Коррекционно-развивающее обучение» (М., 2004). Отличительной чертой этих разработок является формулировка в явном виде целей развивающей работы в каждом упражнении, что делает ее ясной и осознаваемой не только для опытного учителя, но и для студента, выходящего на свою первую практику в школу.

Тема урока: Признаки предметов. Счет предметов. Число 1

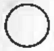
Цель урока: учить детей выделять признаки цвета в предметах и в группах предметов. Число 1 и его количественная модель. Формирование внимания, умения работать по образцу. Формирование приемов анализа и синтеза.

Упражнение 1

Цель — уточнение представления о форме фигуры. Обучение умению выделять и обозначать признак цвета словом. Обучение умению соотносить количество и число 1.

Материал: стандартный «Дидактический набор» с фигурами трех форм — круг, квадрат и треугольник. Фигуры трех цветов: квадрат — красный, треугольник — зеленый, круг — желтый. Если нет стандартного набора, фигуры изготавливаются из картона. Карточки трех цветов у педагога.

Задание:

— Достаньте из дидактического набора такую фигуру: 

— Что это? Какого она цвета?

— Достаньте такую фигуру: 

— Что это? Какого она цвета?

— Достаньте такую фигуру: 

— Что это? Какого она цвета?

— Сколько кругов у каждого из вас? *(Один.)* Квадратов? Треугольников?

— Сколько фигур у каждого из вас? *(Три.)*

Задание продолжает игра «в прятки»: педагог показывает карточку определенного цвета, дети должны закрыть ладонью фигурку такого же цвета.

— Какую фигуру ты закрыл, Петя? *(Квадрат.)*

Педагог убирает карточку с указанием цвета из поля зрения ребенка.

— Какого она цвета?

Ребенок отвечает, не снимая руки с фигуры. Аналогичные вопросы педагог задает другим детям с другими фигурами.

Игра развивает зрительную долговременную память, внимание, восприятие.

Завершая упражнение, педагог предлагает детям сравнить фигуры:

— Чем похожи все красные фигуры? *(Все — квадраты.)* Чем еще похожи? *(Одного размера.)*

— Как это проверить? *(Совместить две фигуры — они совпадают, значит, равны.)*

Упражнение 2

Цель — уточнение представления о форме фигуры. Обучение умению выделять и обозначать признак цвета словом. Развитие умения работать по представлению.

Материал: фигуры дидактического набора у детей, карточки трех цветов у педагога.

Способ выполнения: педагог показывает сначала одну карточку (зеленую):

— Закройте левой рукой фигуру такого цвета.

Затем показывает вторую карточку (красную):

— Закройте правой рукой фигуру такого цвета. Какая фигура закрыта левой рукой? Какого цвета? Какая фигура закрыта правой рукой? Какого она цвета?

— Сколько фигур осталось незакрытыми? *(Одна.)* Что осталось незакрытым? *(Круг.)*

Упражнение 3. «Башенка»

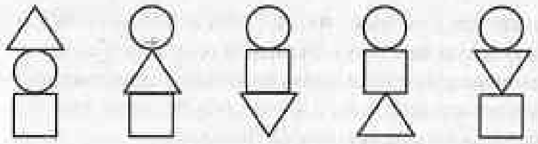
Цель — уточнение представления о форме фигуры. Обучение умению замечать и характеризовать взаимное расположение предметов на плоскости. Обучение умению соотносить число и множество (выделять количество в соответствии с числом 1, считать предметы в пределах 3).

Материал: фланелеграф, модели фигур у педагога, дидактический набор у детей.

Способ выполнения: педагог строит на фланелеграфе башенку из картонных моделей фигур, дети воспроизводят ее на столе из фигур «Дидактического набора».

Затем педагог видоизменяет свою модель. Перестраивая башенку, педагог заслоняет ее от детей, чтобы они не повторяли способ действия. Дети ориентируются на конечный результат и рассказывают, как они ее строили: сначала квадрат, над ним треугольник. Сверху — кружок. Педагог просит назвать среднюю, верхнюю, нижнюю и т. п. фигуру, ее цвет.

Дети по желанию пересчитывают фигуры, указывая на каждую пальцем. *(Один, два, три. Всего фигур три.)*



(Первая, вторая, третья. Третья — кружок. Всего три фигуры. Квадрат — один. Кружок — один. Треугольник — один.)

Другой вариант задания: каждую следующую башенку педагог, а затем дети складывают из новой тройки фигур. В результате на фланелеграфе и на столах появляются несколько моделей башни. Педагог может предложить детям уже на третьей модели складывать варианты самостоятельно как на фланелеграфе, так и на столе. Лучший вариант — наибольшее количество не повторяющихся башен. Неизбежно будут появляться повторяющиеся варианты — это дает возможность педагогу предложить детям найти «такую же», что развивает наблюдательность, восприятие и внимание.

Упражнение 4

Цель — уточнение представления о форме фигуры. Обучение умению выделять нужную форму и правильно ее ориентировать на плоскости. Обучение умению соотносить количество и число (в пределах 3).

Материал: тетрадь, цветные карандаши и картонный или пластиковый шаблон с тремя прорезями на каждого ребенка (их можно вырезать из старых обложек общих тетрадей или старых пластиковых папок).

Задание: в тетради зарисовать башенки и раскрасить их по шаблону (фигуры раскрашиваются внутри прорези, соблюдая цвет образца на фланелеграфе, где педагог оставляет два нужных образца, совпадающие с образцами в тетради).

— Сколько у вас башенок? *(Две.)*

— Нарисуйте третью башенку сами, какой хотите формы, но чтобы она отличалась от первых двух. Раскрасьте ее. Расскажите про свою башенку — из каких фигур она состоит, как вы их нарисовали.

— Сколько теперь у вас башенок?

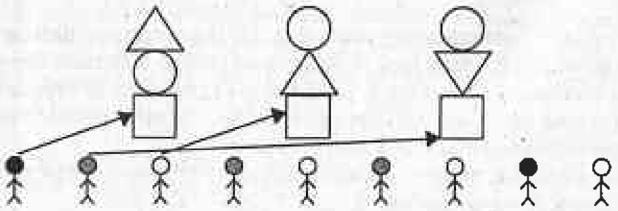
Упражнение 5

Цель — обучение умению устанавливать соответствие между предметами по заданному признаку.

Материал: тетрадь, цветные карандаши.

Способ выполнения: педагог предлагает сюжет:

— В этих башнях живут человечки. В первой башенке — красные, во второй — синие, в третьей — зеленые. Покажите стрелкой, кто живет в какой башенке.

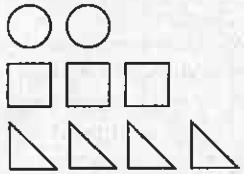


Упражнение 6

Цель — обучение умению устанавливать соответствие между предметом и его условным заменителем, умению сравнивать количества на основе взаимно-однозначного соответствия.

Материал: тетрадь, дидактический набор.

Задание: положить перед собой столько кружков, сколько красных человечков (**вариант:** положить под каждым красным человечком кружок); квадратов под ними столько, сколько зеленых человечков; треугольников столько, сколько синих человечков:



— Каких человечков больше? Каких меньше? Почему вы так думаете?

— Какого цвета все круги? Все квадраты? Все треугольники?

— Кто хочет сосчитать круги? Треугольники? Квадраты? Кто хочет сосчитать все фигуры?

(Это задание учитель предлагает, ориентируясь на состав класса, если есть дети, готовые его выполнить.)

Упражнение 7. Игра «Зеркало»

Цель — снятие мышечного напряжения, развитие координации и внимания.

Способ выполнения: под спокойную музыку дети повторяют за педагогом несложные движения, включая повтор хлопков (2, 3), как без ритмического рисунка, так и с ритмическим рисунком: II; I – I; II — I; I — II и т. д. (Упражнение используется в качестве физминутки.)

Дополнительные упражнения

Упражнение 8

Цель — уточнение представления о форме объемной фигуры. Обучение умению соотносить пространственное расположение объемных фигур. Развитие конструктивных умений.

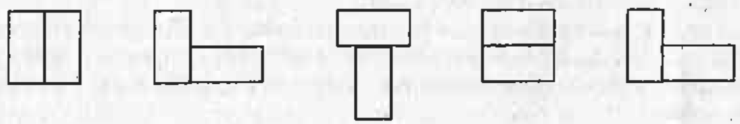
Материал: по два кирпичика из строительного набора у каждого ребенка (2×4×8 см).

Анализ материала:

— Сколько у каждого кирпичиков? *(Два.)*

— Два предмета — это пара. Какого цвета пара у Тани? У Вани?.. У кого пара такого же цвета?

Способ выполнения: педагог предлагает различные комбинации взаимного расположения двух кирпичиков. Дети должны повторять конструкцию, используя свои кирпичики. Ведущим в игре может быть кто-то из детей.



Упражнение 9

Цель — уточнение представления о форме фигуры. Обучение умению соотносить пространственное расположение объемных фигур. Развитие конструктивных умений.

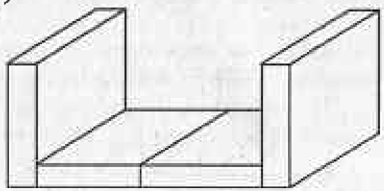
Материал: по 4 кирпичика у каждого ребенка

Способ выполнения: педагог дает детям еще по 2 кирпичика.

— Кто может сосчитать, сколько теперь кирпичиков у каждого? *(4.)*

Педагог складывает кровать из кирпичиков.

— На что это похоже? *(Это кровать.)*



— Сложите кровать.

— Теперь сложите стол.

Образец стола не дается. Дети строят стол самостоятельно.

— Сложите стул.

Дети строят стул самостоятельно, образец не дается.

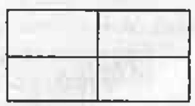
Результаты анализируются: какой больше похож на стол, на стул. При необходимости педагог рекомендует детям в качестве образца конструкцию кого-то из детей: У Тани — похоже. Сделайте, как у Тани.

Вместо упражнений 8 и 9 можно использовать следующее задание (его можно использовать и дополнительно):

Упражнение 10. «Разрезные картинки»

Цель — уточнение представления о соотношении части и целого в изображении предмета. Обучение умению соотносить пространственное расположение частей фигуры. Развитие аналитико-синтетических конструктивных умений, воссоздающего воображения.

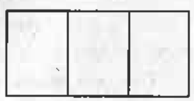
Материал: разрезанные открытки. Открытки разрезаны одинаково. Каждый ребенок получает 4 части своей открытки.



Задание: сложить картинку.

Собрав один вариант, ребенок получает другой (каждый ребенок собирает от 2 до 6 вариантов).

Если ребенок испытывает трудности, педагог предлагает ему открытку, разрезанную так.



Для самых слабых детей на конверт приклеивается целый (неразрезанный) образец. Желательно добиться, чтобы в течение 2—3 недель дети перестали просить образец и учились подбирать части под мысленно угаданный образ.

Для индивидуальной или самостоятельной работы используется задание 4 в тетради. Цель задания — развитие гибкости мышления, развитие умения замечать закономерности в расположении предметов и соблюдать их при выполнении задания.

Способ выполнения:

— Раскрасьте яблоки зеленым цветом, а вишни — красным цветом.

— Заполните пустые клетки в рамочке рядом так, чтобы было похоже на первую рамку (нужно соблюдать расположение предметов — наискосок и единство цвета).

Аналогично организуется работа со вторым рисунком. Затем его выполнение обсуждается.

Тема урока: Счет предметов. Числа 1—3. Признаки предметов.

Цель урока: *учить детей соотносить числа 2 и 3 с количественной моделью. Развивать внимание и восприятие. Учить выделять признак размера в предметах.*

Упражнение 1. Разминка для пальцев

Цель — организация внимания, развитие мелкой моторики и координации.

Способ выполнения: педагог показывает пальцевые фигуры, поясняя свои движения, дети повторяют их: «Соединяем кончики пальцев обеих рук. Надавили (какая рука сильнее?), отпустили, расслабили. Повторим упражнение». Затем включаются разнообразные упражнения на подражание с приговорками: «побежали-побежали» (пошевелили пальцами растопыренных ладоней), «поймали муху» (резко сжали кулак, покрутили кулаками, расслабили руку), «поиграли на пианино» (поочередно каждым пальцем и последовательно всеми постучали по столу). «Покажем козу рогатую» (пошевелим пальцами над головой), «курочку» (поклевали зернышки), «уточку» (открываем рот) и т. п.

Упражнение 2. Игра «Внимание»

Цель — формирование слухового внимания, обучение умению считать на слух в пределах 3.

Способ выполнения: повтор ритмического рисунка хлопков с открытыми и закрытыми глазами): II; I — I; II — I; I — II; III; I — I — I, с последующим вопросом: «Сколько раз хлопнули?»

Упражнение 3. «Что в мешочке?»

Цель — уточнение представления о форме фигуры. Обучение умению узнавать форму предмета на ощупь. Обучение умению соотносить число и множество.

Материал: несколько небольших, легко узнаваемых наощупь предметов в мешочке из плотной ткани (удобен стандартный набор «Бирюльки»).

Способ выполнения: педагог опускает предметы в мешочек, предварительно давая детям рассмотреть их и назвать. Затем дети по очереди опускают руку в мешочек и на ощупь догадываются, что за предмет у них в руке, называют, а затем достают его. Поскольку в классе 9—12 детей, на столе педагога оказывается 9—12 предметов.

Педагог просит выбрать посуду: стаканчик, мисочка, горшочек, бутылка, графин. Педагог оставляет на столе 3—5 предметов. Предлагает детям пересчитать предметы. Счет количественный: каждый раз от другого предмета («а теперь начинайте считать от графина», «а теперь — от стаканчика»...). Дети убеждаются в том, что общее количество от изменения начала отсчета не меняется. Не надо выставлять предметы в ряд. Лучше пересчитывать их в произвольном порядке, отодвигая при счете уже сосчитанный предмет.

Упражнение 4. «Что пропало?»

Цель — обучение умению замечать и характеризовать количественные изменения в множества предметов. Развитие внимания и расширение объема запоминания. Развитие долговременной образной памяти.

Способ выполнения: используется набор предметов предыдущего задания. Педагог просит детей закрыть глаза и прячет один из предметов. Дети должны вспомнить, что пропало. Игра повторяется несколько раз. Затем, убирая предметы в мешочек, педагог просит детей вспомнить, кто какой предмет доставал:

— Кто достал пирамидку?

— Кто шарик? и т. д.

Упражнение 5

Цель — обучение умению соотносить числа 2 и 3 с количественной моделью. Развитие конструктивных умений.

Материал: счетные палочки. Используются стандартные деревянные счетные палочки. Обычно в коробке палочки двух цветов. Педагог использует фланелеграф, выкладывая вместо палочек узкие полоски бархатной бумаги.

Задание: педагог выставляет на фланелеграф две модели палочек и предлагает детям: 

— Возьмите из коробки столько палочек, сколько у меня. Положите их перед собой так же.

— Сколько у вас палочек? *(Две.)*

— У кого палочки одного цвета? Какого цвета у тебя палочка? *(Одна красная, одна зеленая.)*

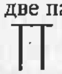
— Один да один — сколько вместе? *(2.)*

— Сделайте так, чтобы у каждого из вас было по две красные палочки, а теперь так, чтобы было по две зеленые палочки.

Упражнение 6

Цель — обучение умению соотносить числа 2 и 3 с количественной моделью. Развитие конструктивных умений.

Задание: педагог показывает на фланелеграфе две палочки.

— Возьмите еще одну палочку и положите так: 

— Сколько стало палочек? Кто сосчитает?

— Три палочки — это больше или меньше, чем две?

— Если убрать одну палочку из трех, сколько останется?

— На что похожа фигура? *(На ворота, скамейку, на букву П.)*

— Кто знает слова, начинающиеся на П? *(Портфель, папа, подушка...)*

Педагог помогает наводящими вопросами: «На что голову кладут?» «Во что книжки складывают?»

— Теперь верхнюю палочку переложите так: 

— Что изменилось? Изменилось ли количество палочек? Почему не изменилось? *(Палочку переставили, но не убрали и не добавили.)*

— На что теперь похожа фигура? *(На букву Н.)*

— Назовите слова на Н.

Упражнение 7

Цель — обучение умению соотносить число 3 с количественной моделью. Развитие конструктивных умений.

Задание:

— Что еще можно сложить из трех палочек?

Дети складывают фигурки и буквы, давая им название с помощью педагога. Работа дублируется на фланелеграфе.

ступеньки рогатка столик и т. п.

Если дети не могут складывать буквы, не надо предлагать им это делать. Кто-то из детей обязательно сложит треугольник:

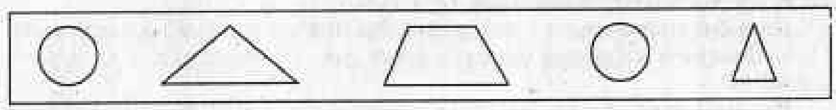
— Что это? *(Треугольник.)* Кто знает, почему он так называется? 

(Три угла — педагог помогает показать пальцем вершины, *три стороны* — ребенок проводит пальцем вдоль стороны.)

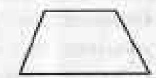
Упражнение 8

Цель — обучение умению выделять фигуру заданной формы и располагать ее в соответствии с заданием. Развитие конструктивных умений, внимания и воображения.

Материал: трафарет с прорезями в виде геометрических фигур на каждого ребенка, четверть нелинованного листа бумаги, цветные карандаши:



Задание: найти на трафарете треугольник, обвести его. Закрасить по трафарету.



— Сколько треугольников вы нашли на трафарете? *(2.)*

— Незнайка думает, что эта фигура тоже треугольник:

— Кто объяснит ему, что он неправ? *(4 угла, 4 стороны.)*

— Кто ошибся вместе с Незнайкой? Зачеркните аккуратно эту фигуру.

— Обведите красным карандашом «от руки» большой треугольник. Синим карандашом — маленький треугольник.

Упражнение 9

Цель — обучение умению распознавать геометрические фигуры как часть конструкции. Развитие конструктивных умений, внимания и воображения.

Материал: тетрадь.

Задание:

— Посмотрите, какие кошки. Сколько их? Похожи они? Чем? *(Круг и треугольник в рисунке каждой кошки.)*

— Чем они отличаются? *(Большая и маленькая кошки: кошка-мама и котенок.)*

Если педагог работает при отсутствии у детей тетрадей, все рисунки он делает сам с использованием рамки и показывает детям свои образцы. В этом случае их надо сделать увеличенными.

Упражнение 10

Цель — обучение умению распознавать геометрические фигуры как часть конструкции. Развитие конструктивных умений, внимания и воображения. Развитие зрительно-моторной координации и мелкой моторики.

Материал: тетрадь, трафарет, цветные карандаши.

Задание: нарисовать в тетради таких же кошек, используя трафарет, и закрасить их.

Дополнительные упражнения в тетради:

№ 3 (упражнение на распределение внимания). В тетради зеленых человечков отметить одной черточкой, красных — двумя черточками.

№ 4 (упражнение на развитие аналитико-синтетических способностей, внимания и восприятия). Раскрасить фигуры по образцу, сохраняя заданный порядок цветов при изменяющейся форме фигур.

Тема урока: Признаки фигур. Счет фигур. Числа 1–4.

Цель урока: *учить сравнивать фигуры по различным признакам: цвет, размер, форма. Формировать умение считать в пределах 4. Учить соотносить число 4 с количественной моделью.*

Упражнение 1. «Разминка для пальцев»

Цель — развитие внимания, координации и моторики, обучение умению соотносить число и числовую фигуру в пределах 4.

Способ выполнения: см. упр. 1 урока 2. Заканчивается разминка такой игрой:

— Покажите на правой руке (на левой руке) столько пальцев, сколько я говорю.

Педагог называет число: два, один, четыре и т. д., а дети показывают столько же пальцев одной руки.

Вариант выполнения: педагог показывает, например, 2 пальца и просит детей показать на 1 больше (или на 1 меньше).

Правила игры объясняются детям, игра продолжается 2–3 минуты.

Упражнение 2

Цель — обучение умению сравнивать фигуры по различным признакам. Развитие целенаправленного наблюдения, визуального анализа. Развитие внимания и воображения.

Материал: Фланелеграф, модели фигур у педагога.

Способ выполнения: педагог выставляет на фланелеграфе 2 круга: большой желтый и маленький зеленый.

— Чем они отличаются? *(Цветом, размером.)*

— Чем похожи? *(Оба круглые.)*

— Что вы можете назвать похожее на большой желтый круг? На маленький зеленый?

Дети приводят примеры, учитель уточняет: «чем похоже?»

Упражнение 3

Цель — обучение умению сравнивать фигуры по различным признакам. Развитие визуального анализа и синтеза. Развитие внимания и воображения.

Материал: у каждого ребенка большой красный круг, зеленый квадрат, маленький желтый круг, синий треугольник, желтый треугольник.

Задание: педагог указывает на большой желтый круг.

— Что у вас есть похожее на этот круг? На этот круг (маленький, зеленый)?

Могут быть разные варианты ответов: *похожи формой, размером, цветом (например, желтый треугольник похож на большой желтый круг цветом и т. д.).*

Упражнение 4

Цель — обучение умению сравнивать фигуры по различным признакам. Развитие целенаправленного наблюдения, обучение умению распределять (классифицировать) предметы по выделенным признакам. Развитие внимания и воображения, долговременной памяти.

Задание:

— Разделите все свои фигуры на группы. Как вы это сделали? Что у вас получилось? *(Один квадрат, два круга, два треугольника. Разделили по форме.)*

— Уберите квадрат в конверт. Сосчитайте все оставшиеся фигуры. Что у вас желтое? *(Круг, треугольник.)* Что синее? Что красное?

— Какую фигуру вы убрали в конверт? *(Дети отвечают по памяти.)* Какого она была цвета?

— Сложите все фигуры в конверт. Закройте конверт. Кто может назвать, какие фигуры в конверте?

Упражнение 5

Цель — обучение умению выделять заданную фигуру и располагать ее в заданном положении. Развитие пространственного мышления и визуального анализа. Развитие внимания и воображения, зрительно-моторной координации.

Материал: тетрадь, новый трафарет, цветные карандаши.

Задание:

— Кто помнит, кого мы вчера рисовали в тетради? *(Кошку-маму и котенка.)*

Педагог открывает детям нужную страницу тетради.

— Кто сегодня новый на картинке? *(Кошка-папа.)*

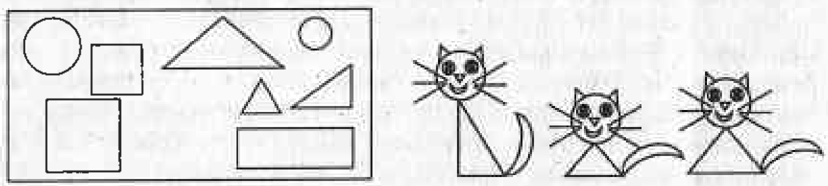
— Почему вы решили, что это папа? *(Он больше всех.)*

— Найдите нужную фигуру на трафарете. Попробуйте нарисовать кошку-папу. Поставьте трафарет правильно.

— Кто хочет, нарисует рядом кошку-маму и котенка, как вчера.

— Закрасьте рисунок по трафарету.

Педагог проверяет правильную постановку трафарета, затем разрешает рисовать самостоятельно.



Упражнение 6

Цель — распределение внимания.

Материал: тетрадь, см. упражнение № 3.

Задание: Две палочки обвести зеленым карандашом, три палочки обвести красным карандашом и т. п.

Упражнение 7

Цель — развитие анализирующего наблюдения.

Материал: тетрадь, см. упражнение № 4.

Задание: Раскрасить фигуры.

При раскраске фигур учитывается постоянство цвета при изменяющемся положении фигур (в каждой следующей рамке происходит перемещение последней фигуры влево на первое место).

Дополнительное упражнение:

Упражнение 8. «Разрезные картинки» (см. урок 1 упр. 10).

Приведенные тексты разработок уроков показывают, что организация развивающей работы учителя на уроке математики возможна уже с самых первых уроков, при этом не теряется основная образовательная цель — формирование начальных математических знаний и умений у детей. Анализ содержания урока показывает, что ни одно из заданий не носит полностью репродуктивный характер, каждое требует от ребенка определенных усилий при его выполнении. Сама методическая структура урока представляет собой цепочку логически и сюжетно взаимосвязанных упражнений, при этом результат выполнения предыдущего упражнения является материалом для построения последующего. Урок не требует какого-то сверхнеобычного материального обеспечения. Уровень сложности заданий можно варьировать, например, более сообразительным детям можно предложить сконструировать и нарисовать большее количество башенок различной конструкции. Можно увеличить количество человечков, предложить детям сосчитать их и подобрать нужную цифру к каждому количеству.

Отдельно следует рассмотреть ситуацию, когда есть дети, которые не справляются самостоятельно с заданием. Каким образом должен действовать в этом случае педагог?

Прежде всего, следует дать ребенку возможность попробовать самому справиться с заданием. Многие учителя начальной школы стараются предварительно подробно объяснить ребенку, что и как делать, и только потом позволяют ему действовать. Такая тактика приводит к формированию у ребенка несамостоятельного стиля деятельности, неуверенности в своих силах, и даже нежелания самостоятельно прилагать какие-то умственные усилия. Для каждого шага в этом случае дети ждут инструкции педагога, а в ее отсутствие не решаются приступить к деятельности.

Если ребенок не может справиться с заданием, ему оказывается *необходимая помощь.* Под необходимой помощью подразумевается *минимальная помощь, позволяющая ребенку начать действовать.* Такое понимание процесса оказания помощи ребенку имеет целью выявить, насколько чувствительным оказывается он к помощи, принимает ли ее, усваивает ли ее, может ли под влиянием оказанной помощи сам найти дальнейший путь деятельности или найти и исправить ошибки. Степень такой чувствительности будет показывать степень обучаемости ребенка. Отзывчивость ребенка на помощь, способность усваивать ее являются прогностически значимыми показателями его потенциальных учебных возможностей (обучаемость).

Из курса дидактики студенты знают, что на уроке возможны три вида помощи ребенку: *стимулирующая помощь, направляющая помощь, обучающая помощь.*

Стимулирующая помощь нужна, когда ребенок не может включиться в работу (не решается сам начать действовать) или когда работа завершена, но выполнена неверно. В первом случае педагог должен помочь ребенку организовать себя, ободрить его, успокоить, вселить уверенность в том, что он справится с заданием. Можно повторить само задание, уточнить у ребенка, что он не понял, еще раз пояснить задание. Во втором случае педагог указывает на наличие ошибки в работе и предлагает пути ее поиска и исправления (свериться с образцом, сравнить с работой соседа, повторить цель задания и соотнестись с ней и т. п.).

Направляющая помощь необходима, когда ребенок не может определить способ или выбрать средства деятельности, выделить первый шаг и спланировать деятельность. В этом случае педагог использует наводящие вопросы или подсказки к выбору средств деятельности, иногда стоит помочь ребенку сделать первый шаг по его выполнению, наметить план действий (что сначала, что — потом). Например, ребенок не может начать выполнять конструкцию или рисунок по образцу. Педагог может подсказать: «Начни сверху (снизу, с головы, с ног, с кружка и т. п.)» Или: ребенок не может начать складывать разрезную картинку, растерявшись перед смешавшимися кусочками сюжета. Педагог может поставить ему первый фрагмент и показать его правильную ориентировку: «Смотри: этот — отсюда..» и т. п. Иногда достаточно постоять рядом с ребенком минуту другую, одобрительно кивая или подбадривая его: «Верно! Молодец! Подумай еще!» и т. п.

Обучающая помощь требуется в тех случаях, когда первых двух видов помощи недостаточно. В этом случае педагог непосредственно показывает ребенку, что и как сделать. Особую диагностическую важность приобретает в этом случае степень усвоения помощи, которая служит главным критерием для дифференциации детей в группы по степени обучаемости. Эффективным восприятием обучающей помощи можно считать ситуацию, когда ребенок не только сам справляется с заданием после оказания обучающей помощи, но и может перенести усвоенный способ деятельности на решение как аналогичных задач, так и задач, структурно аналогичных, но определенных либо на другом материале, либо в других внешних условиях. В дидактике такое явление называют переносом способа деятельности и полагают признаком значимого продвижения ребенка в развитии.

В общем случае, именно обучающая помощь такого плана характеризует сам тип коррекционно-развивающего обучения. Поэтому любую учебную работу в коррекционно-развивающем обучении следует строить так, чтобы она одновременно была и обучающей, и диагностической.

Примеры разработок уроков и разнообразные диагностические методики публикуются в последнее время в многочисленных журналах, пособиях и методических пособиях. Но следует иметь в виду, что большинство этих разработок представляет не развивающее, а традиционное направление в математическом образовании младшего школьника. Иногда они немного модернизированы, а часто просто оставлены в первозданном виде, будучи лишь «приукрашены» игровыми ситуациями, театрализациями и сказочными сюжетами. Такие уроки, внешне яркие и броские, производящие иногда большое впечатление разнообразных гостей на уроке, реально малорезультативны при настоящей работе по развитию математического мышления детей, при настоящей индивидуализированной коррекционно-развивающей работе с ребенком младшего школьного возраста. Используя готовые разработки уроков, учитель должен также следить за их методико-математической корректностью и соответствием современному пониманию развивающего обучения и преемственности в обучении математике.

Завершая разговор о коррекционно-развивающем обучении детей с проблемами развития, приведем фрагмент из книги известного психотерапевта В. Леви[1]:

«...Ребенок странный, чудной, не от мира сего.

Непонимаемый и непонимающий, непринимаемый и непринимающий. По врачебной терминологии "аутичный" (от слова "ауто" — я сам) — пребывающий в себе, неконтактный. В каждой детсадовской группе таких, в среднем, трое. В каждом школьном классе — один—два, почти обязательно.

Один скоро сделается как все — своеобразие спрячется в гены, чтобы расцвести гениальностью или вспыхнуть безумием через одно—два поколения или дальше...

[1] *Леви В.* Нестандартный ребенок. М., 2003. С. 349.

Другой тоже как-то приспособится, отчасти приспособятся и к нему: чудак, что же поделаешь... Могут и полюбить: странный, зато и забавный, сдвинутый, зато честный, уж такой не обманет. Опорой приспособления может послужить какая-то узкая специальная одаренность, часто свойственная этому типу (способности к математике, к языкам, художественные, технические...).

Третьему придется стать постоянным посетителем психоневрологических учреждений.

Инопланетянин среди себе подобных, аутичный ребенок требует нескончаемого терпения и безграничной проникновенности. Закрытый для людей, он может быть как никто другой, открыт Истине...

Может быть, это носитель неизвестного дара... Один бывший странный мальчик написал "Божественную комедию", другой создал теорию относительности; сотни их обогатили культуру шедеврами, прозрениями и откровениями, которыми живет человечество; миллионы других, безвестных, не создали ничего, но без них мир утратил бы свою тайну... Не все должны быть как все.

Плохо ли ребенку от его странностей или от того, что мы не умеем понять их значение? Что нас беспокоит: ЕГО здоровье, ЕГО счастье — или его неприятие НАШИХ представлений о здоровье и счастье?

Жизнь сплошь и рядом показывает, что несчастны-то как раз те, кто усваивает эти расхожие представления и пытается им соответствовать»...

Диагностические методики часто ориентированы на констатацию фактического уровня развития интеллекта и способностей ребенка, а не на движение ребенка по «траектории» развития и, тем более, не на учет своеобразия индивидуальных особенностей этого развития. Эта траектория далеко не всегда «линейна» (и более того, не всегда легко постижима сторонним наблюдателем), о чем настойчиво говорят педагогам не только психологи, но и врачи-психотерапевты, о которых учитель обычно вспоминает как о «последней инстанции». Следовательно, выстраивать методическое и педагогическое сопровождение ребенка следует не по «линейному» стандарту, а в соответствии с индивидуальными особенностями и потребностями ребенка. Учитель должен быть готов к тому, что хотя детализированность — это обязательное требование к разработчикам развивающих технологий обучения, но в реальной жизни даже самые детализированные методики придется дополнять собственными разработками, созданными либо по аналогии, либо в дополнение к имеющимся. Только так можно добиться максимальной постепенности, поступательности и индивидуализации, совершенно необходимых при решении задач обучения и развития ребенка в классе коррекционно-развивающего обучения.

Учебное издание

Белошистая Анна Витальевна

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Курс лекций

Учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Педагогика и методика начального образования»

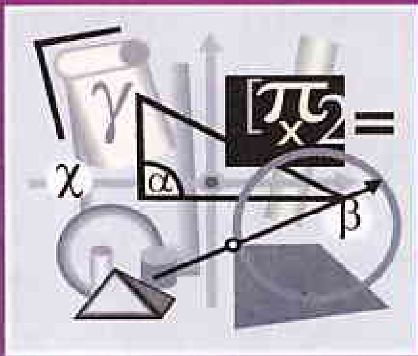
Зав. редакцией *В.А. Саласетдинова*
Редактор *Г.Н. Хондкариан*
Зав. художественной редакцией *И.А. Пшеничников*
Художник обложки *Е.В. Гусейнов*
Компьютерная верстка *А.И. Попов*
Корректор *Т.Я. Кокорева*

Отпечатано с диапозитивов, изготовленных ООО «Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС».

Лицензия ИД № 03185 от 10.11.2000.
Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.24.953.Д.006900.08.06 от 08.08.2006 г.
Сдано в набор 06.09.04. Подписано в печать 17.02.05.
Формат 60×88/16. Печать офсетная. Бумага газетная.
Усл. печ. л. 27,93. Тираж 5 000 экз. (2-й завод 2 501–5 000 экз.) Заказ № 2681.

Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС.
119571, Москва, просп. Вернадского, 88,
Московский педагогический государственный университет.
Тел. 437-11-11, 437-25-52, 437-99-98; тел./факс 735-66-25.
E-mail: vlados@dol.ru
http://www.vlados.ru

ООО «Великолукская городская типография»
182100, Псковская область, г. Великие Луки, ул. Полиграфистов, 78/12
Тел./факс: (811-53) 3-62-95
E-mail: zakaz@veltip.ru



В курсе лекций представлена система подготовки учителей начальных классов по организации развивающего обучения младших школьников математике, в основе которой лежит личностно-ориентированный деятельностный подход.

Содержание курса лекций соответствует Государственному стандарту высшего образования по специальности «Педагогика и методика начального обучения».

ISBN 978-5-691-01422-2

9 785691 014222

— Что можно сказать о длинах трех отрезков? *(Они равные, так как за час пешеход проходил одинаковое расстояние.)*

— Как найти это расстояние? *(15 : 3.)*

— А можно ли узнать, сколько километров пройдет пешеход за 4 ч (за 5 ч, за 6 ч) двигаясь с той же скоростью?

— За какое время он может пройти расстояние в 35 км (40 км), если будет двигаться с той же скоростью?

Поиск ответов на такие вопросы поможет ученикам глубже осознать пропорциональную зависимость между скоростью, временем и расстоянием.

Электропоезд за 10 мин прошел 20 км, проходя каждую минуту одинаковое расстояние. Сколько километров проходил электропоезд в одну минуту?

Спортсмен преодолел 100 м за 10 с, пробегая за каждую секунду одинаковое расстояние. Сколько метров он пробегал за одну секунду?

При решении таких задач учащиеся знакомятся с различными единицами скорости, усваивают, что скорость — это расстояние, пройденное в единицу времени.

Для закрепления понятия скорости можно использовать и такие задания:

— Объясните, как понимать следующие выражения: «скорость самолета 810 км/ч», «скорость электропоезда 120 км/ч», «скорость лыжника18 км/ч», «космический корабль летит со скоростью 7200 м/с».

Для того чтобы учащиеся осознали зависимость между скоростью, временем и расстоянием, целесообразно рассматривать сразу по три взаимообратные задачи, оформляя их в таблицу.

Можно предлагать задание:

Составьте три взаимообратные задачи по этой таблице.

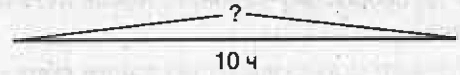
Скорость	Время	Расстояние
?	4 ч	20 км
5 км/ч	?	20 км
5 км/ч	4 ч	?

Графическое моделирование является наиболее эффективным и целесообразным приемом при решении большинства задач на движение.

Рассмотрим задачи:

Поезд прошел некоторое расстояние за 10 час. С какой скоростью шел поезд?

Строим графическую модель:

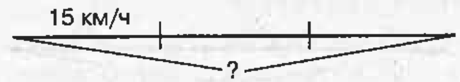


Одного взгляда на чертеж достаточно, чтобы обнаружить, что для ответа на вопрос не хватает данных: не дано расстояние.

Скорость велосипедиста 15 км/ч. Какое расстояние он пройдет за 3 ч?

Типичной ошибкой учащихся при решении данной задачи является неправильный выбор действия (*15 : 3*).

Построение графической модели предупреждает эту ошибку:



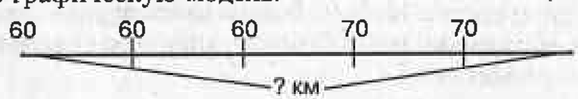
Чертеж показывает, что для нахождения расстояния нужно взять по 15 три раза: 15 · 3 = 45 (км).

Совершая экскурсию по реке на катере, школьники проплыли 66 км. При этом 2 ч они плыли со скоростью 18 км/ч, а остальной путь — со скоростью 15 км/ч. Сколько всего времени находились в пути школьники?

Если учитель планирует фронтальный разбор этой задачи, он может воспользоваться таблицей, которую заполняет в процессе разбора текста с детьми. Графическая модель к этой задаче является более наглядной и удобной для выполнения в тетради — по ней легко определить путь решения:

Мотоциклист ехал 3 ч со скоростью 60 км/ч и 2 ч со скоростью 70 км/ч. Какое расстояние проехал он за все это время?

В процессе разбора текста и вычленения данных целесообразно составить графическую модель:



Опираясь на чертеж, легко составить к этой задаче выражение: 6 · 3 + 70 · 2.

Литература

Актуальные проблемы методики обучения математике в начальных классах // Под ред. М.И. Моро, А.М. Пышкало. М., 1977.

Амонашвили Ш.А. Здравствуйте — дети! М., 1997

Боданский Ф.Г. Развитие математического мышления у младших школьников // Развитие психики школьников в процессе учебной деятельности. Сб. науч. трудов. М., 1983. С. 115–125.

Божович Л.И. Личность и ее формирование в детском возрасте: Психологическое исследование. М., 1968.

Брунер Дж. Психология познания / Пер. с англ. М., 1977.

Брушлинский А.В. Мышление и прогнозирование. М., 1979.

Брушлинский А.В. Психология мышления и проблемное обучение. М., 1985.

Бугрименко Е.А., Венгер А.Л. Готовность детей к школе. Диагностика психического развития и коррекция его неблагоприятных вариантов. М., 1992.

Возрастные возможности усвоения знаний (младшие классы школы) / Под ред. Д.Б. Эльконина, В.В. Давыдова. М., 1966.

Возрастные и индивидуальные возможности образного мышления учащихся / Под ред. И.С. Якиманской. М., 1989.

Грановская Р.М. Элементы практической психологии. Л., 1988.

Гуткина Н.И. Психологическая готовность к школе. М., 2000

Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения. М., 1986.

Дети с временными задержками развития / Под ред. Т.А. Власовой, М.С. Певзнер. М., 1971.

Дети с отклонениями в развитии / Под ред. Т.А. Власовой, В.И. Лубовского, Н.А. Цыпиной. М., 1984.

Дружинин В.Н. Психология общих способностей. М., 1995.

Занков Л.В. Обучение и развитие (экспериментально-педагогическое исследование) // Избранные педагогические труды. М., 1990.

Истомина Н.Б. Методика обучения математике в начальных классах. М., 1997.

Кумарина Г.Ф. и др. Коррекционная педагогика в начальном образовании. М., 2001.

Лейтес Н.С. Умственные способности и возраст. М., 1971.

Лубовский В.И. Психологические проблемы диагностики аномального развития детей. М., 1989.

Маркова А.К., Лидерс А.Г., Яковлева Е.Л. Диагностика и коррекция умственного развития в школьном и дошкольном возрасте. Петрозаводск, 1992.

Марцинковская Т.Д. Диагностика психического развития детей. М., 1997.

Менчинская Н.А. Психология обучения арифметике. М., 1955.

Небылицын В.Д. Основные свойства нервной системы человека. М., 1966.

Непомнящая Н.И. Становление личности ребенка 6–7 лет. М., 1992.

Обухова Л.Ф. Детская психология: теория, факты, проблемы. М., 1995.

Одаренные дети / Пер. с англ. М., 1991.

Особенности психического развития детей 6–7-летнего возраста / Под ред. Д.Б. Эльконина, А.Л. Венгера. М., 1988.

Основные современные концепции творчества и одаренности / Под ред. Д.Б. Богоявленской. М., 1997.

Пиаже Ж. Психология интеллекта. / Пер. с фр. Пиаже Ж. Избранные психологические труды. М., 1969.

Пиаже Ж. Генезис числа у ребенка. / Пер. с фр. Пиаже Ж. Избранные психологические труды. М., 1969.

Пономарев Я.А. Знания, мышление и умственное развитие. М., 1967.

Психокоррекционная и развивающая работа с детьми / Под ред. И.В. Дубровиной. М., 1998.

Рабунский Е.С. Индивидуальный подход в процессе обучения школьников. М., 1975.

Развитие творческой активности школьников / Под ред. А.М. Матюшкина. М., 1991.

Роттенберг В.С., Бондаренко С.М. Мозг. Обучение. Здоровье. М., 1989.

Савенков А.И. Одаренные дети в детском саду и в школе. М., 2000.

Симонов В.П. Урок: планирование, организация и оценка эффективности. М., 2003.

Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике. Киев, 1983.

Талызина Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний. М., 1975.

Теплов Б.М. Проблемы индивидуальных различий. М., 1961.

Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе. М., 1983.

Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача: Ч. 1. Пособие для учителей / Под ред. Н.Я. Виленкина. М., 1982.

Фуше А. Педагогика математики / Пер. с фр. М., 1969.

Холодная М.А. Психология интеллекта: парадоксы исследования. М., 1997.

Чуприкова Н.И. Умственное развитие и обучение. Психологические основы развивающего обучения. М., 1995

Шаграева О.А. Детская психология: теоретический и практический курс. М., 2001

Шардаков М.Н. Очерки психологии школьника. М., 1955.

Шеварев П.А. Обобщенные ассоциации в учебной работе школьника. М., 1959.

Шевченко С.Г. Коррекционно-развивающее обучение: Организационно-педагогические аспекты. М., 1999.

Шохор-Троцкий С.И. Требования, предъявляемые психологией к математике как к учебному предмету // Труды I Всероссийского съезда преподавателей математики. Т. 1. СПб., 1913.

Щукина Г.И. Роль деятельности в учебном процессе. М., 1986.

Юркевич В.С. Одаренный ребенок: иллюзии и реальность. Книга для учителей и родителей. М., 1996.

Якиманская И.С. Личностно-ориентированное обучение в современной школе. М., 1996.

Ясюкова Л.А. Особенности развития детей в зависимости от программ обучения // Практическая психология. СПб., 1998.